

奥赛经典

专题研究系列



湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 | 组编

奥林匹克数学中的几何问题

◇沈文选　张垚　冷岗松/编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

专题研究系列

奥林匹克数学中的几何问题

湖 南 省 数 学 会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 | 组编

◇沈文选 张 垚 冷岗松/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学中的几何问题／沈文选,张垚,冷岗松编著.—修订本.—长沙:湖南师范大学出版社,2009.5
(奥赛经典丛书·专题研究系列)
ISBN 978-7-5648-0026-0

Ⅰ.奥…　Ⅱ.①沈…②张…③冷…　Ⅲ.几何课—中学—教学参考资料　Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 072399 号

奥林匹克数学中的几何问题
沈文选　张　垚　冷岗松　编著

◇组　　稿:廖小刚
◇责任编辑:廖小刚
◇责任校对:蒋旭东
◇出版发行:湖南师范大学出版社
　　地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
　　电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636
　　网址/http://press.hunnu.edu.cn
◇印刷:国防科技大学印刷厂

◇开本:730×960　1/16 开
◇印张:33
◇插页:0.25
◇字数:710 千字
◇版次:2004 年 7 月第 1 版　2009 年 5 月第 1 次修订
　　2009 年 5 月第 5 次印刷
◇书号:ISBN 978-7-5648-0026-0
◇定价:36.00 元

前言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动．多年来的实践表明：这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣，焕发青少年的学习热情，吸引他们去读一些数学小册子，促使他们寻找机会去听一些名师的讲座；这项活动可以使参与者眼界大开，跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子，去与其他“高手”互相琢磨，激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神；这项活动可以使参与者求知欲望大增，使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进．这是一种有深刻内涵的文化现象，因此，越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外，还积极地参与到国际数学奥林匹克中．

我国自 1986 年参加国际数学奥林匹克以来，所取得成绩举世公认，十多年来一直保持世界领先的水平．其中，到 2007 年止，湖南的学生已取得 10 块金牌、3 块银牌的好成绩．这优异的成绩，是中华民族精神的体现，是国人潜质的反映，是民族强盛的希望．为使我国数学奥林匹克事业可持续发展，一方面要继续吸引越来越多的青少年参与，吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来，另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系，要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略，研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系．为此，在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下，2003 年，湖南师范大学成立了“数学奥林匹克研究所”．研究所组建近一年来，我们几位教授都积极投身到研究所的工作中，除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外，还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理，以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书，分几何、代数、组合、数论、真题分析五卷．这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料，而且还可激发解竞赛题的直觉或灵感．从教育心理学角度上说，只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识，才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动．

由于这套丛书篇幅较大，2009 年又进行了修订，有些部分可能整理欠完善，敬请专家、同行和读者不吝指正．

编　者

2009 年 5 月

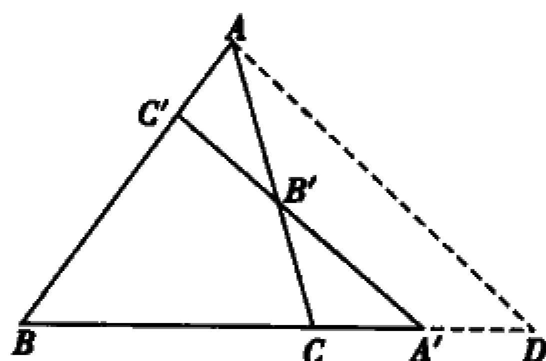
目 录

第一篇 平面几何问题

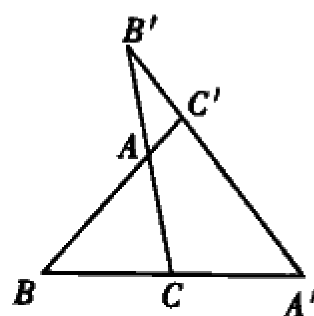
第一章 梅涅劳斯定理及应用

【基础知识】

梅涅劳斯定理 设 A', B', C' 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 或其延长线上的点，若 A', B', C' 三点共线，则$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$. ①



(a)



(b)

图 1－1

证明 如图 1－1(a)，过 A 作直线 $AD\parallel C'A'$ 交 BC 的延长线于 D，则

$\frac{CB'}{B'A}=\frac{CA'}{A'D}$, $\frac{AC'}{C'B}=\frac{DA'}{A'B}$，故

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA'}{A'D}\cdot\frac{DA'}{A'B}=1.$$

注 此定理的证明还有如下正弦定理证法及面积证法.

正弦定理证法 设$\angle BC'A'=\alpha$，$\angle CB'A'=\beta$，$\angle B'A'B=\gamma$，在$\triangle BA'C'$中，有$\frac{BA'}{C'B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$，同理，$\frac{CB'}{CA'}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$，$\frac{AC'}{AB'}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$，此三式相乘即证.

面积证法 由$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle A'CB}}{S_{\triangle A'C'C}}$，$\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_{\triangle CB'C'}}{S_{\triangle B'AC'}}=\frac{S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle A'AB'}}=\frac{S_{\triangle CB'C'}+S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle B'AC'}+S_{\triangle A'AB'}}=\frac{S_{\triangle C'CA'}}{S_{\triangle AC'A'}}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{\triangle AC'A'}}{S_{\triangle C'BA'}}$，此三式相乘即证.

梅涅劳斯定理的逆定理 设A'，B'，C'分别是$\triangle ABC$的三边BC，CA，AB或其延长线上的点，若

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1, \qquad ②$$

则A'，B'，C'三点共线.

证明 设直线$A'B'$交AB于C_1，则由梅涅劳斯定理，得到$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1A}=1$.

由题设，有$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$，即有$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$.

又由合比定理，知$\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB}$，故有$AC_1=AC'$，从而$C_1$与$C'$重合，即$A'$，$B'$，$C'$三点共线.

有时，也把上述两个定理合写为：设A'，B'，C'分别是$\triangle ABC$的三边BC，CA，AB所在直线(包括三边的延长线)上的点，则A'，B'，C'三点共线的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

上述①与②式是针对$\triangle ABC$而言的，如图1－1(b)，对于$\triangle C'BA'$、$\triangle B'CA'$、$\triangle AC'B'$也有下述形式的充要条件：

$$\frac{C'A}{AB}\cdot\frac{BC}{CA'}\cdot\frac{A'B'}{B'C'}=1;\frac{B'A}{AC}\cdot\frac{CB}{BA'}\cdot\frac{A'C'}{C'B'}=1;\frac{AB}{BC'}\cdot\frac{C'A'}{A'B'}\cdot\frac{B'C}{CA}=1. \qquad ③$$

第一角元形式的梅涅劳斯定理 设A'，B'，C'分别是$\triangle ABC$的三边BC，CA，AB所在直线(包括三边的延长线)上的点，则A'，B'，C'共线的充分必要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1. \qquad ④$$

证明 如图1－2，可得

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AA'\cdot\sin\angle BAA'}{\frac{1}{2}AA'\cdot AC\cdot\sin\angle A'AC}$$

$$=\frac{AB\cdot\sin\angle BAA'}{AC\cdot\sin\angle A'AC}.$$

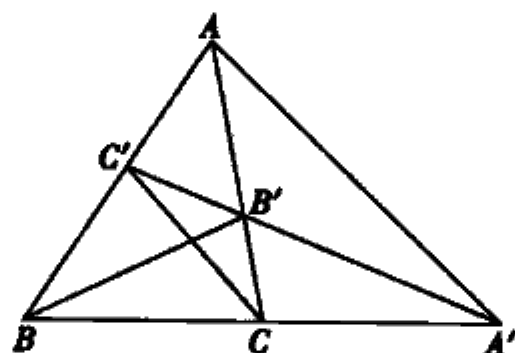


图 1－2

同理，$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC\cdot\sin\angle CBB'}{AB\cdot\sin\angle B'BA}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC\cdot\sin\angle ACC'}{BC\cdot\sin\angle C'CB}$.

以上三式相乘，运用梅涅劳斯定理及其逆定理，知结论成立.

第二角元形式的梅涅劳斯定理 设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点，点 O 不在 $\triangle ABC$ 三边所在直线上，则 A'、B'、C' 三点共线的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BOA'}{\sin\angle A'OC}\cdot\frac{\sin\angle COB'}{\sin\angle B'OA}\cdot\frac{\sin\angle AOC'}{\sin\angle C'OB}=1. \quad ⑤$$

证明 如图 1－3，由 $\frac{S_{\triangle BOA'}}{S_{\triangle A'OC}}=\frac{BA'}{A'C}$，有

$$\frac{\sin\angle BOA'}{\sin\angle A'OC}=\frac{OC}{OB}\cdot\frac{BA'}{A'C}.$$

同理，$\frac{\sin\angle COB'}{\sin\angle B'OA}=\frac{OA}{OC}\cdot\frac{CB'}{B'A}$，$\frac{\sin\angle AOC'}{\sin\angle C'OB}=\frac{OB}{OA}\cdot\frac{AC'}{C'B}$.

于是 $\frac{\sin\angle BOA'}{\sin\angle A'OC}\cdot\frac{\sin\angle COB'}{\sin\angle B'OA}\cdot\frac{\sin\angle AOC'}{\sin\angle C'OB}=\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}$.

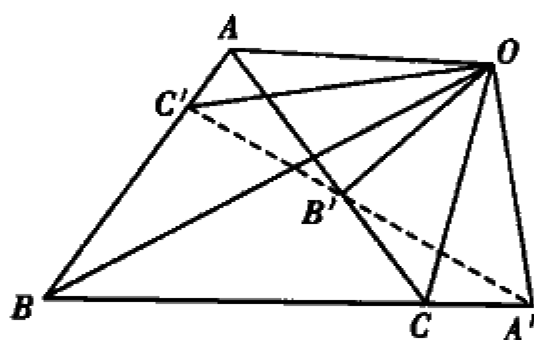


图 1－3

故由梅涅劳斯定理知 A'、B'、C' 共线 $\Leftrightarrow\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$.

从而定理获证.

注 (1)对于④、⑤式也有类似③式的结论.

(2)于在上述各定理中，若采用有向线段或有向角，则①、②、③、④、⑤式中的右端均为 -1，③、④、⑤式中的角也可以按①或②式中的对应线段记忆.特别要注意的是三边所在直线上的点为一点或者三点在边的延长线上.

【典型例题与基本方法】

1. 恰当地选择三角形及其截线(或作出截线)，是应用梅涅劳斯定理的关键

例 1 如图 1－4，在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle ABC$ 的面积比是 3:4:1，点

M,N 分别在 AC,CD 上,满足 $AM:AC=CN:CD$,并且 B,M,N 共线.求证:M 与 N 分别是 AC 和 CD 的中点. (1983 年全国高中联赛题)

证明 设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r(0<r<1)$,$AC$ 交 BD 于 E.

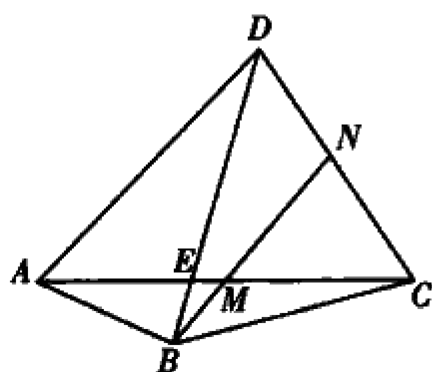


图 1-4

$\because \quad S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$,

$\therefore \quad \frac{BE}{BD}=\frac{1}{7},\frac{AE}{AC}=\frac{3}{7}$.

$$\frac{EM}{MC}=\frac{AM-AE}{AC-AM}=\frac{\frac{AM}{AC}-\frac{AE}{AC}}{1-\frac{AM}{AC}}=\frac{r-\frac{3}{7}}{1-r}=\frac{7r-3}{7-7r}.$$

又因 B,M,N 三点共线,可视 BMN 为$\triangle CDE$ 的截线,故由梅涅劳斯定理,得

$$\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EM}{MC}=1,\text{即}\frac{r}{1-r}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{7r-3}{7-7r}=1.$$

化简整理,得 $6r^2-r-1=0$,

解得 $r=\frac{1}{2}$,$r=-\frac{1}{3}$(舍去).

故 M 与 N 分别是 AC 和 CD 的中点.

例 2 如图 1-5,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 平分$\angle BAD$,在 CD 上取一点 E,BE 与 AC 相交于 F,延长 DF 交 BC 于 G.求证:$\angle GAC=\angle EAC$.

(1999 年全国高中联赛题)

证明 记$\angle BAC=\angle CAD=\theta$,$\angle GAC=\alpha$,$\angle EAC=\beta$,直线 GFD 与$\triangle BCE$ 相截,由梅涅劳斯定理,有

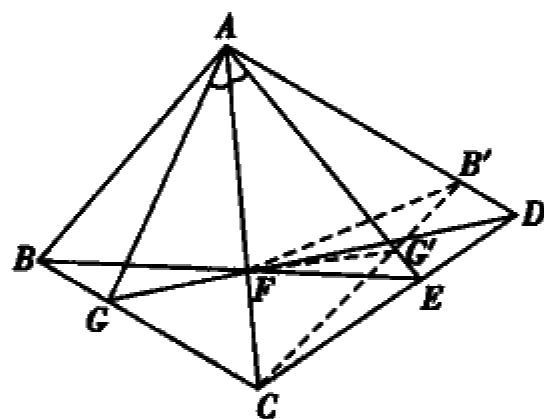


图 1-5

$$\begin{aligned}1&=\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FB}=\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AGC}}\cdot\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle AED}}\cdot\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABF}}\\&=\frac{AB\cdot\sin(\theta-\alpha)}{AC\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{AC\cdot\sin\theta}{AE\cdot\sin(\theta-\beta)}\cdot\frac{AE\cdot\sin\beta}{AB\cdot\sin\theta}\\&=\frac{\sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\theta-\beta)}.\end{aligned}$$

$\therefore \quad \sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\beta=\sin(\theta-\beta)\cdot\sin\alpha$.

即 $\sin\theta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta-\cos\theta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin\theta\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha-\cos\theta\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$,

亦即 $\sin\theta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin\theta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\Leftrightarrow\sin(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow\alpha-\beta=k\pi$,且 k 只可能为 0,故$\angle GAC=\angle EAC$.

例 3 设 E、F 分别为四边形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的点,BF 与 DE 交于点 P.若$\angle BAE=\angle FAD$,则$\angle BAP=\angle CAD$.

证明 如图 1-6,只需证得当 AF 关于$\angle BAD$ 的等角线交 BE 于 P 时,B、P、F 共

线即可.

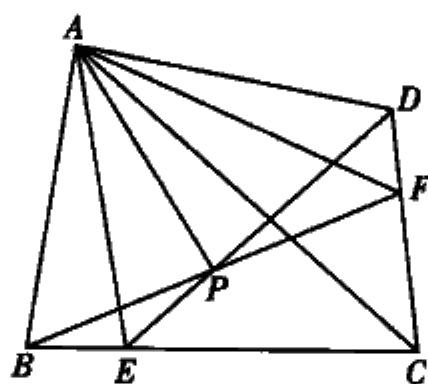


图 1－6

事实上，B、P、F 分别为$\triangle CDE$ 三边所在直线上的三点，且 A 不在其三边所在直线上.

又$\angle FAD=\angle EAB$，$\angle DAP=\angle BAC$，$\angle PAE=\angle CAF$，由第二角元形式的梅涅劳斯定理，有

$\frac{\sin\angle EAB}{\sin\angle BAC}\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle FAD}\cdot\frac{\sin\angle DAP}{\sin\angle PAE}=1$.故 B、P、F 三点共线.

注 当 AC 平分$\angle BAD$ 时，即为 1999 年全国高中联赛题.

2. 梅涅劳斯定理的逆用(逆定理的应用)与迭用，是灵活应用梅氏定理的一种方法

例 2 另证 如图 1－5，设 B，G 关于 AC 的对称点分别为 B'，G'，易知 A，D，B' 三点共线，连 FB'，FG'，只须证明 A，E，G' 三点共线.

设$\angle EFB'=\alpha$，$\angle DFE=\angle BFG=\angle B'FG'=\beta$，$\angle AFD=\angle GFC=\angle G'FC=\gamma$，则

$$\frac{DA}{AB'}\cdot\frac{B'G'}{G'C}\cdot\frac{CE}{ED}=\frac{S_{\triangle FDA}}{S_{\triangle FB'A}}\cdot\frac{S_{\triangle FG'B'}}{S_{\triangle FG'C}}\cdot\frac{S_{\triangle FEC}}{S_{\triangle FED}}=\frac{FD\cdot\sin\gamma}{FB'\cdot\sin(\beta+\gamma-\alpha)^{*}}\cdot\frac{FB'\cdot\sin\beta}{FC\cdot\sin\gamma}\cdot\frac{FC\cdot\sin(\beta+\gamma-\alpha)}{FD\cdot\sin\beta}=1.$$

对$\triangle CB'D$，应用梅涅劳斯定理的逆定理，知 A，E，G' 三点共线.故$\angle GAC=\angle EAC$.

注 在图 1－5 中，* 式也可为 $\sin(180°-\beta-\gamma)$，若 B' 在 AD 的延长上，则 * 式为 $\sin(\beta+\gamma+\alpha)$.

例 4 如图 1－7，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 和$\triangle ABC$ 的三边所在的 3 条直线都相切，E，F，G，H 为切点，直线 EG 与 FH 交于点 P.求证：$PA\perp BC$. （1996 年全国高中联赛题）

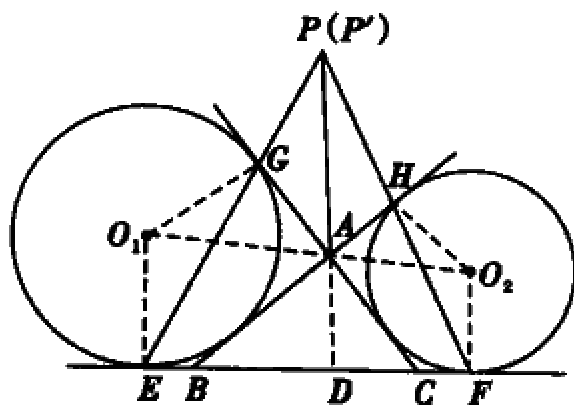


图 1－7

证法 1 过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D，延长 DA 交直线 HF 于点 P'.对$\triangle ABD$ 及截线 FHP' 应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=1.$$

由 $BF=BH$，有$\frac{AH}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=1$.

显然 O_1，A，O_2 三点共线，连 O_1E，O_1G，O_2F，O_2H，则由 $O_1E/\!/AD/\!/O_2F$，有$\triangle AGO_1\backsim\triangle AHO_2$，从而

$\frac{DE}{DF}=\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{AG}{AH}$，即$\frac{AH}{FD}=\frac{AG}{ED}$.

又 $CE=CG$，则 $1=\frac{AH}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=\frac{DP'}{P'A}\cdot\frac{AG}{ED}=\frac{DP'}{P'A}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}$.

对$\triangle ADC$，应用梅涅劳斯定理的逆定理，知 P'，G，E 三点共线，即 P' 为直线 EG 与 FH 的交点.故点 P' 与点 P 重合，从而 $PA\perp BC$.

证法2 延长 PA 交 BC 于 D，直线 PHF 与 $\triangle ABD$ 的三边延长线都相交，直线 PGE 与 $\triangle ADC$ 的三边延长线都相交，分别应用（迭用）梅涅劳斯定理，有

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DP}{PA}=1,\ \frac{DP}{PA}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}=1.$$

上述两式相除，则有 $\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}=\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}$.

而 $HB=BF$，$CE=GC$，于是 $\frac{AH}{FD}=\frac{AG}{ED}$，即 $\frac{AG}{AH}=\frac{DE}{DF}$.

连 O_1G，O_1E，O_1A，O_2A，O_2H，O_2F，而 O_1，A，O_2 共线，则 $OG\perp GC$，$O_2H\perp BH$，且 $\triangle O_1AG\backsim\triangle O_2AH$，从而 $\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{AG}{AH}=\frac{DE}{DF}$，于是 $AD\parallel O_1E$. 故 $AD\perp EF$，即 $PA\perp BC$.

【解题思维策略分析】

梅涅劳斯定理是三角形几何学中的一颗明珠，它蕴含着深刻的数学美，因而它在求解某些平面几何问题，特别是某些平面几何竞赛题中有着重要的应用.

1. 寻求线段倍分的一座桥梁

例5 已知 $\triangle ABC$ 的重心为 G，M 是 BC 边的中点，过 G 作 BC 边的平行线交 AB 边于 X，交 AC 边于 Y，且 XC 与 GB 交于点 Q，YB 与 GC 交于点 P. 证明：$\triangle MPQ\backsim\triangle ABC$.

（1991年第3届亚太地区竞赛题）

证明 如图1－8，延长 BG 交 AC 于 N，则 N 为 AC 的中点.

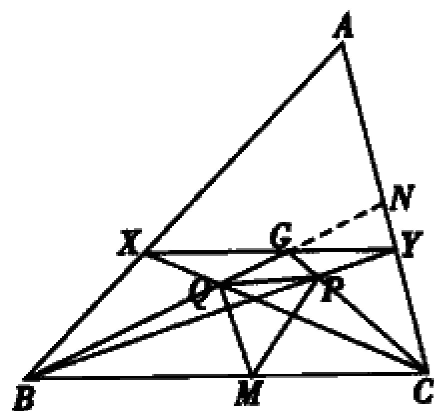


图1－8

由 $XY\parallel BC$，知 $\frac{AX}{XB}=\frac{AG}{GM}=2$，而 $\frac{NC}{CA}=\frac{1}{2}$.

对 $\triangle ABN$ 及截线 XQC，应用梅涅劳斯定理，有

$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BQ}{QN}\cdot\frac{NC}{CA}=2\cdot\frac{BQ}{QN}\cdot\frac{1}{2}=1$，故 $BQ=QN$.

从而 $MQ\parallel AC$，且 $MQ=\frac{1}{2}CN=\frac{1}{4}AC$.

同理，$MP\parallel AB$，且 $MP=\frac{1}{4}AB$.

由此可知，$\angle PMQ$ 与 $\angle BAC$ 的两边分别平行且方向相反，从而 $\angle PMQ=\angle BAC$，且 $\frac{MP}{AB}=\frac{MQ}{AC}$，故 $\triangle MPQ\backsim\triangle ABC$.

例6 $\triangle ABC$ 是一个等腰三角形，$AB=AC$，M 是 BC 的中点；O 是 AM 的延长线上的一点，使得 $OB\perp AB$；Q 是线段 BC 上不同于 B 和 C 的任意一点，E 在直线 AB 上，F 在直线 AC 上，使得 E，Q，F 是不同的和共线的.求证：

(Ⅰ)若 $OQ\perp EF$,则 $QE=QF$;

(Ⅱ)若 $QE=QF$,则 $OQ\perp EF$. (1994年第35届IMO试题)

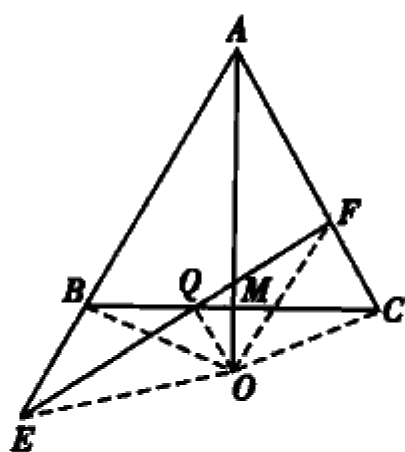


图1-9

证明 (Ⅰ)如图1-9,连 OE,OF,DC.由 $OQ\perp EF$,易证 O,E,B,Q 四点共圆,O,C,F,Q 四点共圆.则 $\angle OEQ=\angle OBQ=\angle OCQ=\angle OFQ$,因此 $OE=OF$.故 $QE=QF$.

(Ⅱ)由 $AB=AC,EQ=QF$,对△AEF 及截线 BQC 运用梅涅劳斯定理,有 $1=\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EQ}{QF}\cdot\frac{EC}{CA}=\frac{FC}{BE}$,即 $BE=CF$. 于是可证 Rt△$OBE\cong$ Rt△OCF,得 $OE=OF$,故 $OQ\perp EF$.

例7 在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 BC 上取点 E 和 F,使线段 DE 和 DF 把对角线 AC 三等分,已知 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$,求证:$ABCD$ 是平行四边形.

(1990年第16届全俄竞赛题)

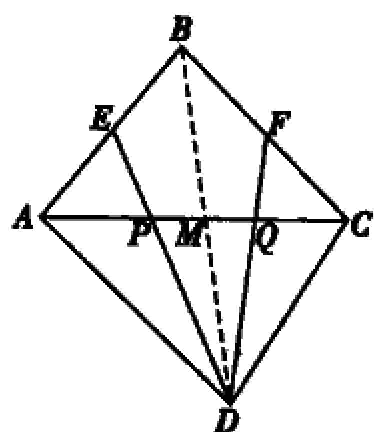


图1-10

证明 如图1-10,设 DE,DF 分别交 AC 于 P,Q,两对角线交于 M.要证 $ABCD$ 是平行四边形,若证得 $AM=MC$(或 $PM=MQ$),且 $BM=MD$ 即可.

由 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$, $S_{\triangle ADP}=S_{\triangle CDQ}$(等底等高),知 $S_{\triangle AEP}=S_{\triangle CFQ}$,而 $AP=CQ$,故有 $EF\parallel AC$,从而有 $\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FC}$.

对△BAM 及截线 EPD,△BCM 及截线 FQD,分别应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}\cdot\frac{MD}{DB}=1, \quad ①$$

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CQ}{QM}\cdot\frac{MD}{DB}=1. \quad ②$$

由①,②两式相除得 $\frac{AP}{PM}=\frac{CQ}{QM}$.

而 $AP=CQ$,故 $PM=MQ$,即有 $AM=MC$.

此时,又有 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

又由 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$,知 $BE=EA$,于是①式可写为 $\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}\cdot\frac{MD}{DB}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{MD}{DB}=1$,即有 $DB=2MD$,亦即 $BM=MD$.

故 $ABCD$ 为平行四边形.

2. 导出线段比例式的重要途径

例8 在△ABC 中,AA_1 为 BC 边上的中线,AA_2 为 $\angle BAC$ 的平分线,且交 BC 于

A_2，K 为 AA_1 上的点，使 $KA_2 /\!/ AC$．证明 $AA_2 \perp KC$． （1997年第58届莫斯科竞赛题）

证明 如图1－11，延长 CK 交 AB 于 D，只须证 $AD=AC$．

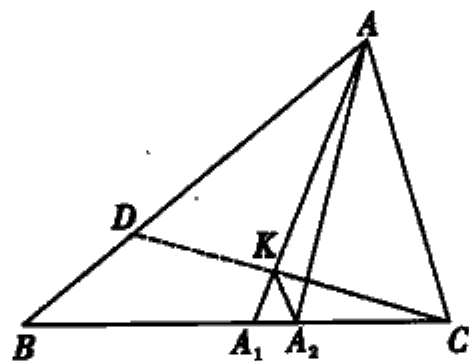


图1－11

由 AA_2 平分 $\angle BAC$，有 $\frac{AB}{AC}=\frac{BA_2}{A_2C}$． ①

由 $KA_2 /\!/ AC$，有 $\frac{A_1K}{KA}=\frac{A_1A_2}{A_2C}$．

注意到 $BC=2A_1C$，对 $\triangle ABA_1$ 及截线 DKC 运用梅涅劳斯定理，得

$1=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BC}{CA_1}\cdot\frac{A_1K}{KA}=\frac{AD}{DB}\cdot 2\cdot\frac{A_1A_2}{A_2C}$．故 $\frac{BD}{DA}=\frac{2A_1A_2}{A_2C}$，由合比定理，有

$$\frac{BD+DA}{DA}=\frac{2A_1A_2+A_2C}{A_2C}=\frac{A_1A_2+A_1C}{A_2C}=\frac{A_1A_2+BA_1}{A_2C}，即为\quad \frac{AB}{AD}=\frac{BA_2}{A_2C}. \qquad ②$$

由①，②式有 $\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AD}$，故 $AC=AD$．

例9 给定锐角$\triangle ABC$，在 BC 边上取点 A_1，A_2（A_2 位于 A_1 与 C 之间），在 CA 边上取点 B_1，B_2（B_2 位于 B_1 与 A 之间），在 AB 边上取点 C_1，C_2（C_2 位于 C_1 与 B 之间），使得 $\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_1B_2=\angle BB_2B_1=\angle CC_1C_2=\angle CC_2C_1$，直线 AA_1，BB_1 与 CC_1 可构成一个三角形，直线 AA_2，BB_2 与 CC_2 可构成另一个三角形．证明：这两个三角形的六个顶点共圆． （1995年第36届IMO预选题）

证明 如图1－12，设题中所述两个三角形分别为$\triangle UVW$ 与$\triangle XYZ$．

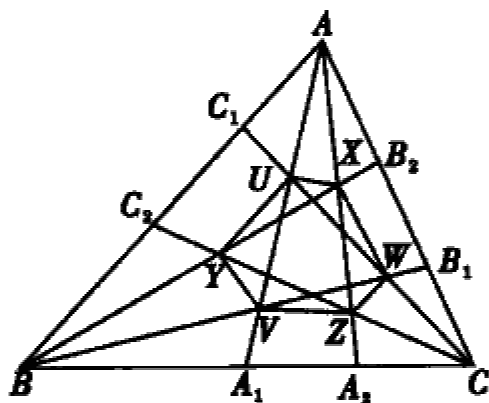


图1－12

由已知条件，有$\triangle AC_1C \backsim \triangle AB_2B$，$\triangle BA_2A \backsim \triangle BC_1C$，$\triangle CB_2B \backsim \triangle CA_1A$，得 $\frac{AC_1}{AB_2}=\frac{AC}{AB}$，$\frac{BA_2}{BC_1}=\frac{AB}{BC}$，$\frac{CB_2}{CA_1}=\frac{BC}{AC}$，此三式相乘得 $\frac{AC_1}{AB_2}\cdot\frac{BA_2}{BC_1}\cdot\frac{CB_2}{CA_1}=1$． ①

对$\triangle AA_1B$ 及截线 CUC_1，$\triangle AA_2C$ 及截线 BXB_2，分别应用梅涅劳斯定理，得

$$\frac{AU}{UA_1}\cdot\frac{A_1C}{CB}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1,\quad ② \qquad \frac{A_2X}{XA}\cdot\frac{AB_2}{B_2C}\cdot\frac{CB}{BA_2}=1,\quad ③$$

①，②，③三式相乘化简，得 $\frac{AU}{UA_1}=\frac{AX}{XA_2}$．故 $UX /\!/ BC$．

同理，$WX /\!/ CA$．故 $\angle AUX=\angle AA_1A_2=\angle BB_1B_2=\angle BWX$．

从而点 X 在 $\triangle UVW$ 的外接圆上.

同理,可证得 Y,Z 也在 $\triangle UVW$ 的外接圆上.证毕.

例 10 如图 1-13,以 $\triangle ABC$ 的底边 BC 为直径作半圆,分别与边 AB,AC 交于点 D 和 E,分别过点 D,E 作 BC 的垂线,垂足依次为 F,G,线段 DG 和 EF 交于点 M.求证:$AM\perp BC$.

(IMO-37 中国国家队选拔赛题)

证法 1 设直线 AM 与 BC 交于 H,连 BE,CD,则知 $\angle BEC=\angle BDC=90^\circ$,直线 FME 与 $\triangle AHC$ 相截,直线 GMD 与 $\triangle ABH$ 相截,迭用梅涅劳斯定理,有

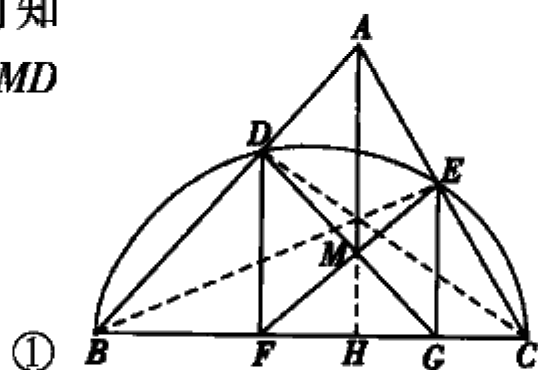


图 1-13

$$\frac{AM}{MH}\cdot\frac{HF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,\frac{AM}{MH}\cdot\frac{HG}{GB}\cdot\frac{BD}{DA}=1.$$

两式相除,得 $$\frac{FH}{HG}=\frac{CF\cdot AE\cdot BD}{CE\cdot BG\cdot AD}. \quad ①$$

在 Rt$\triangle DBC$ 与 Rt$\triangle EBC$ 中,有

$CD^2=BC\cdot FC,BE^2=BC\cdot BG$,即$\dfrac{CF}{BG}=\dfrac{CD^2}{BE^2}$.将其代入①式,得

$$\frac{FH}{HG}=\frac{CD^2\cdot AE\cdot BD}{BE^2\cdot CE\cdot AD}. \quad ②$$

又由 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$,有 $\dfrac{CD}{BE}=\dfrac{AD}{AE}$.

将其代入②式,得 $\dfrac{FH}{HG}=\dfrac{CD\cdot BD}{BE\cdot CE}=\dfrac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}=\dfrac{DF}{EG}=\dfrac{DM}{MG}$,从而,$MH/\!/DF$.

而 $DF\perp BE$,则 $MH\perp BC$,故 $AM\perp BC$.

证法 2 作高 AH,连 BE,CD,则$\angle BDC=90^\circ=\angle BEC$,于是,$DF=BD\cdot\sin\angle B=BC\cdot\cos\angle B\cdot\sin\angle B$,$EG=BC\cdot\cos\angle C\cdot\sin\angle C$.

$$\therefore\ \frac{GM}{MD}=\frac{EG}{FD}=\frac{\cos\angle C\cdot\sin\angle C}{\cos\angle B\cdot\sin\angle B}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\cos\angle C}{\cos\angle B}.$$

又 $BH=AB\cdot\cos\angle B,HG=AE\cdot\cos\angle C$,

$$\therefore\ \frac{BH}{HG}=\frac{AB\cdot\cos\angle B}{AE\cdot\cos\angle C}=\frac{AC\cdot\cos\angle B}{AD\cdot\cos\angle C},\text{即}\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AB}{AD},\text{故}\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}\cdot\frac{DA}{AB}=1.$$

对 $\triangle BGD$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理,知 H,M,A 三点共线.由 $AH\perp BC$,知 $AM\perp BC$.

例 11 如图 1-14,设点 I,H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心,点 B_1,C_1 分别为边 AC,AB 的中点.已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$,射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2,B_2C_2 与 BC 相交于 K,A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心.试证:A,I,A_1 三点共线的充分必要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等.

(CMO-2003 试题)

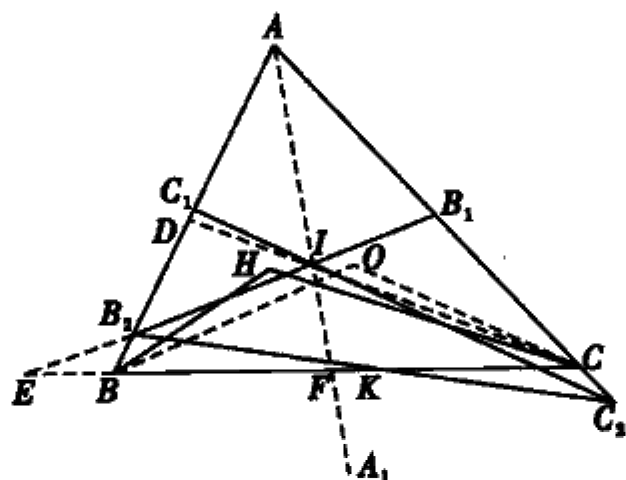


图 1 - 14

分析 首先证 A,I,A_1 三点共线 $\Leftrightarrow \angle BAC=60°$.

设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,连 BO,CO,则 $\angle BOC=2\angle BAC$.又 $\angle BHC=180°-\angle BAC$,因此,$\angle BAC=60°$

$\Leftrightarrow B,H,O,C$ 四点共圆

$\Leftrightarrow A_1$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 上

$\Leftrightarrow AI$ 与 AA_1 重合 $\Leftrightarrow A,I,A_1$ 三点共线.

其次,再证 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.并在三角函数式中,用 A、B、C 分别表示三内角.

证法 1 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,CI 的延长线交 AB 于 D,对 $\triangle ACD$ 及截线 C_1IC_2,应用梅涅劳斯定理,有 $\dfrac{AC_1}{C_1D}\cdot\dfrac{DI}{IC}\cdot\dfrac{CC_2}{C_2A}=1$. ①

注意到 $C_1D=AD-AC_1=\dfrac{AC\cdot AB}{AC+BC}-\dfrac{AB}{2}$

$$=\frac{AB(AC-BC)}{2(AC+BC)}=\frac{\sin C(\sin B-\sin A)\cdot R}{\sin B+\sin A}=\frac{2\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}\cdot R}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

$$\therefore\quad \frac{C_1D}{AC_1}=\frac{\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}.$$

而 $\dfrac{IC}{DI}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\dfrac{\sin(\frac{C}{2}+B)}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$,由①式,有 $\dfrac{CC_2}{C_2A}=\dfrac{IC}{DI}\cdot\dfrac{C_1D}{AC_1}=\dfrac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$.从而 $\dfrac{AC}{AC_2}=\dfrac{AC_2-CC_2}{C_2A}=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$. ②

又对 $\triangle ACD$ 及截线 B_1IB_2,应用梅涅劳斯定理,有 $\dfrac{AB_2}{B_2D}\cdot\dfrac{DI}{IC}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$.

注意到 $CB_1=B_1A$,有 $\dfrac{B_2D}{AB_2}=\dfrac{DI}{IC}=\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$,$\dfrac{AD}{AB_2}=\dfrac{AB_2-B_2D}{AB_2}=\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$,即 $AB_2=AD\cdot\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\dfrac{AC}{AC+BC}\cdot\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot$

$\frac{\sin B}{\sin B+\sin A}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}}$.从而 $\frac{AB}{AB_2}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$. ③

由 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB\cdot AC}{AB_2\cdot AC_2}=1$,注意②,③$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}=1$,且 A 为锐角$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 2 如图 1－14,设直线 AI 交 BC 于 F,直线 B_1B_2 交 CB 的延长线于 E.对 $\triangle ACF$ 及截线 B_1IE,应用梅涅劳斯定理,有 $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CE}{EF}\cdot\frac{FI}{IA}=1$. ④

又由 $AB_1=B_1C$ 及角平分线性质,即有 $\frac{FI}{IA}=\frac{CF}{CA}=\frac{BF}{BA}=\frac{BC}{AB+AC}$.

令 $BC=a,AC=b,AB=c$,则 $\frac{FI}{IA}=\frac{a}{b+c}$.

由④式,有 $\frac{CE}{EF}=\frac{b+c}{a}$,即 $\frac{EF}{CF}=\frac{EF}{CE-EF}=\frac{a}{b+c-a}$.

而 $CF=\frac{ab}{b+c}$,则 $EF=\frac{a^2b}{(b+c-a)(b+c)}$.

又 $BF=\frac{ac}{b+c}$,$BE=EF-BF=\frac{a(a-c)}{b+c-a}$(由题设知 $a>c$).

从而 $\frac{EF}{BE}=\frac{ab}{(b+c)(a-c)}$. ⑤

对 $\triangle ABF$ 及截线 IB_2E,应用梅涅劳斯定理,有 $\frac{AI}{IF}\cdot\frac{FE}{EB}\cdot\frac{BB_2}{B_2A}=1$.

将⑤式代入上式,得 $\frac{BB_2}{B_2A}=\frac{IF}{AI}\cdot\frac{BE}{EF}=\frac{a-c}{b}$,∴ $\frac{AB}{AB_2}=\frac{AB_2+B_2B}{AB_2}=\frac{a+b-c}{b}$. ⑥

同理 $\frac{AC}{AC_2}=\frac{a+c-b}{c}$. ⑦

由 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB\cdot AC}{AB_2\cdot AC_2}=1$,注意⑥,⑦$\Leftrightarrow\frac{a+b-c}{b}\cdot\frac{a+c-b}{c}=1\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

注 例 11 还有其他证法,可参见笔者另文《关于 2003 年中国数学奥林匹克第一题》(《中等数学》2003 年第 6 期).

例 12 如图 1－15,凸四边形 $ABCD$ 的一组对边 BA 与 CD 的延长线交于 M,且 $AD\not\parallel BC$,过 M 作截线交另一组对边所在直线于 H,L,交对角线所在直线于 H',L'.求

证：$\frac{1}{MH}+\frac{1}{ML}=\frac{1}{MH'}+\frac{1}{ML'}$.

证明 设 AD 与 BC 的延长线相交于 O. $\triangle BML$ 和 $\triangle CML$ 均被直线 AO 所截，迭用梅涅劳斯定理，有

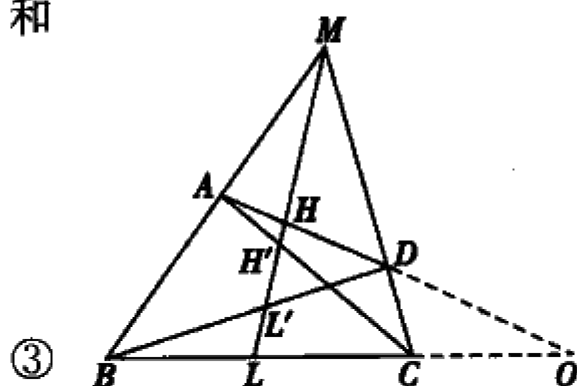


图 1－15

$\frac{BA}{AM}=\frac{HL}{MH}\cdot\frac{OB}{LO}$，①　　$\frac{CD}{DM}=\frac{HL}{MH}\cdot\frac{OC}{LO}$，②

由①·LC＋②·BL，得

$$LC\cdot\frac{BA}{AM}+BL\cdot\frac{CD}{DM}=\frac{HL}{MH}\cdot\frac{OB\cdot LC+OC\cdot BL}{LO}. \quad ③$$

注意到　$OB\cdot LC+OC\cdot BL=BC\cdot LO$（直线上的托勒密定理），则③式变为　$LC\cdot\frac{BA}{AM}+BL\cdot\frac{CD}{DM}=BC\cdot\frac{HL}{MH}$.　④

又由 BD 截$\triangle LCM$ 和 AC 截$\triangle LBM$，迭用梅涅劳斯定理，有 $BC\cdot\frac{LL'}{L'M}=BL\cdot\frac{DC}{MD}$，$BC\cdot\frac{LH'}{H'M}=LC\cdot\frac{AB}{AM}$.

将此结果代入④式整理，即得欲证结论.

注 当 $AD/\!/BC$，④式显然成立，故仍有结论成立.此题是二次曲线蝴蝶定理的推论.

3. 论证点共直线的重要方法

例 13 如图 1－16，$\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC，CA，AB 于点 D，E，F，点 X 是$\triangle ABC$ 的一个内点，$\triangle XBC$ 的内切圆也在点 D 处与 BC 边相切，并与 CX，XB 分别相切于点 Y，Z.证明：$EFZY$ 是圆内接四边形.　　（1995 年第 36 届 IMO 预选题）

证明 由切线长定理，知 $CE=CD=CY$，$BF=BD=BZ$，$AF=AE$，$XZ=XY$.

设 BC 的延长线与 FE 的延长线交于 P，对$\triangle ABC$ 及截线 FEP，应用梅涅劳斯定理，有

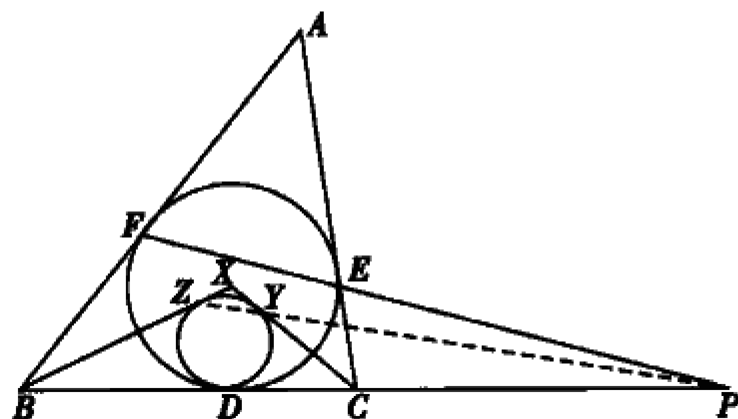


图 1－16

$$1=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{EA}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CE}{FB}$$
$$=\frac{XZ}{YX}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CY}{ZB}=\frac{XZ}{ZB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CY}{YX}.$$

对$\triangle XBC$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理，知 Z，Y，P 三点共线，故由切割线定理有 $PE\cdot PF=PD^2$，$PY\cdot PZ=PD^2$.

从而 $PE\cdot PF=PY\cdot PZ$，即 $EFZY$ 是圆内接四边形.

例 14 如图 1－17，$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 内的旁切圆切$\angle A$ 的两边于 A_1 和 A_2，直线

A_1A_2 与 BC 交于A_3;类似地定义 B_1,B_2,B_3 和 C_1,C_2,C_3.求证:A_3,B_3,C_3 三点共线.

证明 由切线长定理,知 $AA_1=AA_2,BB_1=BB_2,CC_1=CC_2$. 对$\triangle ABC$ 与直线 $C_1C_2C_3$, $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ 分别应用梅涅劳斯定理,有

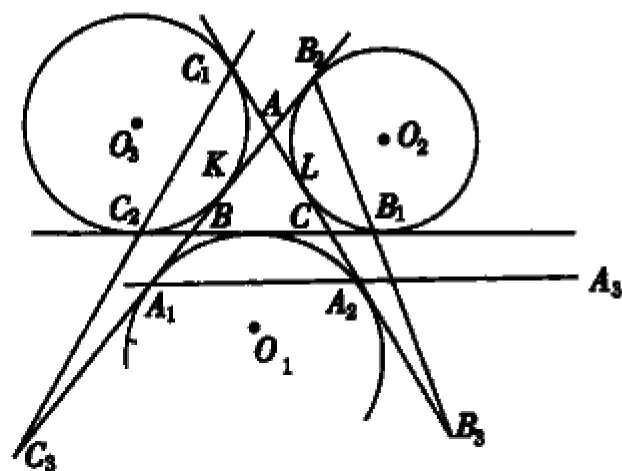


图 1－17

$$1=\frac{AC_3}{C_3B}\cdot\frac{BC_2}{C_2C}\cdot\frac{CC_1}{C_1A}=\frac{AC_3}{C_3B}\cdot\frac{BC_2}{C_1A}\cdot1,$$

$$1=\frac{BA_3}{A_3C}\cdot\frac{CA_2}{A_2A}\cdot\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{BA_3}{A_3C}\cdot\frac{CA^2}{A_1B}\cdot1,$$

$$1=\frac{CB_3}{B_3A}\cdot\frac{AB_2}{B_2B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}=\frac{CB_3}{B_3A}\cdot\frac{AB_2}{B_1C}\cdot1.$$

上述三式相乘,有

$$\frac{AC_3}{C_3B}\cdot\frac{BA_3}{A_3C}\cdot\frac{CB_3}{B_3A}=\frac{AC_1}{BC_2}\cdot\frac{A_1B}{CA_2}\cdot\frac{B_1C}{AB_2}=\frac{AC_1}{CA_2}\cdot\frac{A_1B}{AB_2}\cdot\frac{B_1C}{BC_2}.$$

设$\odot O_3$ 切 AB 于 K,$\odot O_2$ 切 AC 于 L,则由 $BB_1=BB_2$,可得 $BC_2=BK=\frac{1}{2}(B_1C_2-KB_2)$.同理 $B_1C=CL=\frac{1}{2}(B_1C_2-LC_1)$.又由两内公切线长相等,即 $KB_2=LC_1$,故 $BC_2=B_1C$.同理,$CA_2=AC_1$,$AB_2=A_1B$.

从而 $\frac{AC_3}{C_3B}\cdot\frac{BA_3}{A_3C}\cdot\frac{CB_3}{B_3A}=1$,故对$\triangle ABC$ 用梅涅劳斯的逆定理,知 A_3,B_3,C_3 三点共直线.

例 15 如图 1－18,设$\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 所在的直线上的点 D,E,F 共线,并且直线 AD,BE,CF 关于$\angle A,\angle B,\angle C$ 平分线的对称直线 AD',BE',CF' 分别与 BC,CA,AB 所在直线交于 D',E',F',则 D',E',F' 也共线.

证明 对$\angle ABC$ 及截线 FED 应用第一角元形式的梅涅劳斯定理,有

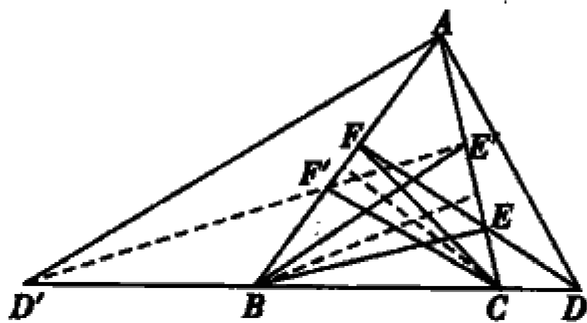


图 1－18

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}=1.$$

由题设知,$\angle CAD'=\angle BAD$,$\angle D'AB=\angle DAC$,$\angle BCF'=\angle ACF$,$\angle F'CA=\angle FCB$,$\angle ABE'=\angle CBE$,$\angle E'BC=\angle EBA$,从而有

$$\frac{\sin\angle CAD'}{\sin\angle D'AB}\cdot\frac{\sin\angle ABE'}{\sin\angle E'BC}\cdot\frac{\sin\angle BCF'}{\sin\angle F'CA}=1,\text{即}$$

$\frac{\sin\angle BAD'}{\sin\angle D'AC}\cdot\frac{\sin\angle CBE'}{\sin\angle E'BA}\cdot\frac{\sin\angle ACF'}{\sin\angle F'CB}=1$.

故由第一角元形式的梅涅劳斯定理,知 D',E',F'共线.

例 16 在筝形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$BC=CD$.过 BD 上的一点 P 作一条直线分别交 AD、BC 于 E、F,再过点 P 作一条直线分别交 AB、CD 于 G、H.设 GF 与 EH 分别与 BD 交于 I、J,求证:$\frac{PI}{PB}=\frac{PJ}{PD}$.

证明 如图 1-19,过 B 作 AD 的平行线交直线 EF 于 E',再过 B 作 CD 的平行线交直线 GH 于 H',则

$\angle E'BP=\angle EDP=\angle PBG$,$\angle H'BP=\angle HDP=\angle PBF$.

进而$\angle H'BG=\angle H'BP-\angle GBP=\angle PBF-\angle PBE'=\angle E'BF$.

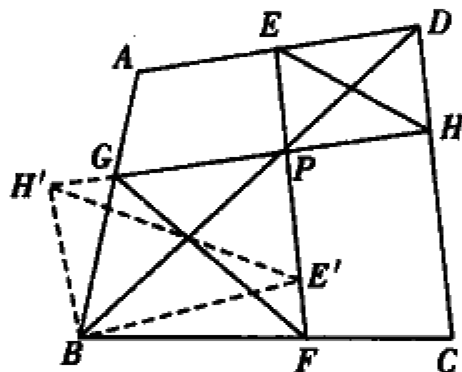


图 1-19

所以 $\frac{\sin\angle PBH'}{\sin\angle H'BG}\cdot\frac{\sin\angle GBI}{\sin\angle IBF}\cdot\frac{\sin\angle FBE'}{\sin\angle E'BP}=\frac{\sin\angle FBP}{\sin\angle E'BF}\cdot\frac{\sin\angle GBP}{\sin\angle PBF}\cdot\frac{\sin\angle FBE'}{\sin\angle PBG}=1$.

又 H'、I、E'分别为$\triangle PGF$三边所在直线上的点,且点 B 不在$\triangle PGF$三边所在的直线上.由第二角元形式的梅涅劳斯定理的逆定理知 H'、I、E'共线.

于是,由$\triangle PBE'\backsim\triangle PDE$,$\triangle PH'B\backsim\triangle PHD$.有 $E'H'\parallel EH$.

因此,$\frac{PI}{PJ}=\frac{PE'}{PE}=\frac{PB}{PD}$.故$\frac{PI}{PB}=\frac{PJ}{PD}$.

注 当 $PB=PD$,P 为 BD 中点时,即为 1989 年 12 月冬令营选拔赛试题.

例 17 如图 1-20,四边形 $ABCD$ 内接于圆,其边 AB,DC 的延长线交于点 P,AD 和 BC 的延长线交于点 Q,过 Q 作该圆的两条切线,切点分别为 E,F.求证:P,E,F 三点共线.

(CMO-12 试题)

证明 设圆心为 O,连 QO 交 EF 于 L,连 LD,LA,OD,OA,则由切割线定理和射影定理,有

$QD\cdot QA=QE^2=QL\cdot QO$,从而 D,L,O,A 四点共圆,即有$\angle QLD=\angle DAO=\angle ODA=\angle OLA$,亦即 OL 为$\triangle LAD$ 的内角$\angle ALD$ 的外角平分线.

又 $EF\perp OQ$,则 EL 平分$\angle ALD$.

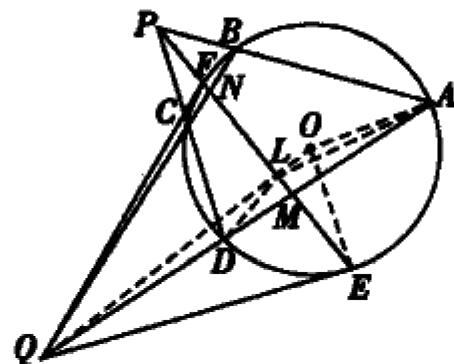


图 1-20

设 EF 分别交 AD,BC 于 M,N,于是$\frac{DM}{MA}=\frac{DL}{AL}=\frac{DQ}{AQ}$.

同理,$\frac{CN}{BN}=\frac{CQ}{BQ}$.

于是，$\frac{DM}{DQ}=\frac{AM}{AQ}=\frac{AM+DM}{AQ+DQ}=\frac{AD}{DQ+AQ}$，$\frac{CN}{CQ}=\frac{BN}{BQ}=\frac{BC}{BQ+CQ}$，

所以，$\frac{MQ}{DM}=1+\frac{DQ}{DM}=1+\frac{DQ+DA}{AD}=\frac{2AQ}{AD}$，$\frac{QN}{CN}=\frac{2BQ}{BC}$.

直线 PBA 与△QCD 的三边延长线相交，由梅涅劳斯定理，有 $1=\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DA}{AQ}\cdot\frac{QB}{BC}=\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DM}{MQ}\cdot\frac{QN}{CN}$.

对△QCD 应用梅涅劳斯定理的逆定理，知 P,M,N 三点共线. 所以 P,E,F 三点共线.

【模拟实战】

习题 A

1. 在△ABC 中，点 D 在 BC 上，$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{3}$，$E,G$ 分别在 AB,AD 上，$\frac{AE}{EB}=\frac{2}{3}$，$\frac{AG}{GD}=\frac{1}{2}$，$EG$ 交 AC 于点 F，求$\frac{AF}{FC}$.
2. 在▱$ABCD$ 中，E,F 分别是 AB,BC 的中点，AF 与 CE 相交于 G，AF 与 DE 相交于 H，求 $AH:HG:GF$.
3. P 是△ABC 内一点，引线段 APD,BPE 和 CPF，使 D 在 BC 上，E 在 AC 上，F 在 AB 上. 已知 $AP=6,BP=9,PD=6,PE=3,CF=20$，求△$ABC$ 的面积.
   （第 7 届 AIME 题）
4. 设凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 M，过 M 作 AD 的平行线分别交 AB，CD 于点 E,F，交 BC 的延长线于点 O，P 是以 O 为圆心，以 OM 为半径的圆上一点，求证：$\angle OPF=\angle OEP$.
   （1996 年全国初中联赛题）
5. 已知 D,F 分别是△ABC 的边 AB,AC 上的点，且 $AD:DB=CF:FA=2:3$，连 DF 交 BC 边的延长线于点 E，求 $EF:FD$.
6. 设 D 为等腰 Rt△ABC（$\angle C=90°$）的直角边 BC 的中点，E 在 AB 上，且 $AE:EB=2:1$，求证：$CE\perp AD$.
7. 在△ABC 中，点 M 和 N 顺次三等分 AC，点 X 和 Y 顺次三等分 BC，AY 与 BM,BN 分别交于点 S,R，求四边形 $SRNM$ 与△ABC 的面积之比.
8. E,F,G,H 分别为四边形 $ABCD$ 的四条边 AB,BC,CD,DA 上的点，若 EH,BD,FG 三直线共点，则 EF,AC,HG 三直线共点或平行.

9. 设 X,Y,Z 分别是$\triangle ABC$ 的边 CB,CA 和 BA 延长线上的点，又 XA,YB 和 ZC 分别是$\triangle ABC$ 外接圆的切线. 证明：X,Y,Z 三点共线. （1989 年新加坡竞赛题）
10. 求证：三角形两角的平分线与第三角的外角平分线各与对边所在直线的交点共线.
11. 已知直径为 AB 的圆和圆上一点 X，设 t_A,t_B 和 t_X 分别是这个圆在 A,B,X 处的切线. 设 Z 是直线 AX 与 t_B 的交点，Y 是直线 BX 与 t_A 的交点. 证明：YZ,t_X,AB 三直线共点. （第 6 届加拿大竞赛题）
12. P 是▱$ABCD$ 中任一点，过 P 作 AD 的平行线分别交 AB,CD 于 E,F，又过 P 作 AB 的平行线，分别交 AD,BC 于 G,H. 求证：AH,CE,DP 三线共点.
13. 在$\triangle ABC$ 中，AA_1 为中线，AA_2 为角平分线，K 为 AA_1 上的点，使 $KA_2\parallel AC$. 证明：$AA_2\perp KC$. （第 58 届莫斯科奥林匹克题）
14. 直线 l 交直线 OX,OY 分别于 A,B，点 C 与 D 是线段 AB 两侧的直线 l 上两点，且 $CA=DB$. 过 C 的直线 CKL 交 OX 于 K，交 OY 于 L；过 D 的直线交 OX 于 M，交 OY 于 N. 连结 ML 和 KN，交直线 l 分别于 E,F. 求证：$AE=BF$.
15. 设四边形 $ABCD$ 外切于一圆，E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 边上的切点，若直线 HE 与 DB 相交于点 M，则 M,F,G 三点共线.
16. 设 P 为$\triangle ABC$ 的内点，过点 P 的直线 l,m,n 分别垂直于 AP,BP,CP，若 l 交 BC 于 Q，m 交 AC 于 R，n 交 AB 于 S，证明：Q,R,S 共线. （IMO－28 预选题）
17. 已知$\triangle ABC$ 的 BC 与它的内切圆相切于点 F. 证明：该圆的圆心 O 在 BC 与 AF 的两个中点 M,N 的连线上.
18. 已知凸四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，对角线 AC,BD 相交于点 Q，过 Q 分别作直线 AB,BC,CD,DA 的垂线，垂足分别是 E,F,G,H. 求证：EH,BD,FG 三直线共点或互相平行.
19. 设 $ABCD$ 为圆外切四边形，又 AB,BC,CD,DA 与该圆的切点为 E,F,G,H. 求证：AC,BD,EG,FH 共点.

习题 B

1. P 是▱$ABCD$ 内一点，MN,EF 分别过 P，$MN\parallel AD$ 且分别与 AB,CD 交于点 M,N，$EF\parallel AB$ 且分别与 DA,BC 交于点 E,F. 求证：ME,FN,BD 三线共点.
2. 在$\triangle OAB$ 中，$\angle AOB$ 为锐角，从 AB 上任一点 M 作 $MP\perp OA$ 于 P，$MQ\perp OB$ 于 Q，点 H 是$\triangle OPQ$ 的垂心，求当点 M 在线段 AB 上移动时，点 H 的轨迹. （IMO－7 试题）
3. 在正$\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上有内分点 D,E,F 将边分成 $3:(n-3)(n>6)$，线段 AD,BE,CF 相交所成的$\triangle PQR$（BE 交 AD 于 P，交 FC 于 Q）是$\triangle ABC$ 的面积的$\frac{4}{49}$

时，求 n 的值. （1992年日本奥林匹克预选题）

4. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，点 D 在 AC 上，点 E 在 BD 上，AE 的延长线交 BC 于 F. 若 $BE:ED=2AC:DC$，则$\angle ADB=\angle FDC$.

5. 已知点 E,D_1,D_2 在$\triangle ABC(AB>AC)$的边 BC 上，$\angle BAD_1=\angle CAD_2$，$EF_1/\!/AD_1$ 交 AB 于 F_1，又与 CA 的延长线交于 C_1，$EF_2/\!/AD_2$ 交 AB 于 F_2，又与 CA 的延长线交于 G_2. 求证：$\frac{BE^2}{CE^2}=\frac{BF_1\cdot BF_2}{CG_1\cdot CG_2}$. （《数学通报》问题1353题）

6. 圆外切四边形 $ABCD$ 中，AB,BC,CD,DA 边上的切点分别为 P,Q,R,S. AD 与 BC 的延长线交于点 E，AB 与 DC 延长线相交于点 F. 求证：(Ⅰ)AC,BD,PR,QS 四线共点；(Ⅱ)AC,EF,PQ,RS 四线共点；(Ⅲ)BD,EF,PS,QR 四线共点(假定 $BD\neq EF$).

7. 若凸四边形的对角线 AC 与 BD 互相垂直，且相交于 E，过 E 点分别作边 AB,BC,CD,DA 的垂线，垂足依次为 P,Q,R,S，并分别交 CD,DA,AB,BC 边于 P',Q',R',S'，再顺次连接 $P'Q',Q'R'.R'S',S'P'$，则 $R'S'/\!/P'Q'/\!/AC$；$R'Q'/\!/P'S'/\!/BD$.

（IMO-22试题的推广）

8. 面积为1的$\triangle ABC$的边 AB,AC 上分别有点 D,E，线段 BE,CD 相交于点 P. 点 D,E 分别在 AB,AC 上移动，但满足四边形 $BCED$ 的面积是$\triangle PBC$面积的两倍这一条件，求$\triangle PDE$面积的最大值. （1992年日本奥林匹克题）

9. $ABCD$ 是边长为2的正方形，E 为 AB 的中点，F 是 BC 的中点，AF 和 DE 相交于 I，BD 和 AF 相交于 H. 求四边形 $BEIH$ 的面积.

10. P 是凸四边形 $ABCD$ 所在平面上一点，$\angle APB,\angle BPC,\angle CPD,\angle DPA$ 的平分线分别交 AB,BC,CD,DA 于点 K,L,M,N. (Ⅰ)寻找一点 P，使 $KLMN$ 是平行四边形；(Ⅱ)求所有这样的 P 点的轨迹. （1995年世界城市际联赛题）

11. $\triangle ABC$中，$AB>AC$，AD 为内角平分线，点 E 在$\triangle ABC$的内部，且 $EC\perp AD$，$ED/\!/AC$，求证：射线 AE 平分 BC 边. （《数学教学》问题536题）

12. 设$\triangle A_1A_2A_3$为非等腰三角形，内心为 I，$C_i(i=1,2,3)$为过 I 与 A_iA_{i+1} 和 A_iA_{i+2} 相切的小圆(增加的下标作模3同余)，$B_i(i=1,2,3)$为圆 C_{i+1} 和 C_{i+2} 的另一交点. 证明：$\triangle A_1B_1I$，$\triangle A_2B_2I$，$\triangle A_3B_3I$ 的外心共线. （IMO-38预选题）

第二章 塞瓦定理及应用

【基础知识】

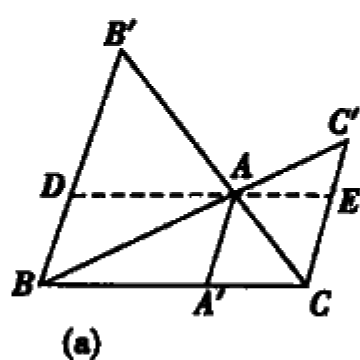
塞瓦定理 设 A', B', C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 或其延长线上的点,若 AA', BB', CC' 三线平行或共点,则 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$. ①

证明 如图 2-1(b)、(c),若 AA', BB', CC' 交于一点 P,则过 A 作 BC 的平行线,分别交 BB', CC' 的延长线于 D, E,得 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AD}$, $\frac{AC'}{C'B}=\frac{EA}{BC}$.

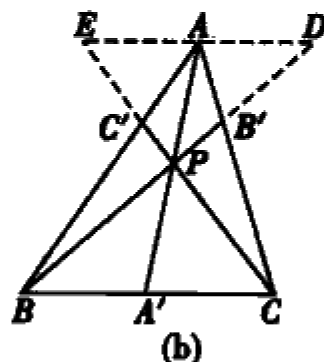
又由 $\frac{BA'}{AD}=\frac{A'P}{PA}=\frac{A'C}{EA}$,有 $\frac{BA'}{A'C}=\frac{AD}{EA}$.

从而 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{AD}{EA}\cdot\frac{BC}{AD}\cdot\frac{EA}{BC}=1$.

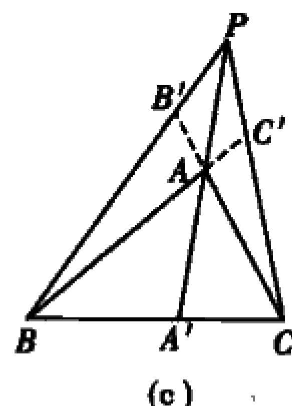
若 AA', BB', CC' 三线平行,可类似证明(略).



(a)



(b)



(c)

图 2-1

注 (1)对于图 2-1(b)、(c)也有如下面积证法:

由 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCA}}\cdot\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle PAB}}\cdot\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle PBC}}=1$,即证.

(2)点 P 常称为塞瓦点.

塞瓦定理的逆定理 设 A', B', C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 或其延长线上的点,若

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1, \quad ②$$

则 AA', BB', CC' 三直线共点或三直线互相平行.

证明 若 AA' 与 BB' 交于点 P,设 CP 与 AB 的交点为 C_1,则由塞瓦定理,有 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$.又已知有 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$,由此得 $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$,即 $\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB}$,亦即 $AC_1=AC'$,故 C_1 与 C' 重合,从而 AA', BB', CC' 三线共点.

若 $AA' /\!/ BB'$,则 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB}{BA'}$.代入已知条件,有 $\frac{AC'}{C'B}=\frac{A'C}{CB}$,由此知 $CC' /\!/ AA'$,故 $AA' /\!/ BB' /\!/ CC'$.

上述两定理可合写为:设 A', B', C' 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC, CA, AB 所在直线上的点,则三直线 AA', BB', CC' 平行或共点的充要条件是 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$. ③

角元形式的塞瓦定理 设 A', B', C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 所在直线上的点,则三直线 AA', BB', CC' 平行或共点的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1.$$

证明 由 $\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAA'}{AC\cdot\sin\angle A'AC}$, $\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC\cdot\sin\angle CBB'}{AB\cdot\sin\angle B'BA}$, $\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC\cdot\sin\angle ACC'}{BC\cdot\sin\angle C'CB}$,三式相乘,再运用塞瓦定理及其逆定理,知结论成立.

注 在上述各定理中,若采用有向线段或有向角,则①、②、③式的右端仍为 1.特别要注意的是三边所在直线上的点或者两点在边的延长线上,或者没有点在边的延长线上.③式中的角也可按①式的对应线段记忆.

推论 设 A_1, B_1, C_1 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆三段弧 $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ 上的点,则 AA_1, BB_1, CC_1 共点的充要条件是

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

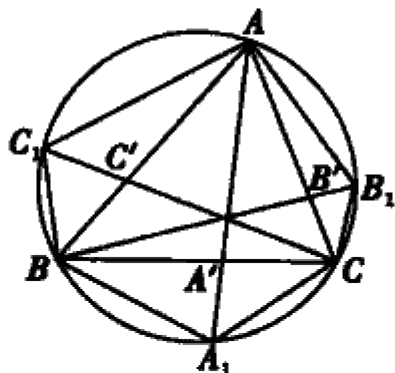


图 2-2

证明 如图 2-2,设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R, AA_1 交 BC 于 A', BB_1 交 CA 于 B', CC_1 交 AB 于 C'.由 A, C_1, B, A_1, C, B_1 六点共圆及正弦定理,有 $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{2R\cdot\sin\angle BAA_1}{2R\cdot\sin\angle A_1AC}=\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}$.

同理, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}$, $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}$.

三式相乘,并应用角元形式的塞瓦定理即证.

为了使读者熟练地应用塞瓦定理,针对图 2-3 中的点 A、B、C、D、E、F,将其作为

塞瓦点，我们写出如下式子：

对△ACE 及点 D 有 $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$，

对△CDE 及点 A 有 $\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EG}{GC}=1$，

对△ADE 及点 C 有 $\frac{DG}{GA}\cdot\frac{AF}{FE}\cdot\frac{EB}{BD}=1$，

对△ABD 及点 F 有 $\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BE}{ED}\cdot\frac{DH}{HA}=1$，

对△ACD 及点 E 有 $\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CB}{BA}=1$，

对△ADF 及点 B 有 $\frac{AH}{HD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FE}{EA}=1$，

对△ABF 及点 D 有 $\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FH}{HB}=1$.

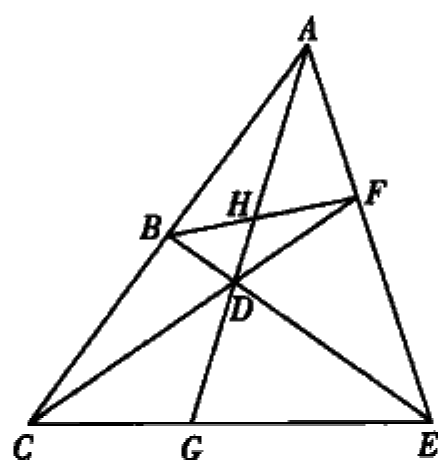


图 2－3

【典型例题与基本方法】

1. 恰当地选择三角形及所在平面上的一点，是应用塞瓦定理的关键

例 1 四边形两组对边延长分别相交，且交点的连线与四边形的一条对角线平行．证明：另一条对角线的延长线平分对边交点连线的线段． （1978 年全国高中竞赛题）

证明 如图 2－4，四边形 $ABCD$ 的两组对边延长分别交于 E，F，对角线 $BD /\!/ EF$，AC 的延长线交 EF 于 G.

对△AEF 及点 C，应用塞瓦定理，有

$\frac{EG}{GF}\cdot\frac{FD}{DA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$.

由 $BD /\!/ EF$，有 $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{DF}$，代入上式，

得 $\frac{EG}{GF}=1$，即 $EG=GF$．命题获证．

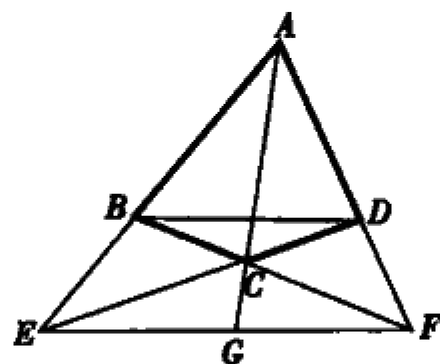


图 2－4

例 2 如图 2－5，锐角△ABC 中，AD 是 BC 边上的高，H 是线段 AD 内任一点，BH 和 CH 的延长线分别交 AC，AB 于 E，F．求证：$\angle EDH=\angle FDH$.

（1994 年加拿大奥林匹克试题）

证法 1 对△ABC 及点 H，应用塞瓦定理，有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. ①

过 A 作 $PQ /\!/ BC$，延长 DF，DE 分别交 PQ 于 P，Q，则 $DA\perp PQ$，且△APF∽△BDF，△AQE∽△CDE，从而

$$PA=\frac{AF}{FB}\cdot BD,AQ=\frac{EA}{CE}\cdot DC.$$

而由①，有$\frac{AF}{FB}\cdot BD=\frac{EA}{CE}\cdot DC$，故 $PA=AQ$.

由此知 AD 为等腰$\triangle APQ$ 底边 PQ 上的高，故$\angle EDH=\angle FDH$.

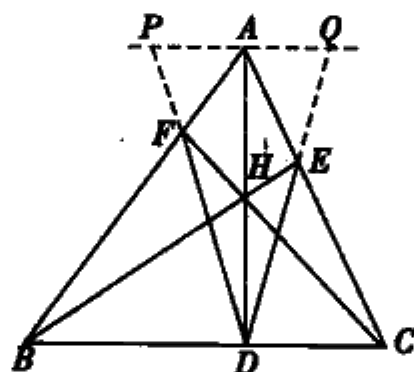


图 2-5

证法 2 对$\triangle ABC$ 及点 H 应用塞瓦定理，有

$$1=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle DAF}}{S_{\triangle DFB}}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle DEA}}$$

$$=\frac{AD\cdot\sin\angle ADF}{BD\cdot\sin\angle FDB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{DC\cdot\sin\angle EDC}{AD\cdot\sin\angle ADE}=\tan\angle ADF\cdot\cot\angle ADE.$$

即 $\tan\angle ADE=\tan\angle ADF$，由锐角性质知$\angle EDA=\angle FDA$.类似地，对$\triangle ABE$ 及截线 FHC 或对$\triangle AFC$ 及截线 BHE 应用梅涅劳斯定理也可证得有$\angle EDA=\angle FDA$.

注 将此例中的平角$\angle BDC$ 变为钝角，则有如下：

例 3 如图 2-6，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分$\angle BAD$.在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G.求证：$\angle GAC=\angle EAC$.

（1999 年全国高中联赛题）

证明 连 BD 交 AC 于 H，对$\triangle BCD$ 及点 F，应用塞瓦定理，有

$$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BH}{HD}\cdot\frac{DE}{EC}=1.$$

AH 平分$\angle BAD$，由角平分线性质，可得

$\frac{BH}{HD}=\frac{AB}{AD}$，故$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$.

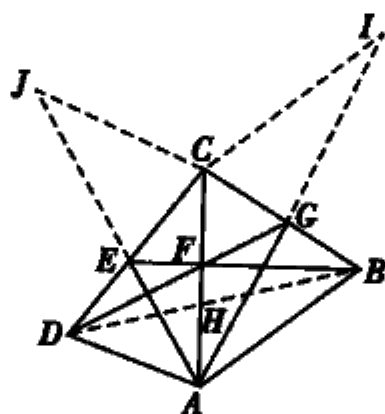


图 2-6

过点 C 作 AB 的平行线交 AG 的延长线于 I，过点 C 作 AD 的平行线交 AE 的延长线于 J，则

$\frac{CG}{GB}=\frac{CI}{AB},\frac{DE}{EC}=\frac{AD}{CJ}$.所以$\frac{CI}{AB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AD}{CJ}=1$.

从而，$CI=CJ$.

又 $CI/\!/AB$，$CJ/\!/AD$，有$\angle ACI=180°-\angle BAC=180°-\angle DAC=\angle ACJ$.

因此，$\triangle ACI\cong\triangle ACJ$，即有$\angle IAC=\angle JAC$.

故 $\angle GAC=\angle EAC$.

注 由此例还可变出一些题目，参见练习题第 4、5 及 19 题.

例 4 如图 2-7，BE 是$\triangle ABC$ 的中线，G 在 BE 上，分别延长 AG，CG 交 BC，AB 于 D，F，过 D 作 $DN/\!/CG$ 交 BG 于 N，$\triangle DGL$ 及$\triangle FGM$ 为正三角形.求证：$\triangle LMN$ 为正三

角形.

证明 连 NF,对$\triangle ABC$及点G应用塞瓦定理,有

$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.而 $AE=CE$,则$\frac{AF}{FB}=\frac{DC}{BD}$.

由 $DN/\!/CG$,有$\frac{CD}{BD}=\frac{NG}{BN}$.

于是,有$\frac{AF}{FB}=\frac{NG}{BN}$,从而 $FN/\!/AD$,即知四边形 $DNFG$ 为平行四边形,有$\angle GDN=\angle GFN$.

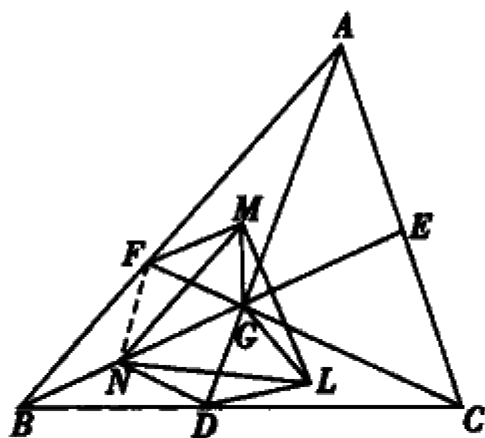


图 2-7

又$\angle GDL=\angle GFM=60°$,则$\angle LDN=\angle NFM$.

而 $DN=GF=FM$,$DL=DG=NF$,知$\triangle LDN\cong\triangle NFM$,有 $LN=MN$,$\angle DNL=\angle NMF$.于是

$$\begin{aligned}\angle MNL&=\angle DNF-(\angle DNL+\angle MNF)=\angle DNF-(\angle NMF+\angle MNF)\\&=(180°-\angle NFG)-(180°-\angle NFM)=\angle NFM-\angle NFG\\&=\angle MFG=60°.\end{aligned}$$

故$\triangle LMN$为正三角形.

例5 如图 2-8,在一个$\triangle ABC$中,$\angle C=2\angle B$,P为$\triangle ABC$内满足$AP=AC$及$PB=PC$的一点.求证:AP是$\angle A$的三等分线. (1994 年香港代表队 IMO 选拔赛题)

证明 用 B 表示$\angle ABC$的度量,令$\angle PCB=\theta$,则$\angle PBC=\theta$,$\angle ABP=B-\theta$,$\angle ACP=2B-\theta$,$\angle CAP=\pi-2(2B-\theta)$(其中注意 $AP=AC$),$\angle PAB=\angle A-\angle CAP=(\pi-B-C)-[\pi-2(2B-\theta)]=(\pi-3B)-(\pi-4B+2\theta)=B-2\theta$.

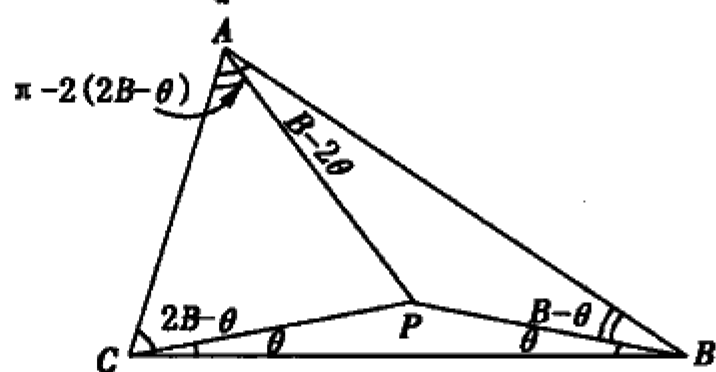


图 2-8

对$\triangle ABC$及点P,应用角元形式的塞瓦定理,有

$$\frac{\sin[\pi-2(2B-\theta)]}{\sin(B-2\theta)}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(2B-\theta)}\cdot\frac{\sin(B-\theta)}{\sin\theta}=1.$$

亦即 $$\frac{2\sin(2B-\theta)\cdot\cos(2B-\theta)\cdot\sin(B-\theta)}{\sin(B-2\theta)\cdot\sin(2B-\theta)}=1.$$

$\therefore\quad \sin(B-2\theta)=2\sin(B-\theta)\cdot\cos(2B-\theta)=\sin(3B-2\theta)-\sin B$,

$\therefore\quad \sin B=\sin(3B-2\theta)-\sin(B-2\theta)=2\cos(2B-2\theta)\cdot\sin B$.

而 $\sin B\neq0$,则 $\cos2(B-\theta)=\frac{1}{2}$.

因 $0<B-\theta<B<\frac{1}{3}(B+C)<\frac{\pi}{3}$,则 $2(B-\theta)\in(0,\frac{2\pi}{3})$.

$\therefore\quad 2(B-\theta)=\frac{\pi}{3}$,即 $B-\theta=\frac{\pi}{6}$.

从而$\angle CAP=\pi-2(2B-\theta)=\pi-4(B-\theta)-2\theta$

$$=\frac{\pi}{3}-2\theta=2(\frac{\pi}{6}-\theta)=2[(B-\theta)-\theta]$$

$$=2(B-2\theta)=2\angle PAB.$$

故 $\angle PAB=\frac{1}{3}\angle A$,即 AP 是$\angle A$ 的三等分线.

2. 注意塞瓦定理逆定理的应用以及与梅涅劳斯定理的配合应用

例6 如图2-9,在$\triangle ABC$ 中,D,E 分别是BC,CA 上的点,且 $BD:DC=m:1$,$CE:EA=n:1$,AD 与 BE 交于 F,则$\triangle ABF$ 的面积是$\triangle ABC$ 的面积的多少倍?

(1984年上海市中学生竞赛题)

解 连 CF 并延长交 AB 于 G,对$\triangle ABC$ 及点 F,应用塞瓦定理,有$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AG}{GB}\cdot m\cdot n=1$.

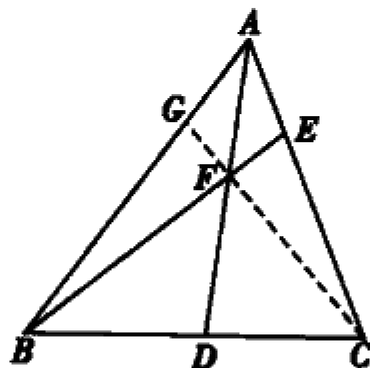


图2-9

$\therefore\quad \frac{AG}{GB}=\frac{1}{m\cdot n}$,即$\frac{AB}{BG}=\frac{mn+1}{mn}$.

对$\triangle AGC$ 及截线 BFE,应用梅涅劳斯定理,有

$\frac{AB}{BG}\cdot\frac{GF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{mn+1}{mn}\cdot\frac{GF}{FC}\cdot n=1$,$\therefore\quad \frac{GF}{FC}=\frac{m}{mn+1}$.

故 $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{GF}{GC}=\frac{GF}{FC+GF}=\frac{m}{mn+m+1}$为所求.

例7 如图2-10,在$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,G 为 AB 上给定的一点(G 不是线段 AB 的中点).设 D 为直线 GC 上与 C,G 都不相同的任意一点,并且直线 AD,BC 交于 E,直线 BD,AC 交于 F,直线 EF,AB 交于 H.试证明交点 H 与 D 在直线 CG 上的位置无关.

(1990年苏州市高中竞赛题)

证明 设 G 分线段AB 为定比λ_1,H 分线段AB 为定比λ_2.下证 λ_2 由 λ_1 确定,即当 A,B 给定后,点 H 的位置由点 G 唯一确定.

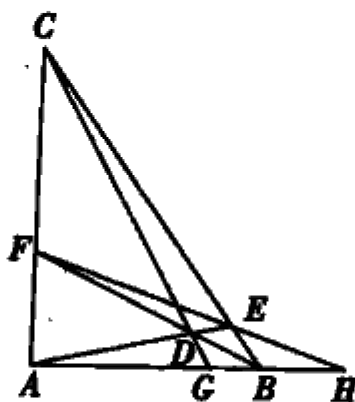


图2-10

在$\triangle ABC$ 中,由 AE,BF,CG 交于一点 D,应用塞瓦定理,有

$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$,即 $\lambda_1\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$.

对$\triangle ABC$ 及截线 EFH,应用梅涅劳斯定理,得

$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$,即 $\lambda_2\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=-1$.

上述两式相加,得$(\lambda_1+\lambda_2)\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CF}{FA}=0$.

从而$\lambda_1+\lambda_2=0$,即$\lambda_2=-\lambda_1$,故λ_2由λ_1唯一确定.

因此,点H与D在直线CG上的位置无关.

例8 如图2-11,设P为$\triangle ABC$内任一点,在形内作射线AL,BM,CN,使得$\angle CAL=\angle PAB$,$\angle MBC=\angle PBA$,$\angle NCA=\angle BCP$.求证:AL,BM,CN三线共点.

证法1 设AL交BC于L,BM交CA于M,CN交AB于N,则由正弦定理有

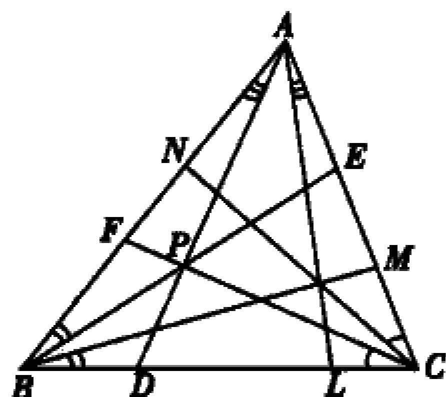


图2-11

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAL}{AC\cdot\sin\angle CAL}=\frac{AB\cdot\sin\angle PAC}{AC\cdot\sin\angle PAB}.$$

同理,$\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{BC\cdot\sin\angle PBA}{AB\cdot\sin\angle PBC}$,

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AC\cdot\sin\angle PCB}{BC\cdot\sin\angle PCA}.$$

将上述三式相乘,并应用正弦定理,有

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PA}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}=1.$$

由塞瓦定理的逆定理,知AL,BM,CN共点.

证法2 设AL交BC于L,BM交CA于M,CN交AB于N,直线AP交BC于D,直线BP交AC于E,直线CP交AB于F.

对$\triangle ABC$及点P,应用塞瓦定理,有 $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$. ①

在$\triangle ABL$和$\triangle ACL$中应用正弦定理,有

$$\frac{BL}{LC}=\frac{BL}{AL}\cdot\frac{AL}{LC}=\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle B}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle LAC}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}$$

$$=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle C}\cdot\frac{\sin\angle B}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{BD}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}.$$

同理,$\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{\sin^2\angle A}{\sin^2\angle C}$,$\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{BF}{FA}\cdot\dfrac{\sin^2\angle B}{\sin^2\angle A}$.

以上三式相乘,并注意到①式,有

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BF}{FA}=1.$$

由塞瓦定理的逆定理,知AL,BM,CN共点.

证法3 设AL交BC于L,BM交AC于M,CN交AB于N,直线AP交BC于D,直线BP交AC于E,直线交AB于F.对$\triangle ABC$及点P,应用角元形式的塞瓦定理,有

$$\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PAC}\cdot\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB}=1.$$

由题设$\angle PAB=\angle CAL$，$\angle PBA=\angle CBM$，$\angle PCB=\angle ACN$，则有$\angle BAL=\angle PAC$，$\angle ABM=\angle PBC$，$\angle BCN=\angle PCA$.

于是 $$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle CAL}\cdot\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle ABM}\cdot\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle BCN}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PAC}\cdot\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB}}=\frac{1}{1}=1,$$

对$\triangle ABC$，应用角元形式的塞瓦定理的逆定理，知AL，BM，CN三线共点.

例9 如图2-12，四边形$ABCD$内接于圆，其边AB与DC的延长线交于点P，AD与BC的延长线交于点Q，过点Q作该圆的两条切线，切点分别为E和F.求证：P，E，F三点共线.

（1997年CMO试题）

证明 连EF分别交AD，BC于M，N，设AC与BD交于K.要证P，E，F三点共线，只须证明P，K，M和P，N，K都三点共线，又只须证明AC，BD，PM三线共点.由塞瓦定理的逆定理知只须证明$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DM}{MA}=1$.

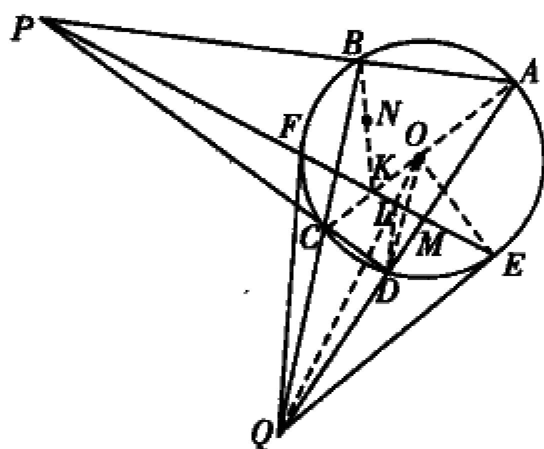


图2-12

又直线QCB截$\triangle PDA$，应用梅涅劳斯定理，有

$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1$，从而只须证明$\frac{DM}{AM}=\frac{DQ}{AQ}$.

设圆心为O，连QO交EF于L，连LD，LA，OD，OA，则由切割线定理和射影定理，有$QD\cdot QA=QE^2=QL\cdot QO$，即知$D$，$L$，$O$，$A$四点共圆，有$\angle QLD=\angle DAO=\angle ODA=\angle OLA$，此表明$QL$为$\triangle LAD$的内角$\angle ALD$的外角平分线.而$EF\perp OQ$，则$EL$平分$\angle ALD$.于是，

$\frac{DM}{AM}=\frac{DL}{AL}=\frac{DQ}{AQ}$，结论获证.

【解题思维策略分析】

1. 获得线段比例式的一种手段

例10 如图2-13，$\triangle ABC$中，D，E分别为AC和AB同方向延长线上的点，BD与CE相交于P，且$BD=CE$.若点P满足$\angle AEP-\angle ADP=k^2(\angle PED-\angle PDE)$（$k$为常数），则$AB=AC$.

证明 设AP交BC于Q，对$\triangle PBC$及其形外一点A，应用塞瓦定理，有$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CE}{EP}\cdot$

$\frac{PD}{DB}=1$.

而 $BD=CE$,则$\frac{PD}{PE}=\frac{QC}{QB}$.

不妨设 $QC\leqslant QB$,则 $PD\leqslant PE$,即有 $PC=CE-PE\leqslant BD-PD=PB$,于是 $S_{\triangle PBE}\geqslant S_{\triangle PCD}$,故 $S_{\triangle EBC}\geqslant S_{\triangle DBC}$.

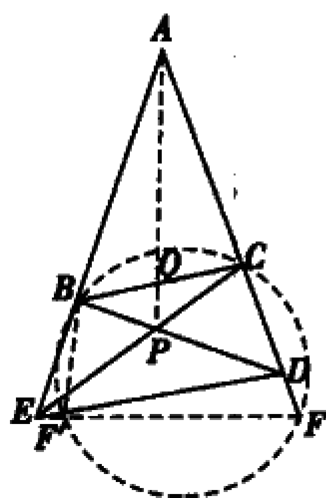


图 2-13

此时,点 E 到 BC 的距离不小于 D 到 BC 的距离,则过 E 作 $EF\parallel BC$ 必交 CD 延长线于一点,设为 F.又作$\triangle FBC$ 的外接圆$\odot O$ 交 EF 于另一点 F',则四边形 $BCFF'$ 为等腰梯形.当 $AB\geqslant AC$ 时,由 $\angle BF'F=\angle F'FC=\angle BCA\geqslant\angle ABC=\angle AEF$,知 F' 必在线段 EF 上.于是,$\angle BDC\geqslant\angle BFC\geqslant\angle BEC$(同弧上的圆外角小于同弧上的圆周角).

又由 $PD\leqslant PE$,知$\angle PED\leqslant\angle PDE$.故结论获证.

2. 转化线段比例式的一座桥梁

例 11 设 M 为$\triangle ABC$ 内任一点,AM,BM,CM 分别交 BC,CA,AB 于 D,E,F.求证:$\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=1$.

证明 如图 2-14,记$\frac{BD}{DC}=m,\frac{CE}{EA}=n,\frac{AF}{FB}=l$.对$\triangle ABC$ 及点 M,应用塞瓦定理,有$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=mnl=1$.

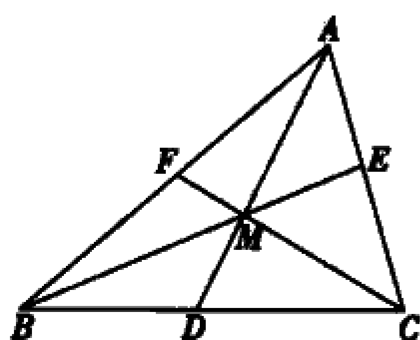


图 2-14

对$\triangle ADC$ 及截线 EMB,应用梅涅劳斯定理,有

$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AM}{MD}\cdot\frac{m}{1+m}\cdot n=1$,即

$\frac{AM}{MD}=\frac{1+m}{mn}=(1+m)l$.

由合比定理得$\frac{AD}{MD}=1+(1+m)l$,即$\frac{MD}{AD}=\frac{1}{1+l+ml}$.

同理,$\frac{ME}{BE}=\frac{1}{1+m+mn}=\frac{l}{l+ml+1}$,

$\frac{MF}{CF}=\frac{1}{1+n+nl}=\frac{ml}{ml+1+l}$.

三式相加,得$\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=1$.

例 12 如图 2-15,设 P 为$\triangle ABC$ 内任意一点,AP,BP,CP 的延长线交对边 BC,CA,AB 于点 D,E,F,EF 交 AD 于 Q.试证:$PQ\leqslant(3-2\sqrt{2})AD$.

证明 令$\frac{BD}{DC}=m,\frac{CE}{EA}=n,\frac{AF}{FB}=p$,对$\triangle ABC$ 及点 P,应用塞瓦定理,有$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot$

$\frac{AF}{FB}=mnp=1$.

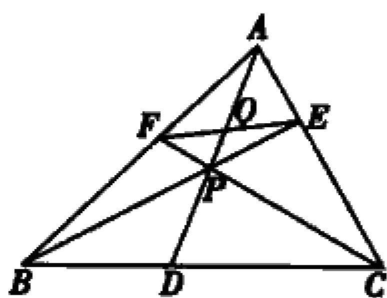


图 2-15

对△ADC 及截线 BPE，应用梅涅劳斯定理，有

$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BC}=1$. 注意到 $\frac{DB}{BC}=\frac{m}{m+1}$，则有

$n\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{m}{m+1}=1$，即 $\frac{AP}{PD}=\frac{m+1}{mn}$，故 $\frac{AP}{AD}=\frac{m+1}{mn+m+1}$.

又对直线 APD 截△BCE，有 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EP}{PB}=1$. 而 $\frac{CA}{AE}=n+1$，则 $\frac{BP}{EP}=mn+m$，故 $\frac{BE}{EP}=mn+m+1$.

又对△ABP 及截线 FQE，有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BE}{EP}\cdot\frac{PQ}{AQ}=1$，即有 $\frac{PQ}{AQ}=\frac{1}{p(mn+m+1)}=\frac{1}{mp+p+1}$，故 $\frac{PQ}{AP}=\frac{1}{mp+p+2}$.

从而
$$\frac{PQ}{AD}=\frac{PQ}{AP}\cdot\frac{AP}{AD}=\frac{1}{mp+p+2}\cdot\frac{m+1}{mn+m+1}$$
$$=\frac{1}{p(m+1)+2}\cdot\frac{1}{\frac{mn}{m+1}+1}=\frac{1}{1+\frac{2mn}{m+1}+p(m+1)+2}$$
$$\leqslant\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}.$$

于是，$PQ\leqslant(3-2\sqrt{2})AD$.

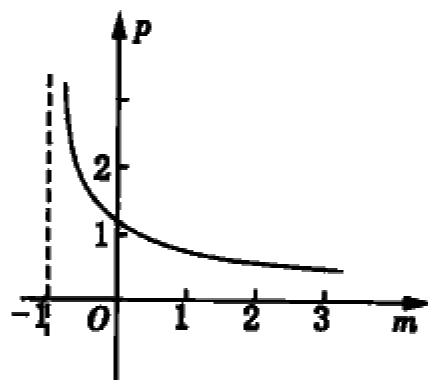


图 2-16

其中等号由 $\frac{2mn}{m+1}+p(m+1)\geqslant2\sqrt{\frac{2mn}{m+1}\cdot p(m+1)}=2\sqrt{2}$ 中等号成立时成立，即当且仅当 $\frac{2mn}{m+1}=p(m+1)$ 亦即当且仅当 $\frac{2mnp}{p(m+1)}=\frac{2}{p(m+1)}=p(m+1)$，亦即 $p(m+1)=\sqrt{2}$ 时取等号. 此时，m 和 p 之间成为如图 2-16 的双曲线的关系.

例 13 如图 2-17，已知直线的三个定点依次为 A、B、C，Γ 为过 A、C 且圆心不在 AC 上的圆，分别过 A、C 两点且与圆 Γ 相切的直线交于点 P，PB 与圆 Γ 交于点 Q. 证明：$\angle AQC$ 的平分线与 AC 的交点不依赖于圆 Γ 的选取. （IMO45 预选题）

证明 设 $\angle AQC$ 的平分线交 AC 于点 R，交圆 Γ 于点 S，其中 S 与 Q 是不同的两点.

由于△PAC 是等腰三角形，则有 $\frac{AB}{BC}=\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB}$.

同理，在$\triangle ASC$中，有$\frac{AR}{RC}=\frac{\sin\angle ASQ}{\sin\angle CSQ}$.

在$\triangle PAC$中，视Q为塞瓦点，由角元形式的塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB}\cdot\frac{\sin\angle QAC}{\sin\angle QAP}\cdot\frac{\sin\angle QCP}{\sin\angle QCA}=1.$$

注意到$\angle PAQ=\angle ASQ=\angle QCA$,

$\angle PCQ=\angle CSQ=\angle QAC$.

则 $\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB}=\frac{\sin\angle PAQ\cdot\sin\angle QCA}{\sin\angle QAC\cdot\sin\angle PCQ}=\frac{\sin^2\angle ASQ}{\sin^2\angle CSQ}$.

即 $\frac{AB}{BC}=\frac{AR^2}{RC^2}$，故结论获证.

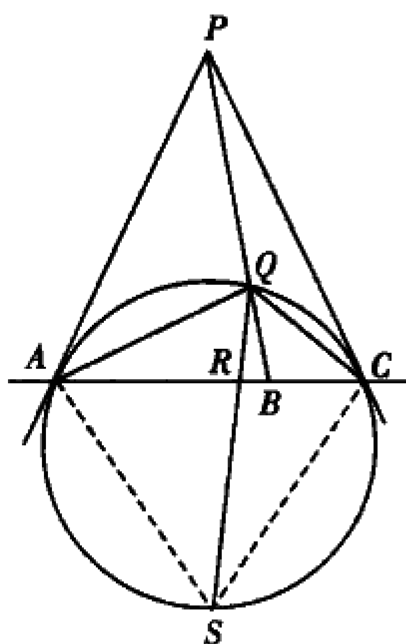


图2-17

3. 求解三角形格点问题的统一方法

如果三角形的三个角的度数都是10的整数倍，三角形内一点与三角形的三个顶点分别连结后，得到的所有的角也都具有这个性质，我们称这样的点为三角形的格点.

例14 如图2-18，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=40°$，$\angle ABC=60°$，D和E分别是AC和AB上的点，使得$\angle CBD=40°$，$\angle BCE=70°$，F是直线BD和CE的交点.证明：直线AF和直线BC垂直.　　　　(1998年加拿大奥林匹克试题)

证明 设$\angle BAF=\alpha$，则$\angle FAC=40°-\alpha$，对$\triangle ABC$及点F，应用角元形式的塞瓦定理，有

$$\frac{\sin10°}{\sin70°}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(40°-\alpha)}\cdot\frac{\sin40°}{\sin20°}=1.$$

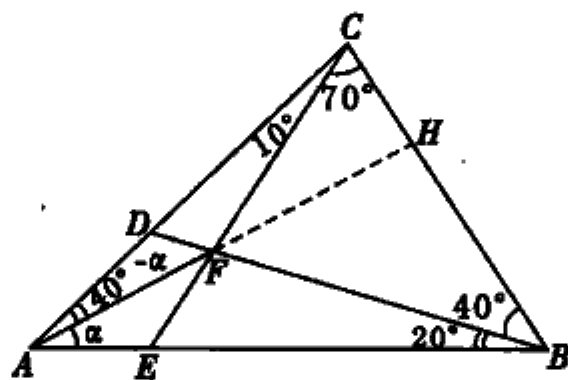


图2-18

从而 $\frac{\sin10°}{\cos20°}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(40°-\alpha)}\cdot\frac{2\sin20°\cdot\cos20°}{\sin20°}=1$，即有

$$\sin(40°-\alpha)=2\sin\alpha\cdot\sin10°=2\sin\alpha\cdot\cos80°$$
$$=\sin(\alpha+80°)+\sin(\alpha-80°).$$

$\therefore$ $\sin(\alpha-80°)=\sin(40°-\alpha)-\sin(\alpha+80°)=2\cos60°\cdot\sin(-20°-\alpha)=\sin(-20°-\alpha)$.

注意到$0<\alpha<40°$，知$-80°<-20°-\alpha$，$\alpha-80°<20°$，有

$\alpha-80°=-20°-\alpha$，故$\alpha=30°$.

延长AF交BC于H，则$\angle AHB=180°-\angle FAB-\angle ABH=180°-30°-60°=90°$.故$AF\perp BC$.

注 此题也可这样来解：由$\frac{\sin10°}{\sin70°}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(40°-\alpha)}\cdot\frac{\sin40°}{\sin20°}=1$，有

$\frac{\sin(40°-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin10°\cdot\sin40°}{\sin70°\cdot\sin20°}=2\sin10°=\frac{\sin10°}{\sin30°}=\frac{\sin(40°-30°)}{\sin30°}=\sin40°\cdot\cot30°-\cos40°$.

由于$\frac{\sin(40°-\alpha)}{\sin\alpha}=\sin40°\cdot\cot\alpha-\cos40°$作为 α 的函数在$(0°,180°)$上严格递减，所以$\angle BAF=\alpha=30°$.故$\angle ABC+\angle BAF=90°$.因此，$AF\perp BC$.

或者过点 A 作$AH\perp BC$ 于 H，则$\angle BAH=30°$，$\angle HAC=10°$。

关于$\triangle ABC$ 有$\frac{\sin\angle BAH}{\sin\angle HAC}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle ECB}\cdot\frac{\sin\angle CBD}{\sin\angle DBA}=\frac{\sin30°}{\sin10°}\cdot\frac{\sin10°}{\sin70°}\cdot\frac{\sin40°}{\sin20°}=1$.所以，$AH$、$BD$、$CE$ 三线共点.因此点 F 在AH 上，即 $AF\perp BC$.

例 15 如图 2－19，在$\triangle ABC$ 内取一点 M，使得$\angle MBA=30°$，$\angle MAB=10°$.设$\angle ACB=80°$，$AC=BC$，求$\angle AMC$.

（1983 年前南斯拉夫奥林匹克试题）

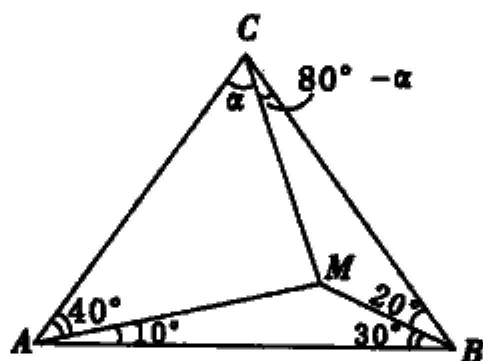


图 2－19

解 设$\angle ACM=\alpha$，则$\angle MCB=80°-\alpha$.由角元形式的塞瓦定理，有 $\frac{\sin\alpha}{\sin(80°-\alpha)}\cdot\frac{\sin10°}{\sin40°}\cdot\frac{\sin20°}{\sin30°}=1$.

从而 $\sin\alpha\cdot\sin10°=\sin(80°-\alpha)\cdot\cos20°$. ①

$\therefore$ $2\sin\alpha\cdot\cos80°=2\sin(80°-\alpha)\cdot\cos20°$,

$\therefore$ $\sin(\alpha+80°)+\sin(\alpha-80°)=\sin(100°-\alpha)+\sin(60°-\alpha)$,

$\therefore$ $\sin(\alpha-80°)-\sin(60°-\alpha)=\sin(100°-\alpha)-\sin(\alpha+80°)$

$=2\cos90°\cdot\sin(10°-\alpha)=0$.

于是 $\sin(\alpha-80°)=\sin(60°-\alpha)$.

注意到 $0<\alpha<80°$，知$-80°<\alpha<-80°,60°-\alpha<60°$.

$\therefore$ $\alpha-80°=60°-\alpha$，故 $\alpha=70°$.

所以 $\angle AMC=180°-\angle MAC-\angle ACM=180°-40°-70°=70°$为所求.

注 此题结果也可直接由①式有

$\begin{cases}\sin\alpha=\sin70°\\ \sin10°=\sin(80°-\alpha)\end{cases}$ 且$0<\alpha,80°-\alpha<80°$，求得 $\alpha=70°$.

另外，此题也可这样来解：由$\frac{\sin\alpha}{\sin(80°-\alpha)}\cdot\frac{\sin10°}{\sin40°}\cdot\frac{\sin20°}{\sin30°}=1$，有

$\frac{\sin(80°-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin10°\cdot\sin20°}{\sin40°\cdot\sin30°}=\frac{\sin10°}{\cos20°}=\frac{\sin(80°-70°)}{\sin70°}=\sin80°\cdot\cot70°-\cos80°$.

因为$\frac{\sin(80°-\alpha)}{\sin\alpha}=\sin80°\cdot\cot\alpha-\cos80°$作为 α 的函数在$(0°,180°)$上严格递减，所以$\angle ACM=\alpha=70°$.故$\angle AMC=180°-40°-70°=70°$.

或者由$\angle AMB=140^\circ$，令$\angle AMC=x$，则$\angle CMB=220^\circ-x$．对$\triangle MAB$和点C应用角元形式的塞瓦定理，有

$$1=\frac{\sin\angle AMC}{\sin\angle CMB}\cdot\frac{\sin\angle MBC}{\sin\angle CBA}\cdot\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle CAM}=\frac{\sin x}{\sin(220^\circ-x)}\cdot\frac{\sin20^\circ}{\sin50^\circ}\cdot\frac{\sin50^\circ}{\sin40^\circ}.$$

则$\dfrac{\sin(220^\circ-x)}{\sin x}=\dfrac{1}{2\cos20^\circ}=\dfrac{\sin(220^\circ-70^\circ)}{\sin70^\circ}=\sin220^\circ\cdot\cot70^\circ-\cos220^\circ$.

因为$\dfrac{\sin(220^\circ-x)}{\sin x}=\sin220^\circ\cdot\cot x-\cos220^\circ(\sin220^\circ<0)$作为$x$的函数在$(0^\circ,180^\circ)$上严格递增，所以$\angle AMC=x=70^\circ$.

例16 如图2－20，$\triangle ABC$具有下面性质：存在一个内部的点P，使得$\angle PAB=10^\circ$，$\angle PBA=20^\circ$，$\angle PCA=30^\circ$，$\angle PAC=40^\circ$．证明：$\triangle ABC$是等腰三角形．

（1996年美国第25届奥林匹克试题）

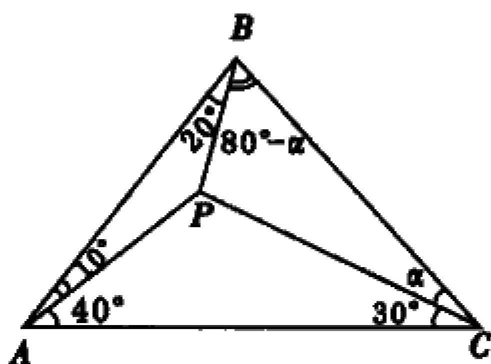


图2－20

证明 设$\angle BCP=\alpha$，则$\angle PBC=180^\circ-20^\circ-10^\circ-40^\circ-30^\circ-\alpha=80^\circ-\alpha$．由角元形式的塞瓦定理，有

$$\frac{\sin20^\circ}{\sin(80^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\sin40^\circ}{\sin10^\circ}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin30^\circ}=1.$$

即有 $$\frac{2\sin10^\circ\cdot\cos10^\circ}{\sin(80^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\sin40^\circ}{\sin10^\circ}\cdot\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}}=1.$$

$$\therefore\quad \sin(80^\circ-\alpha)=4\sin\alpha\cdot\sin40^\circ\cdot\cos10^\circ=4\sin\alpha\cdot\sin40^\circ\cdot\sin80^\circ$$
$$=\frac{4\sin\alpha\cdot\sin20^\circ\cdot\sin40^\circ\cdot\sin80^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{\sin60^\circ\cdot\sin\alpha}{\sin20^\circ},$$

$$\therefore\quad \sin(80^\circ-\alpha)\cdot\sin20^\circ=\sin60^\circ\cdot\sin\alpha.$$

从而 $\begin{cases}\sin(80^\circ-\alpha)=\sin60^\circ\\ \sin20^\circ=\sin\alpha\end{cases}$ 且$0<\alpha,80^\circ-\alpha<80^\circ$，

故$\alpha=20^\circ$，即$\angle ACB=50^\circ=\angle CAB$，从而$AB=BC$.

注 此题也可这样来求解：由$\dfrac{\sin20^\circ}{\sin(80^\circ-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin40^\circ}{\sin10^\circ}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin30^\circ}=1$，

有 $$\frac{\sin(80^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin20^\circ}{\sin10^\circ}\cdot\frac{\sin40^\circ}{\sin30^\circ}=4\cos10^\circ\cdot\sin40^\circ=\frac{4\sin20^\circ\cdot\sin40^\circ\cdot\sin80^\circ}{\sin20^\circ}$$
$$=\frac{\sin60^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{\sin(80^\circ-20^\circ)}{\sin20^\circ}=\sin80^\circ\cdot\cot20^\circ-\cos80^\circ.$$

因为$\dfrac{\sin(80^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}=\sin80^\circ\cdot\cot\alpha-\cos80^\circ$作为$\alpha$的函数在$(0^\circ,180^\circ)$上严格递减，所以$\angle BCP=\alpha=20^\circ$，即$\angle ACB=50^\circ=\angle CAB$．故$AB=BC$.

还可对△APC 及点 B 应用角元形式的塞瓦定理来求.

4. 论证直线共点的一种工具

例 17 如图 2－21,在四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$BC=DC$,过 AC,BD 的交点 O 引 EF,GH,其中 EF 交 AB,CD 于 E,F,GH 交 DA,BC 于 G,H.EH,GF 分别交 BD 于 P,Q,则 $OP=OQ$. (1990 年 CMO 选拔试题)

证明 在 AB,BC 上分别取 G',F',使 $AG'=AG$,$CF'=CF$,则由对称性可知有下列角相等,即若设 $\angle AOG=\alpha$,$\angle AOG'=\beta$,$\angle COH=\gamma$,$\angle G'OE=\angle 1$,$\angle EOB=\angle 2$,$\angle BOF'=\angle 3$,$\angle F'OH=\angle 4$,则 $\alpha=\beta$,又 $\alpha=\gamma$,故 $\beta=\gamma$.又 $\angle 1+\beta=\angle 4+\gamma$,故 $\angle 1=\angle 4$,$\angle 2=\angle 3$.

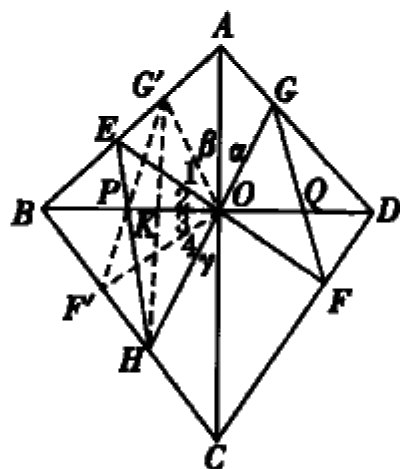


图 2－21

连 $G'H$ 交 BD 于 K,在△BHG' 中,

$$\frac{G'E}{EB}\cdot\frac{BF'}{F'H}\cdot\frac{HK}{KG'}=\frac{S_{\triangle OG'E}}{S_{\triangle OEB}}\cdot\frac{S_{\triangle OBF'}}{S_{\triangle OF'H}}\cdot\frac{S_{\triangle OHK}}{S_{\triangle OKG'}}$$

$$=\frac{OG'\cdot OE\cdot\sin\angle 1}{OE\cdot OB\cdot\sin\angle 2}\cdot\frac{OB\cdot OF'\cdot\sin\angle 3}{OF'\cdot OH\cdot\sin\angle 4}\cdot\frac{OH\cdot OK\cdot\sin(\angle 3+\angle 4)}{OK\cdot OG'\cdot\sin(\angle 1+\angle 2)}=1.$$

故由塞瓦定理的逆定理,知 $G'F'$,BO,HE 共点,即 $G'F'$ 过点 P.由对称性知,$OP=OQ$.

例 18 如图 2－22,在锐角△ABC 中,以 A 点引出的高 AD 为直径作圆交 AB,AC 于 M,N,再从 A 作 $l_A\perp MN$.同样可作出 l_B,l_C.试证:三直线 l_A,l_B,l_C 相交于一点. (第 29 届 IMO 预选题)

证明 设 l_A 与 MN,BC 分别相交于点 G,D',由 $\angle AMG=\angle ADN$,$\angle AGM=\angle AND=90°$,知 $\angle MAG=\angle NAD$,即 $\angle BAD'=\angle CAD$.

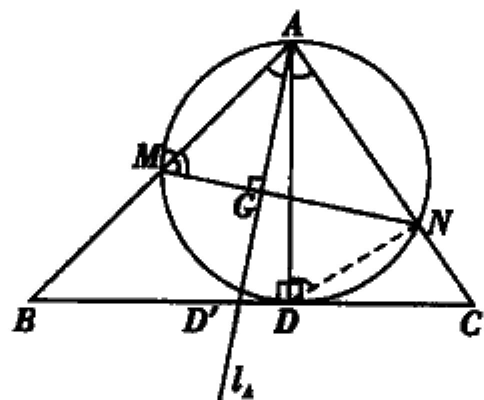


图 2－22

同理,设 CA,AB 边上的高 BE,CF 的垂足分别为 E,F,且 l_B,l_C 分别与 CA,AB 交于 E',F',则有

$\angle CBE'=\angle ABE$,$\angle ACF'=\angle BCF$.

由于△ABC 的三条高相交于垂心,此时应用角元形式的塞瓦定理,得

$$\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}\cdot\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}=1,$$

用等角代换上式,有

$$\frac{\sin\angle BAD'}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle ACF'}{\sin\angle F'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBE'}{\sin\angle E'BA}=1.$$

故由角元形式的塞瓦定理,知 AD',BE',CF' 三线共点,即 l_A,l_B,l_C 相交于一点.

例 19 如图 2－23，四边形 $ABCD$ 内接于圆，AB，DC 的延长线交于 E，AD，BC 的延长线交于 F，P 为圆上任一点，PE，PF 分别交圆于 R，S．若对角线 AC 与 BD 相交于 T，求证：R，T，S 三点共线．

证明 连 PD，AS，RC，BR，AP，SD．由 $\triangle EBR \backsim \triangle EPA$，$\triangle FDS \backsim \triangle FPA$，有 $\frac{BR}{PA}=\frac{EB}{EP}$，$\frac{PA}{DS}=\frac{FP}{FD}$，此两式相乘，有 $\frac{BR}{DS}=\frac{EB}{EP}\cdot\frac{FP}{FD}$． ①

又由 $\triangle ECR \backsim \triangle EPD$，$\triangle FPD \backsim \triangle FAS$，有

$\frac{CR}{PD}=\frac{EC}{EP}$，$\frac{PD}{AS}=\frac{FP}{FA}$，

此两式相乘，有 $\frac{CR}{AS}=\frac{EC}{EP}\cdot\frac{FP}{FA}$． ②

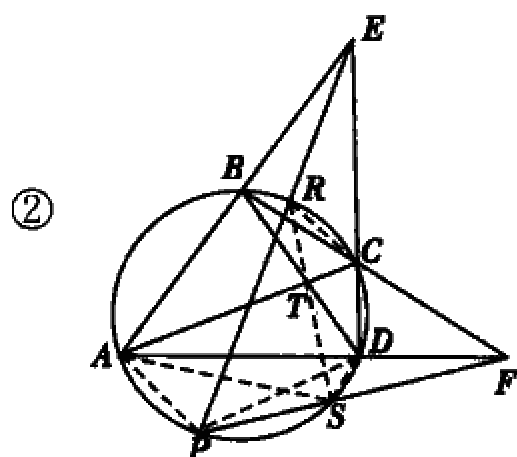


图 2－23

由①÷②，得 $\frac{BR}{DS}\cdot\frac{AS}{CR}=\frac{EB}{EC}\cdot\frac{FA}{FD}$．

上式两边同乘以 $\frac{DC}{AB}$，得 $\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CD}{DS}\cdot\frac{SA}{AB}=\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DC}{CE}$．

对 $\triangle EAD$ 及截线 BCF，应用梅涅劳斯定理，有

$\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DC}{CE}=1$．

于是 $\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CD}{DS}\cdot\frac{SA}{AB}=1$．

此时，应用角元形式的塞瓦定理的推论，知 BD，RS，AC 交于一点．从而 R，T，S 三点共直线．

【模拟实战】

习题 A

1．在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{3}$，$E$ 是 AC 中点．AD 与 BE 交于 O，CO 交 AB 于 F，求四边形 $BDOF$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积的比．

2．若通过 $\triangle ABC$ 各顶点的直线 AD，BE，CF 共点，并且它们在边 BC，CA，AB 所在直线上的截点 D，E，F 关于所在边中点的对称点分别为 D'，E'，F'，则直线 AD'，BE'，CF' 也共点．

3．一圆交 $\triangle ABC$ 的各边所在直线于两点，设 BC 边上的交点为 D，D'，CA 边上的交点为 E，E'，AB 边上的交点为 F，F'．若 AD，BE，CF 共点，则 AD'，BE'，CF' 也共点．

4. 试证:过三角形顶点且平分三角形周长的三条直线共点.

5. 将$\triangle ABC$各内角三等分,每两个角的相邻三等分线相交得$\triangle PQR$,又AX,BY,CZ分别平分$\angle BAC,\angle ABC,\angle ACB$且它们与$QR,RP,PQ$交于$X,Y,Z$.求证:$PX,QY,RZ$三线共点.

6. 将$\triangle ABC$的各外角三等分,每两个外角的相邻三等分线相交得$\triangle DEF$.又AX,BY,CZ分别平分$\angle BAC,\angle ABC,\angle ACB$且它们与$EF,FD,DE$交于$X,Y,Z$.求证:$DX,EY,FZ$三线共点.

7. $\odot O$是$\triangle ABC$的内切圆,BC,CA,AB上的切点各是D,E,F.射线DO交EF于A',同样可得B',C'.试证:直线AA',BB',CC'共点.

8. $\triangle ABC$在$\triangle A'B'C'$内部,且从A,B,C各向$B'C',C'A',A'B'$所作的垂线共点,则从A',B',C'各向BC,CA,AB所作的垂线也共点.

9. 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=\angle ACB=40°$,$P$为形内一点,$\angle PAC=20°$,$\angle PCB=30°$,求$\angle PBC$的度数.

10. 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle A=80°$,D为形内一点,且$\angle DAB=\angle DBA=10°$,求$\angle ACD$的度数. (《数学教学》问题432题)

11. 在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=30°$,$\angle ABC=70°$,M为形内一点,$\angle MAB=\angle MCA=20°$,求$\angle MBA$的度数. (《数学教学》问题491题)

12. 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=40°$,$\angle ACB=30°$,P为$\angle ABC$的平分线上一点,使$\angle PCB=10°$,BP交AC于M,CP交AB于N.求证:$PM=AN$. (《数学教学》问题531题)

13. 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=40°$,$\angle ACB=20°$,N为形内一点,$\angle NBC=30°$,$\angle NAB=20°$,求$\angle NCB$的度数. (《数学通报》问题1023题)

14. 在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=80°$,$\angle ABC=60°$,D为形内一点,且$\angle DAB=10°$,$\angle DBA=20°$,求$\angle ACD$的度数. (《数学通报》问题1142题)

15. 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=50°$,$\angle ACB=30°$,M为形内一点,$\angle MCB=20°$,$\angle MAC=40°$,求$\angle MBC$的度数. (《数学通报》问题1208题)

16. $\triangle ABC$中,$\angle ABC=70°$,$\angle ACB=30°$,P为形内一点,$\angle PBC=40°$,$\angle PCB=20°$.求证:$\dfrac{CA\cdot AB\cdot BP}{AP\cdot PC\cdot CB}=1$. (《数学通报》问题1306题)

17. 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=\angle ACB=40°$,$P,Q$为形内两点,$\angle PAB=\angle QAC=20°$,$\angle PCB=\angle QCA=10°$.求证:$B,P,Q$三点共线. (《数学通报》问题1243题)

18. $\triangle ABC$中,$\angle ABC=\angle ACB=50°$,$P,Q$为形内两点,$\angle PCA=\angle QBC=10°$,$\angle PAC=\angle QCB=20°$.求证:$BP=BQ$. (《数学通报》问题1281题)

19. 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle A=100°$,I为内心,D为AB上一点,满足$BD=BI$.试求$\angle BCD$的度数. (《数学通报》问题1073题)

20. A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 顺次分别在△ABC 的三边 BC,CA,AB 上,且 $BA_1=A_2C,CB_1=B_2A,AC_1=C_2B$,过 A_2,B_2,C_2 分别作 AA_1,BB_1,CC_1 的平行线 l_a,l_b,l_c.求证:l_a,l_b,l_c 三线共点的充要条件是 AA_1,BB_1,CC_1 三线共点.
21. 在△ABC 中,$AB=AC,AD\perp BC$ 于 D,过 D 任作两射线分别交 AB,AC 于点 E,F,交过点 A 的平行线于 G,H,且 $GH/\!/BC$.求证:AD,GF,HE 共点.
22. 在△ABC 中,过三边 BC,CA,AB 边中的中点 M,N,L 的三条等分三角形周长的直线 MS,NT,LU(S,T,U 在三角形三边上)分别交 LN,LM,MN 于 D,E,F.求证:MS,NT,LU 三线共点.
23. △ABC 的内切圆切 BC,CA,AB 于 D,E,F.P 是△ABC 内一点,PA 交内切圆于两点,其中靠近 A 的一点为 X,类似定义 Y,Z.试证:DX,EY,FZ 三线共点.
24. △ABC 在△$A'B'C'$ 内部,AB 的延长线分别交 $A'C',B'C'$ 于 P_5,P_1;AC 的延长线分别交 $B'A',B'C'$ 于 P_3,P_4;BC 的延长线分别交 $A'B',A'C'$ 于 P_6,P_2,且满足 $AP_1=AP_4=BP_2=BP_5=CP_3=CP_6=BP_1+CP_2+AP_3$.求证:$AA',BB',CC'$ 所在直线共点.　(《中学数学教学》擂台题(28))
25. 给定△ABC,延长边 BC 至 D,使 $CD=AC$.△ACD 的外接圆与以 BC 为直径的圆相交于 C 和 P.设 BP 与 CP 的延长线分别交 AC 和 AB 于 E,F.求证:E,F,D 共线.　(第15届伊朗奥林匹克题)
26. 在△ABC 的边上向外作三个正方形,A_1,B_1,C_1 是正方形中的边 BC,CA,AB 对边的中点.求证:直线 AA_1,BB_1,CC_1 共点.

习题 B

1. ⊙O 是△ABC 的内切圆,D,E,F,分别是 BC,CA,AB 上的切点,DD',EE',FF' 都是⊙O 的直径.求证:直线 AD',BE',CF' 共点.　(《数学通报》问题1396题)
2. 四边形 $ABCD$ 的内切圆分别与边 AB,BC,CD,DA 相切于 E,F,G,H.求证:AC,BD,HF,GE 四线共点.　(《数学通报》问题1370题)
3. 锐角△ABC 中,A 角的平分线与三角形的外接圆交于另一点 A_1,点 B_1,C_1 与此类似.直线 AA_1 与 B,C 两角的外角平分线交于 A_0,点 B_0,C_0 与此类似.求证:(Ⅰ)三角形 $A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的二倍;(Ⅱ)三角形 $A_0B_0C_0$ 的面积至少是三角形 ABC 面积的四倍.　(IMO-30试题)
4. 设 P 为△ABC 内一点,使∠BPA=∠CPA,G 是线段 AP 上的点,直线 BG,CG 分别交边 AC,AB 于 E,F.求证:∠BPF=∠CPE.
5. 在凸四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 平分∠BAD,E 是 CD 的延长线上的一点,BE 交 AC

于点 G，延长 DG 交 CB 的延长线于 F．试证：$\angle BAF=\angle DAE$．

6．在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=100°$，I 为内心，D 为 AB 上一点，满足 $BD=BI$．试求$\angle BCD$ 的度数．（《数学通报》问题1073题）

7．设$\triangle ABC$ 是等边三角形，P 是其内部一点，线段 AP，BP，CP 依次交三边 BC，CA，AB 于 A_1，B_1，C_1 三点．证明：$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\geqslant A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$．（IMO－37预选题）

8．在一条直线 l 的一侧画一个半圆 Γ，C，D，是 Γ 上两点，Γ 上过 C 和 D 的切线分别交 l 于 B 和 A，半圆的圆心在线段 BA 上，E 是线段 AC 和 BD 的交点，F 是 l 上的点，$EF\perp l$．求证：EF 平分$\angle CFD$．（IMO－35预选题）

9．设 A_1 是锐角$\triangle ABC$ 的内接正方形的中心，其中内接正方形的两个顶点在 BC 边上，一个顶点在 AB 边上，一个顶点在 AC 边上．同样定义两个顶点分别在 AC 边和 AB 边上的内接正方形的中心分别为 B_1，C_1．证明：AA_1，BB_1，CC_1 交于一点．

（IMO－42预选题）

10．以$\triangle ABC$ 的底边 BC 为直径作半圆，分别与 AB，AC 交于点 D，E，分别过点 D，E 作 BC 的垂线，垂足依次为 F，G，线段 DG 和 EF 交于点 M．求证：$AM\perp BC$．

（1996年国家队选拔考试题）

11．设 O，H 是锐角$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心和垂心．证明：存在 D，E，F 分别在线段 BC，CA，AB 上，使得 $OD+DH=OE+EH=OF+FH$，且此时 AD，BE，CF 三线交于一点．（IMO－41预选题）

12．已知 AB 是$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于 L，点 M 和 N 分别在线段 LB 和 LA 上，且 $LM:MB=LN:NA$，射线 CM，CN 交$\odot O$ 于 E，F．求证：AE，BF，OD 三线共点．

13．设 I 是$\triangle ABC$ 的内心，以 I 为圆心的一个圆分别交 BC 于 A_1，A_2，交 CA 于 B_1，B_2，交 AB 于 C_1，C_2．这六个点在圆上的顺序为 A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2．设 A_3，B_3，C_3 为弧$\overparen{A_1A_2}$，$\overparen{B_1B_2}$，$\overparen{C_1C_2}$的中点，直线 A_2A_3，B_1B_3 相交于 C_4，直线 B_2B_3，C_1C_3 相交于 A_4，直线 C_2C_3，A_1A_3 相交于 B_4．求证：直线 A_3A_4，B_3B_4，C_3C_4 三线共点．

14．在$\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上分别向形外作$\triangle ABE$ 和$\triangle ACF$，使$\triangle ABE\backsim\triangle ACF$，且$\angle ABE=\angle ACF=90°$．求证：连线 BF，CE 与边 BC 上的高 AH 三线共点．

15．过非等边三角形各顶点作其外接圆的切线，则各切线与其对边的交点共线．

16．在$\triangle ABC$ 内三点 D，E，F 满足$\angle BAE=\angle CAF$，$\angle ABD=\angle CBF$，则 AD，BE，CF 三线共点的充要条件是$\angle ACD=\angle BCE$．

17．在任意$\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 上各有点 M，N，L，而 Q 是$\triangle ABC$ 内部任一点，直线 AQ，BQ，CQ 分别交线段 NL，LM，MN 于 M_1，N_1，L_1．求证：直线 M_1M，N_1N，L_1L 共点的充分必要条件是 AM，BN，CL 共点，而与 Q 点的位置无关．

18. 设 P 是平面上$\triangle ABC$ 区域内任一点，AP，BP，CP 的延长线交$\triangle ABC$ 三边于 D，E，F．求证：在$\triangle ABC$ 区域内，存在一个以$\triangle DEF$ 的某两边为邻边的平行四边形．
19. 设凸四边形 $ABCD$ 的两组对边所在的直线，分别交于 E，F 两点，两对角线的交点为 P，过点 P 作 $PO\perp EF$ 于 O．求证：$\angle BOC=\angle AOD$．(2002 国家集训队选拔试题)
20. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$ 和$\angle ACB$ 均为锐角．D 是 BC 边上的内点，且 AD 平分$\angle BAC$，过点 D 作垂线 $DP\perp AB$ 于 P，$DQ\perp AC$ 于 Q，CP 与 BQ 相交于 K．求证：$AK\perp BC$．

第三章 托勒迷定理及应用

【基础知识】

托勒迷定理 圆内接四边形的两组对边乘积之和等于两对角线的乘积.

证明 如图 3-1,四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,在 BD 上取点 P,使$\angle PAB=\angle CAD$,则$\triangle ABP\backsim\triangle ACD$,于是

$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CD}\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BP$.

又$\triangle ABC\backsim\triangle APD$,有 $BC\cdot AD=AC\cdot PD$.

上述两乘积式相加,得

$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(BP+PD)=AC\cdot BD$. ①

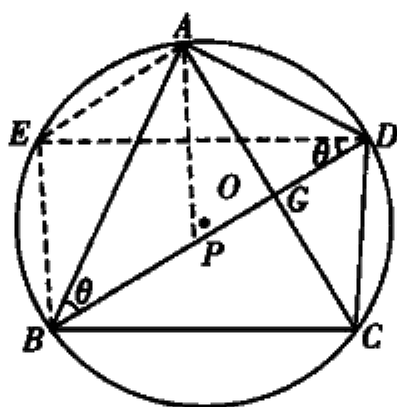


图 3-1

注 此定理有多种证法,例如也可这样证:作 $AE\parallel BD$ 交⊙O 于 E,连 EB,ED,则知 $BDAE$ 为等腰梯形,有 $EB=AD,ED=AB,\angle ABD=\angle BDE=\theta$,且$\angle EBC+\angle EDC=180°$,令$\angle BAC=\varphi$,$AC$ 与 BD 交于 G,则

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AGD=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin(\theta+\varphi)=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle EDC,$$

$$S_{EBCD}=S_{\triangle EBC}+S_{\triangle ECD}=\frac{1}{2}EB\cdot BC\cdot\sin\angle EBC+\frac{1}{2}ED\cdot DC\cdot\sin\angle EDC$$

$$=\frac{1}{2}(EB\cdot BC+ED\cdot DC)\cdot\sin\angle EDC=\frac{1}{2}(AD\cdot BC+AB\cdot DC)\cdot\sin\angle EDC.$$

易知 $S_{ABCD}=S_{EBCD}$,从而有 $AB\cdot DC+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

推论 1(三弦定理) 如果 A 是圆上任意一点,AB,AC,AD 是该圆上顺次的三条弦,则

$AC\cdot\sin\angle BAD=AB\cdot\sin\angle CAD+AD\cdot\sin\angle CAB$. ②

事实上,由①式,应用正弦定理将 BD,DC,BC 换掉即得②式.

推论 2(四角定理) 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,则 $\sin\angle ADC\cdot\sin\angle BAD=\sin\angle ABD\cdot\sin\angle BDC+\sin\angle ADB\cdot\sin\angle DBC$. ③

事实上,由①式,应用正弦定理将六条线段都换掉即得③式.

直线上的托勒迷定理(或欧拉定理) 若 A,B,C,D 为一直线上依次排列的四点,

则 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

注 由直线上的托勒迷定理有如下推论:若 A、B、C、D 是一条直线上顺次四点,点 P 是直线 AD 外一点,则

$\sin\angle APB\cdot\sin\angle CPD+\sin\angle APD\cdot\sin\angle BPC=\sin\angle APC\cdot\sin\angle BPD$.

事实上,如图 3-2,设点 P 到直线 AD 的距离为 h,

由 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$,有

$S_{\triangle PAB}\cdot S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAD}\cdot S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAC}\cdot S_{\triangle PBD}$,

用两边及夹角正弦形式的三角形面积表示上式后,两边同除以$\frac{1}{4}PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD$ 即得推论.

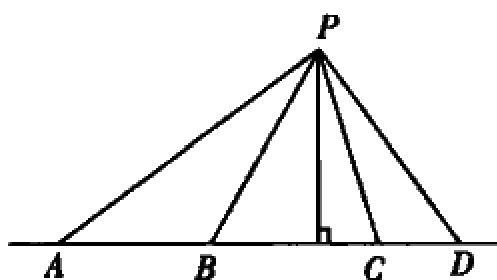


图 3-2

由上述推论也可证明圆内接四边形中的托勒迷定理.

证明 如图 3-3,在图上取一点 P,连 PA、PB、PC、PD,设 PB 交 AD 于 B',PC 交 AD 于 C'.

由正弦定理 $\sin\angle APB=\frac{AB}{2R}$,$\sin\angle CPD=\frac{CD}{2R}$,$\sin\angle APD=\frac{AD}{2R}$,$\sin\angle BPC=\frac{BC}{2R}$,$\sin\angle APC=\frac{AC}{2R}$,$\sin\angle BPD=\frac{BD}{2R}$,其中 R 为圆的半径.

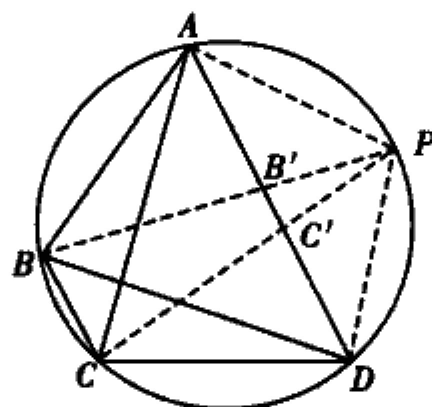


图 3-3

对 A、B'、C'、D 应用直线上的托勒迷定理的推论,有

$\sin\angle APB\cdot\sin\angle CPB+\sin\angle APD\cdot\sin\angle BPC=\sin\angle APB'\cdot\sin\angle C'PD+\sin\angle APD\cdot\sin\angle B'PC'=\sin\angle APC'\cdot\sin\angle B'PD=\sin\angle APC\cdot\sin\angle BPD$.

故 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

四边形中的托勒迷定理 设 $ABCD$ 为任意凸四边形,则 $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$,当且仅当 A,B,C,D 四点共圆时取等号.

证明 如图 3-4,取点 E 使 $\angle BAE=\angle CAD$,$\angle ABE=\angle ACD$,则 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$,即有$\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}$,且$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BE}$,即

$AB\cdot CD=AC\cdot BE$. ①

又$\angle DAE=\angle CAB$,有$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$,亦有

$AD\cdot BC=AC\cdot ED$. ②

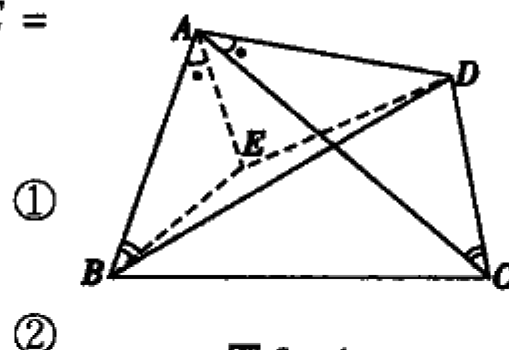


图 3-4

由①式与②式,注意到 $BE+ED\geqslant BD$,有

$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot(BE+ED)\geqslant AC\cdot BD$.

其中等号当且仅当 E 在 BD 上,即$\angle ABD=\angle ACD$ 时成立.此时 A,B,C,D 四点共圆.由此,即有

托勒迷定理的逆定理 在凸四边形 $ABCD$ 中,若 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$,则 A,B,C,D 四点共圆.

【典型例题与基本方法】

1. 恰当地作出或选择四边形,是应用托勒迷定理的关键

例 1 在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若角 A,B,C 的大小成等比数列,且 $b^2-a^2=ac$,则角 B 的弧度数等于多少? (1985 年全国高中联赛题)

解 如图 3-5,过点 C 作 $CD\parallel AB$ 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D,连 AD,则四边形 $ABCD$ 为等腰梯形.由托勒迷定理,有 $b^2=a^2+c\cdot CD$.

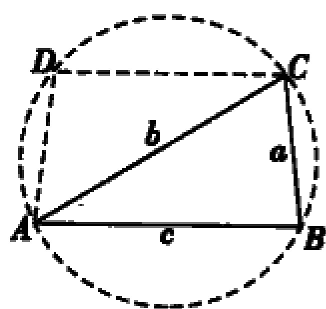


图 3-5

由已知有 $b^2=a^2+c\cdot a$,则 $CD=a$,从而

$AD=DC=CB$,即$\overset{\frown}{ADC}=2\overset{\frown}{BC}$,亦即$\angle B=2\angle BAC$.

又因为在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的大小成等比数列,则公比 $q=\frac{\angle B}{\angle A}=2$,从而$\angle A+\angle B+\angle C=\angle A+2\angle A+4\angle A=7\angle A=\pi$,故

$\angle A=\frac{\pi}{7}$,$\angle B=\frac{2\pi}{7}$为所求.

例 2 凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=60°$,$\angle BAD=\angle BCD=90°$,$AB=2$,$CD=1$,对角线 AC,BD 交于点 O.如图 3-6,求 $\sin\angle AOB$. (1996 年北京中学生竞赛题)

解 因$\angle BAD=\angle BCD=90°$,则 A,B,C,D 四点共圆.延长 BA,CD 交于 P,则$\angle ADP=\angle ABC=60°$.

设 $AD=x$,有 $AP=\sqrt{3}x$,$DP=2x$,由割线定理,有

$(2+\sqrt{3}x)\cdot\sqrt{3}x=2x(1+2x)$.求得 $AD=x=2\sqrt{3}-2$,

$BC=\frac{BP}{2}=4-\sqrt{3}$.

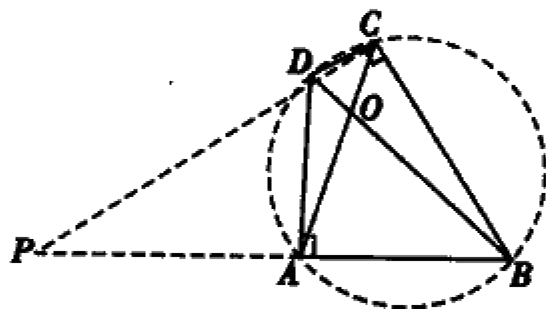


图 3-6

对 $ABCD$ 应用托勒迷定理,有

$BD\cdot AC=(4-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-2)+2\cdot 1=10\sqrt{3}-12$.

又 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$

$$=(2\sqrt{3}-2)+\frac{1}{2}(4-\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

从而,$\frac{1}{2}(10\sqrt{3}-12)\cdot\sin\angle AOB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.故 $\sin\angle AOB=\frac{15+6\sqrt{3}}{26}$.

例 3 如图 3-7,已知在$\triangle ABC$ 中,$AB>AC$,$\angle A$ 的一个外角的平分线交$\triangle ABC$

的外接圆于点 E,过 E 作 $EF\perp AB$,垂足为 F.求证:$2AF=AB-AC$.

(1989 年全国高中联赛题)

证明 在 FB 上取点 D,使 $FD=FA$,连 ED 并延长交圆于 G,连 AG,EC,则 $\angle ACE=\angle AGD$,$\angle ADG=180^\circ-\angle ADE=180^\circ-\angle EAH=\angle EAC$($H$ 在 CA 的延长线上),从而 $\triangle ADG\backsim\triangle EAC$,且 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AG}$.于是,注意 $BC=AG$,有

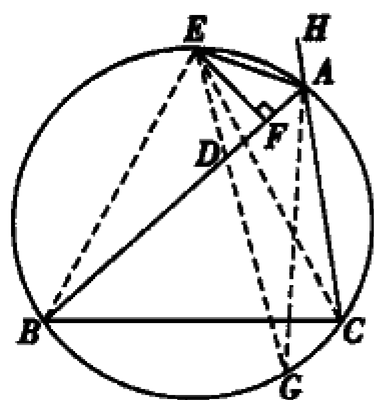


图 3-7

$$AD=\frac{AE\cdot BC}{EC},\text{故 }2AF=\frac{AE\cdot BC}{EC}.$$

连 EB,对四边形 $AEBC$ 应用托勒迷定理,有

$AB\cdot EC=AE\cdot BC+BE\cdot AC$,即 $AE\cdot BC=AB\cdot EC-BE\cdot AC$.

于是 $2AF=\dfrac{AB\cdot EC-BE\cdot AC}{EC}=AB-AC$.

其中 $EC=BE$ 可由 $\angle EAB=\angle EAH=\angle EBC$ 推得.

注 也可应用三弦定理证明.设 $\angle DAE=\angle EAB=\alpha$,则 $\angle FAC=180^\circ-\alpha$,$\angle BAC=180^\circ-2\alpha$.对 AB,AE,AC 应用三弦定理,得 $AB\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=AE\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)+AC\cdot\sin\alpha$,即 $AB-AC=\dfrac{AE\cdot\sin2\alpha}{\sin\alpha}=2AE\cdot\cos\alpha$.又在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中,$AE\cdot\cos\alpha=AF$,故 $2AF=AB-AC$.

例 4 如图 3-8,在锐角 $\triangle ABC$ 的 BC 边上有两点 E,F,满足 $\angle BAE=\angle CAF$,作 $FM\perp AB$ 于 M,$FN\perp AC$ 于 N,延长 AE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D.证明:四边形 $AMDN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等.

(2000 年全国高中联赛题)

证明 设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$,$\angle EAF=\beta$,有 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AF\cdot\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}AC\cdot AF\cdot\sin\alpha=\frac{AF}{4R}(AB\cdot CD+AC\cdot BD)$,其中 R 为外接圆半径.

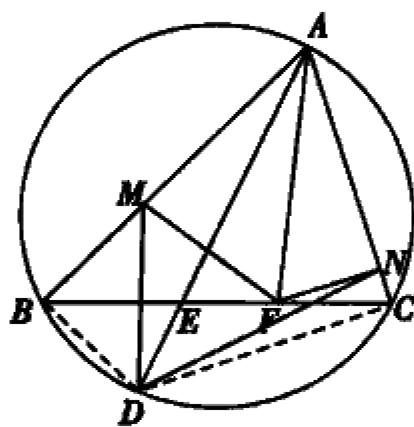


图 3-8

又
$$\begin{aligned}S_{\text{四边形}AMDN}&=\frac{1}{2}AM\cdot AD\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}AD\cdot AN\cdot\sin(\alpha+\beta)\\&=\frac{1}{2}AD[AF\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha+AF\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)]\\&=\frac{1}{2}AD\cdot AF\cdot\sin(2\alpha+\beta)=\frac{AF}{4R}AD\cdot BC.\end{aligned}$$

由托勒迷定理,有 $AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC$,

故 $S_{\text{四边形}AMDN}=S_{\triangle ABC}$.

例5 如图3-9,在$\triangle ABC$中,$\angle A=60°$,$AB>AC$,点O是外心,两条高BE,CF交于H点,点M,N分别在线段BH,HF上,且满足$BM=CN$.求$\frac{MH+NH}{OH}$的值.

(2002年全国高中联赛题)

解法1 连OB,OC,由三角形外心及垂心性质,知$\angle BOC=2\angle A=120°$,$\angle BHC=180°-\angle HBC-\angle HCB=180°-(90°-\angle C)-(90°-\angle B)=180°-\angle A=120°$,即$B$,$C$,$H$,$O$四点共圆.在此圆中对四边形$BCHO$应用托勒迷定理,有

$BO\cdot CH+OH\cdot BC=BH\cdot OC$.

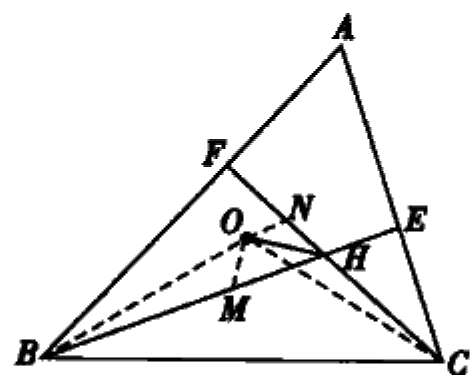


图3-9

设$\triangle ABC$的外接圆半径为R,则$BO=OC=R$,且由$\angle A=60°$,知$BC=\sqrt{3}R$,即有$R\cdot CH+OH\cdot\sqrt{3}R=BH\cdot R$,亦即 $BH-CH=\sqrt{3}OH$.

而$MH+NH=(BH-BM)+(CN-CH)=BH-CH$,

故 $\frac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$为所求.

解法2 同解法1,知B,C,H,O四点共圆,有$\angle OBH=\angle OCH$,而$BO=OC$,$BM=CN$,则$\triangle OBM\cong\triangle OCN$,从而$OM=ON$,$\angle BMO=\angle CNO$,由此知$O$,$M$,$H$,$N$四点共圆,且等腰$\triangle OMN$的顶角$\angle MON=\angle NHE=120°$,即知$\frac{MN}{OM}=\frac{\sin120°}{\sin30°}=\sqrt{3}$.

对四边形$OMHN$,应用托勒迷定理,有$MH\cdot ON+NH\cdot OM=OH\cdot MN$,故$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{MN}{OM}=\sqrt{3}$为所求.

2.注意托勒迷定理逆定理的应用和拓广的托勒迷定理或托勒迷定理推论的应用

例6 若有四个圆都与第五个圆内切,第一个与第二个圆的外公切线的长用l_{12}表示,其他前四个圆中的两两的外公切线也用同样的方法来标记,且前四个圆以顺时针的顺序排列,试证明依次以l_{12},l_{23},l_{34},l_{41}为边长,以l_{13},l_{24}为对角线所构成的凸四边形的四个顶点共圆.

(《中等数学》1999年第5期高中奥林匹克题)

证明 如图3-10,设前四个圆分别为$\odot O_1$,$\odot O_2$,$\odot O_3$,$\odot O_4$,第五个圆为$\odot O$,前四个圆与$\odot O$分别内切于A,B,C,D,则易知A,O_1,O三点共线.类似地,有B,O_2,O;C,O_3,O;D,O_4,O三点共线.

设五个圆的半径分别为r_1,r_2,r_3,r_4,R;$\angle AOB=\alpha$,$\angle BOC=\beta$,$\angle COD=\gamma$,$\angle DOA=\delta$;$OO_1=a$,$OO_2=b$,$OO_3=c$,$OO_4=d$,则$a=R-r_1$,$b=R-r_2$,$c=R-r_3$,$d=R-r_4$.

从而，$l_{12}^2 = O_1O_2^2 - (r_1 - r_2)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha - (a-b)^2 = 4ab\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$.故 $l_{12} = 2\sqrt{ab}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

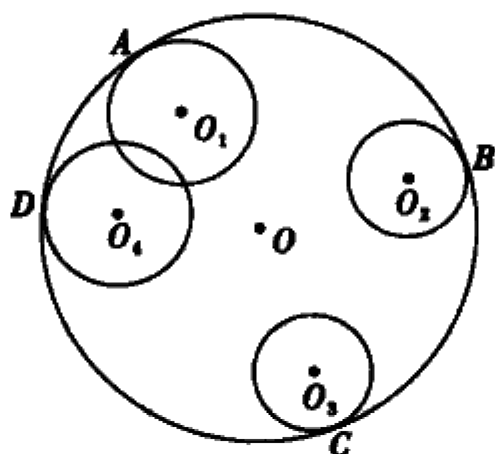


图 3－10

同理，可求得 $l_{23}, l_{34}, l_{41}, l_{13}, l_{24}$.

要证明以 $l_{12}, l_{23}, l_{34}, l_{41}$ 为边长，以 l_{13}, l_{24} 为对角线所构成的凸四边形的四个顶点共圆，只要证明 $l_{12}\cdot l_{34} + l_{23}\cdot l_{41} = l_{13}\cdot l_{24}$，化简后只要证明 $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$，①即 $\sin\angle ADB\cdot\sin\angle DBC + \sin\angle BDC\cdot\sin\angle ABD = \sin\angle ADC\cdot\sin\angle BAD$.这由托勒迷定理的推论 2 即证.

注　对于①也可由正弦定理 $AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$ 转换成 $AB\cdot CD + BC\cdot DA = AC\cdot BD$ 即证.此例是一个富有应用价值的问题.托勒迷定理是这个问题中四个圆均变为点(过该点线成了“点圆”的切线)的情形.

例 7　经过 $\angle XOY$ 的平分线上的一点 A，任作一直线与 OX 及 OY 分别相交于 P, Q.求证：$\frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ}$ 为定值.

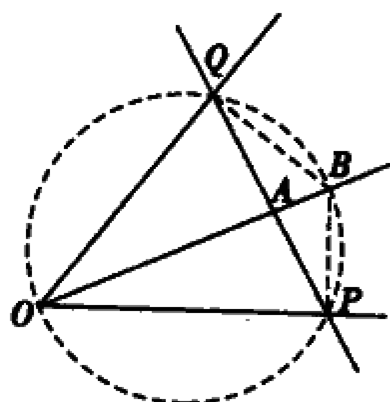


图 3－11

证明　如图 3－11，过 O, P, Q 三点作圆，交射线 OA 于 B.设 $\angle POA = \angle QOA = \alpha$，对四边形 $OPBQ$ 中的三条弦 OP, OB, OQ 应用托勒迷定理的推论 1，有

$$BO\cdot\sin2\alpha = OP\cdot\sin\alpha + OQ\cdot\sin\alpha.$$

即
$$OP + OQ = \frac{BO\cdot\sin2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2BO\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2BO\cdot\cos\alpha. \quad ①$$

连 BQ，由 $\triangle OPA \backsim \triangle OBQ$，有 $OP\cdot OQ = OA\cdot OB$.

由①式除以上式，得 $\frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ} = \frac{2\cos\alpha}{OA}$(定值).

注　类似于此例，应用托勒迷定理的推论 1，也可求解如下问题：过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 作一圆分别与 AB, AC, AD 相交于 E, F, G，则有 $AE\cdot AB + AG\cdot AD = AF\cdot AC$.

事实上，若设 $\angle BAC = \alpha$，$\angle CAD = \beta$，则有 $AE\cdot\sin\beta + AG\cdot\sin\alpha = AF\cdot\sin(\alpha+\beta)$.对此式两边同乘 $AB\cdot AC\cdot AD$，利用三角形的面积公式有 $AE\cdot AB\cdot S_{\triangle ADC} + AG\cdot AD\cdot S_{\triangle ABC} = AF\cdot AC\cdot S_{\triangle ABD}$.

而在 $\square ABCD$ 中，有 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}$，由此即证.

例 8　设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点，且满足条件：$DA\cdot DB\cdot AB + DB\cdot DC\cdot BC +$

$DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$.试确定 D 点的几何位置,并证明你的结论.

(1998 年 CMO 试题)

此题我们改证比其更强的命题如下:

设 D 为锐角$\triangle ABC$ 内部一点,求证:$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant AB \cdot BC \cdot CA$,并且等号当且仅当 D 为$\triangle ABC$ 的垂心时才成立.

证明 如图 3-12,作 $ED \mathrel{\underline{\parallel}} BC$,$FA \mathrel{\underline{\parallel}} ED$,则 $BCDE$ 和 $ADEF$ 均是平行四边形.连 BF 和 AE,显然 $BCAF$ 也是平行四边形,于是 $AF = ED = BC$,$EF = AD$,$EB = CD$,$BF = AC$.对四边形 $ABEF$ 和四边形 $AEBD$,应用四边形中的托勒迷定理(或托勒迷不等式)有 $AB \cdot EF + AF \cdot BE \geqslant AE \cdot BF$,$BD \cdot AE + AD \cdot BE \geqslant AB \cdot ED$,即 $AB \cdot AD + BC \cdot CD \geqslant AE \cdot AC$,$BD \cdot AE + AD \cdot CD \geqslant AB \cdot BC$. ①

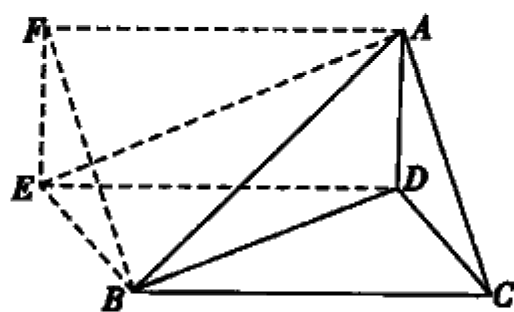


图 3-12

对上述①式中前一式 两边同乘 DB 后,两边同加上 $DC \cdot DA \cdot AC$,然后注意到上述①式中的后一式,有

$$DB \cdot DA \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot AC \geqslant DB \cdot AE \cdot AC + DC \cdot DA \cdot AC.$$

即 $DB(AB \cdot AD + BC \cdot CD) + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant AC(DB \cdot AE + DC \cdot AD) \geqslant AC \cdot AB \cdot BC$.

故 $DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant AB \cdot BC \cdot CA$.

其中等号成立的充分必要条件是①式中两个不等式中的等号同时成立,即等号当且仅当 $ABEF$ 及 $AEBD$ 都是圆内接四边形时成立,亦即 $AFEBD$ 恰是圆内接五边形时等号成立.由于 $AFED$ 为平行四边形,所以条件等价于 $AFED$ 为矩形(即 $AD \perp BC$)且$\angle ABE = \angle ADE = 90°$,亦等价于 $AD \perp BC$ 且 $CD \perp AB$,所以所证不等式等号成立的充分必要条件是 D 为$\triangle ABC$ 的垂心.

【解题思维策略分析】

1. 推导某些重要结论的工具

例 9 圆内接六边形 $ABCDEF$ 的对角线共点的充要条件是$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$.(见角元形式的塞瓦定理的推论)

证明 必要性:如图 3-13,设 AD,BE,CF 交于一点 P,则易知$\triangle APB \backsim \triangle EPD$,$\triangle CPD \backsim \triangle APF$,$\triangle EPF \backsim \triangle CPB$,从而$\frac{AB}{DE} = \frac{BP}{DP}$,$\frac{CD}{FA} = \frac{DP}{FP}$,$\frac{EF}{BC} = \frac{FP}{BP}$.此三式相乘即证.

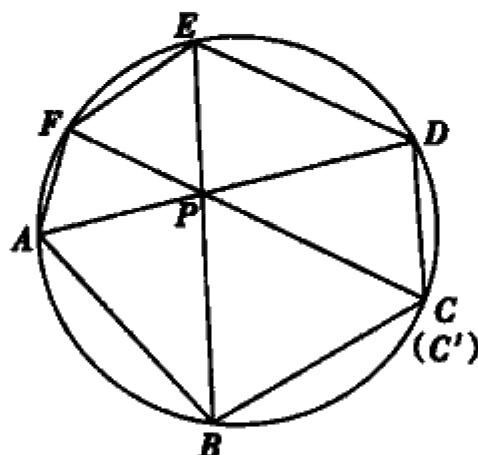


图 3-13

充分性:设$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$,$AD \cdot BE$ 交于 P,连 FP 并延

长交圆于 C',连 BC',$C'D$,则由必要性知 $\frac{AB}{BC'}\cdot\frac{C'D}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$,和已知式比较得 $\frac{CD}{BC}=\frac{C'D}{BC'}$,即 $CD\cdot BC'=BC\cdot C'D$.连 BD,CC',对四边形 $BCC'D$ 应用托勒迷定理,得 $BC\cdot C'D+BD\cdot CC'=CD\cdot BC'$,由此得 $BD\cdot CC'=0$.因 $BD>0$,所以 $CC'=0$,即 C' 与 C 重合,于是 AD,BE,CF 三线共点.

例 10 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,I 是 $\triangle ABC$ 的内心,射线 AI 交 $\odot O$ 于 D.求证:AB,BC,CA 成等差数列的充要条件是 $S_{\triangle IBC}=S_{\triangle DBC}$.

证明 如图 3-14,由 $\angle BID=\angle 5=\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 2=\angle 4+\angle 2=\angle DBI$,知 $DI=BD=DC$.

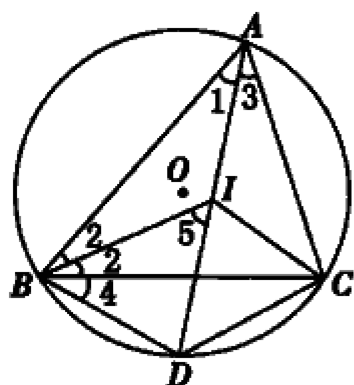


图 3-14

必要性:若 AB,BC,CA 成等差数列,即 $AB+AC=2BC$,而 $\triangle IBA$,$\triangle ICA$,$\triangle IBC$ 有相等的高,则 $S_{\triangle IAB}+S_{\triangle IAC}=2S_{\triangle IBC}$.又由托勒迷定理,有 $AB\cdot DC+AC\cdot BD=AD\cdot BC$,即 $(AB+AC)\cdot DI=AD\cdot BC$,$\frac{AD}{DI}=\frac{AB+AC}{BC}=2$,即 I 是 AD 的中点,于是 $S_{\triangle AIB}=S_{\triangle IBD}$,$S_{\triangle IAC}=S_{\triangle ICD}$,$2S_{\triangle IBC}=S_{\triangle IAB}+S_{\triangle IAC}=S_{\triangle IBD}+S_{\triangle ICD}=S_{\triangle BDCI}=S_{\triangle IBC}+S_{\triangle BDC}$,故 $S_{\triangle IBC}=S_{\triangle DBC}$.

充分性:若 $S_{\triangle IBC}=S_{\triangle DBC}$,即 $\frac{1}{2}IB\cdot BC\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}DB\cdot BC\cdot\sin\frac{1}{2}\angle A$,有 $IB:DB=\sin\frac{1}{2}\angle A:\sin\frac{1}{2}\angle B$.

比较上述两式,得 $IA=BD$,但 $DI=DB$,即知 $AD=2DI$,仿前由托勒定理知 $\frac{AB+AC}{BC}=\frac{AD}{DI}=2$,即 $AB+AC=2BC$,故 AB,BC,CA 成等差数列.

例 11 如图 3-15,设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c.求证:$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ac}+\frac{IC^2}{ab}=1$.

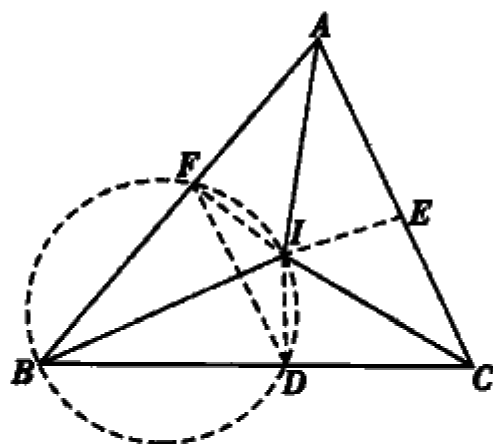


图 3-15

证明 设 I 在三边上的射影分别为 D,E,F.设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径及内切圆半径分别为 R,r,则 $ID=IE=IF=r$.

由 B,D,I,F 四点共圆,且 IB 为其圆的直径,应用托勒迷定理,有 $DF\cdot IB=ID\cdot BF+IF\cdot BD=r(BD+BF)$.

由正弦定理,有 $DF=IB\cdot\sin\angle B=\frac{b}{2R}\cdot IB$,即有

$b\cdot IB^2=2Rr(BD+BF)$.

同理,有 $a\cdot IB^2=2Rr(AF+AE)$,$c\cdot IC^2=2Rr(CD+CE)$,从而 $a\cdot IA^2+b\cdot IB^2+c\cdot$

$IC^2 = 2Rr(a+b+c)$.

又由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{abc}{4R}$,有 $2Rr(a+b+c) = abc$,故 $a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc$,即 $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ac} + \frac{IC^2}{ab} = 1$.

例 12 如图 3-16,若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的边长分别为 a,b,c 与 a',b',c',且 $\angle B = \angle B'$,$\angle A + \angle A' = 180°$,则 $aa' = bb' + cc'$.

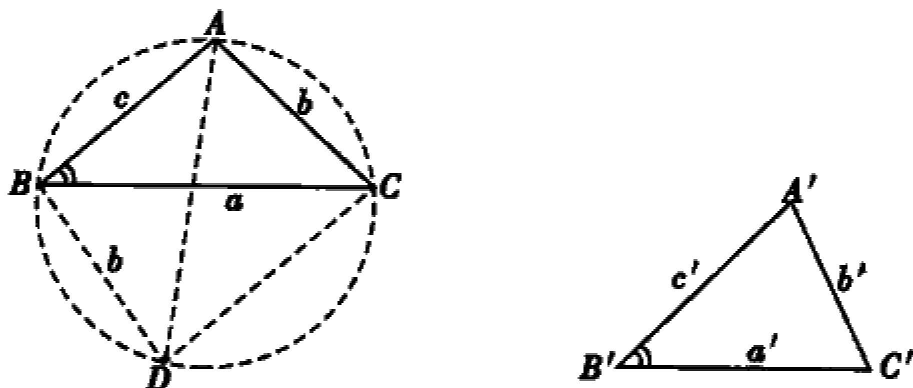


图 3-16

证明 作$\triangle ABC$的外接圆,过 C 作 $CD /\!/ AB$ 交圆于 D,连 AD,BD.

因$\angle A + \angle A' = 180° = \angle A + \angle D$,$\angle BCD = \angle B = \angle B'$,则$\angle A' = \angle D$,$\angle B' = \angle BCD$,从而$\triangle A'B'C' \backsim \triangle DCB$,有$\frac{A'B'}{DC} = \frac{B'C'}{CB} = \frac{A'C'}{DB}$,即 $\frac{c'}{DC} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{DB}$,故 $DC = \frac{ac'}{a'}$,$DB = \frac{ab'}{a'}$.

又 $AB /\!/ CD$,知 $BD = AC = b$,$AD = BC = a$.由托勒迷定理,得

$AD \cdot BC = AB \cdot DC + AC \cdot BD$,即 $a^2 = c \cdot \frac{ac'}{a'} + b \cdot \frac{ab'}{a'}$.

故 $\quad aa' = bb' + cc'$.

例 13 已知$\odot O$的内接锐角$\triangle ABC$,点 O 到$\triangle ABC$的三边 a,b,c 的距离分别为 H_a,H_b,H_c.试证:$\odot O$的半径 R 为方程 $x^3 - (H_a^2 + H_b^2 + H_c^2)x - 2H_aH_bH_c = 0$ 的根.

(《数学通报》1991 年第 11 期问题征解题)

证明 如图 3-17,设 AO,BO,CO 的延长线分别交$\odot O$于 M,N,P.连 AP,BP,BM,MC,NC,NA.因 O 在$\triangle ABC$内部,则 $BM = 2H_c$,$MC = 2H_b$,$NC = 2H_a$,$NA = 2H_c$,$PA = 2H_b$,$PB = 2H_a$.

在$\odot O$的内接四边形 $ABMC$,$ABCN$,$APBC$ 中分别应用托勒迷定理,得

$2R \cdot a = c \cdot MC + b \cdot BM = 2H_b \cdot c + 2H_c \cdot b$,

$2R \cdot b = a \cdot NA + c \cdot NC = 2H_c \cdot a + 2H_a \cdot c$,

$2R \cdot c = a \cdot PA + b \cdot PB = 2H_b \cdot a + 2H_a \cdot b$.

即有 $\begin{cases} R\cdot a - H_c\cdot b - H_b\cdot c = 0, \\ H_c\cdot a - R\cdot b + H_a\cdot c = 0, \\ H_b\cdot a + H_{a\cdot b} - R\cdot c = 0. \end{cases}$

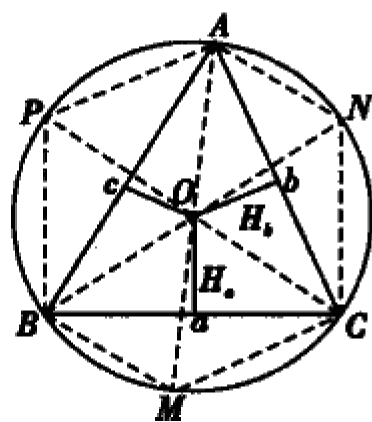


图 3－17

显然，该方程组关于 a,b,c 有非零解，于是有

$\begin{vmatrix} R & -H_c & -H_b \\ H_c & -R & H_a \\ H_b & H_a & -R \end{vmatrix}=0$.展开整理，得关于 R 的方程为

$R^3-(H_a^2+H_b^2+H_c^2)R-2H_aH_bH_c=0$，命题获证.

例 14 如图 3－18，在△ABC 中，B_1，C_1 分别是 AB，AC 延长线上的点，D_1 为 B_1C_1 的中点，连 AD_1 交△ABC 外接圆于 D.求证：$AB\cdot AB_1+AC\cdot AC_1=2AD\cdot AD_1$.

（《中等数学》2001 年第 4 期高中训练题）

证明 连 BD，CD.设$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，△ABC 外接圆的半径为 R.

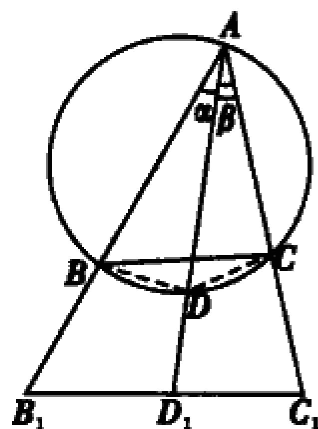


图 3－18

因 D_1 为 B_1C_1 的中点，知 $S_{\triangle AB_1D_1}=S_{\triangle AC_1D_1}=\frac{1}{2}S_{\triangle AB_1C_1}$.在△$BCD$ 中，由正弦定理，有 $BD=2R\cdot\sin\alpha$，$CD=2R\cdot\sin\beta$，$BC=2R\cdot\sin(\alpha+\beta)$.

在圆内接四边形 $ABCD$ 中，由托勒密定理得 $AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC$，即 $AB\cdot 2R\cdot\sin\beta+AC\cdot 2R\cdot\sin\alpha=AD\cdot 2R\cdot\sin(\alpha+\beta)$，

两边同乘以$\frac{1}{4R}\cdot AB_1\cdot AC_1\cdot AD_1$，得

$AB\cdot AB_1\cdot S_{\triangle AC_1D_1}+AC\cdot AC_1\cdot S_{\triangle AB_1D_1}=AD\cdot AD_1\cdot S_{\triangle AB_1C_1}$，

即 $AB\cdot AB_1+AC\cdot AC_1=2AD\cdot AD_1$.

例 15 如图 3－19，设 C_1，C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 半径的 2 倍.四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1，将 A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1，A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2，A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3，A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4.试证四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长$\geqslant 2\times$四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长，并请确定等号成立的条件. （1988 年第三届冬令营试题）

证明 设同心圆圆心为 O，连 OA_1，OB_1，OB_2.在四边形 $OA_1B_1B_2$ 中应用推广的托勒密定理，有

$OB_1\cdot A_1B_2\leqslant OA_1\cdot B_1B_2+OB_2\cdot A_1B_1$.

因 $OB_1=OB_2=2OA_1$，则 $2A_1B_2\leqslant B_1B_2+2A_1B_1$，

从而 $B_1B_2\geqslant 2A_1A_2+2A_2B_2-2A_1B_1$. ①

同理，$B_2B_3 \geqslant 2A_2A_3 + 2A_3B_3 - 2A_2B_2$，$B_3B_4 \geqslant 2A_3A_4 + 2A_4B_4 - 2A_3B_3$，$B_4B_1 \geqslant 2A_4A_1 + 2A_1B_1 - 2A_4B_4$.

以上四式相加，得

$B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + B_4B_1 \geqslant 2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_1)$. ②

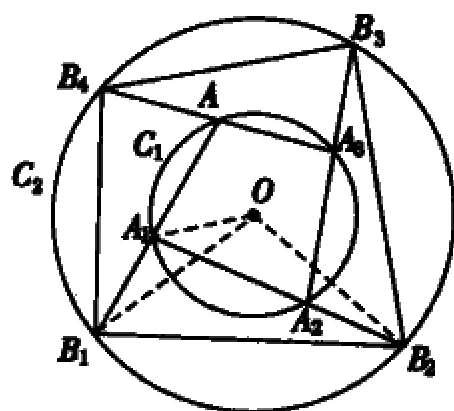


图 3－19

为使②式中等号成立，当且仅当所加的四式均为等式．而①式等号成立，当且仅当四边形 $OA_1B_1B_2$ 内接于圆．这时，$\angle OA_1A_2 = \angle OB_1B_2 = \angle OB_2B_1 = \angle A_4A_1O$，即 OA_1 为 $\angle A_4A_1A_2$ 的平分线．同理，OA_2，OA_3，OA_4 分别为$\angle A_1A_2A_3$，$\angle A_2A_3A_4$，$\angle A_3A_4A_1$ 的平分线．这意味着 O 为四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切圆的圆心，故知四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形，即当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形时②式等号成立．

例 16 如图 3－20，设 $ABCDEF$ 是凸六边形，满足 $AB = BC = CD$，$DE = EF = FA$，$\angle BCD = \angle EFA = 60°$．设 G 和 H 是这六边形内部的两点，使得$\angle AGB = \angle DHE = 120°$．试证：$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$．（第 36 届 IMO 试题）

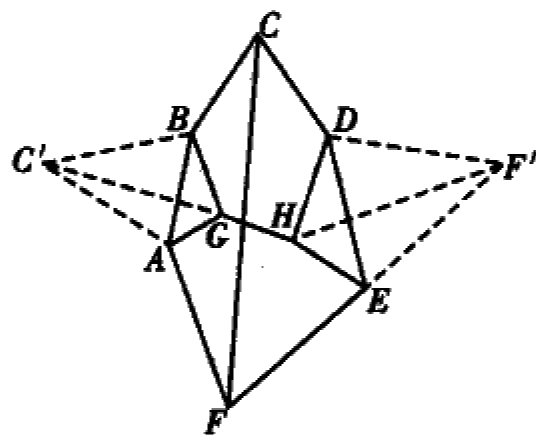


图 3－20

证明 以直线 BE 为对称轴，作 C 和 F 关于该直线的轴对称点 C' 和 F'，于是 $C'F' = CF$，且$\triangle ABC'$ 和$\triangle DEF'$ 都是正三角形，G 和 H 分别在这两个三角形的外接圆上．由托勒迷定理，有

$C'G \cdot AB = AG \cdot C'B + GB \cdot C'A$，即有 $C'G = AG + GB$.

同理，$HF' = DH + HE$.

于是 $AG + GB + GH + DH + HE = C'G + GH + HF' \geqslant C'F' = CF$.

例 17 如图 3－21，设 M，N 是$\triangle ABC$ 内部的两个点，且满足$\angle MAB = \angle NAC$，$\angle MBA = \angle NBC$．证明：$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$. （第 39 届 IMO 预选题）

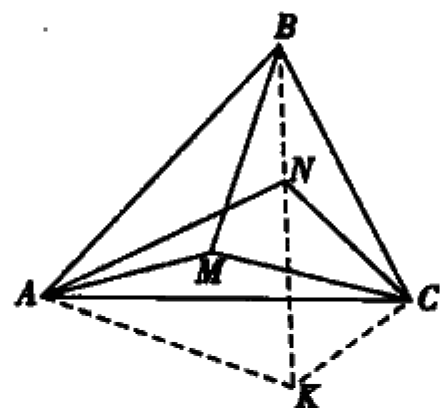


图 3－21

证明 设 K 是射线 BN 上的点，且满足$\angle BCK = \angle BMA$．因$\angle BMA > \angle ACB$，则 K 在$\triangle ABC$ 的外部．又$\angle MBA = \angle CBK$，则$\triangle ABM \backsim \triangle KBC$，即有$\frac{AB}{BK} = \frac{BM}{BC} = \frac{AM}{CK}$.

由$\angle ABK = \angle MBC$，$\frac{AB}{KB} = \frac{BM}{BC}$，知$\triangle ABK \backsim \triangle MBC$，于是$\frac{AB}{BM} = \frac{BK}{BC} = \frac{AK}{CM}$.

由$\angle CKN = \angle MAB = \angle NAC$，知 A，N，C，K 四点共圆．应用托勒迷定理，有 $AC \cdot NK =$

$AN \cdot KC + CN \cdot AK$，或 $AC \cdot (BK - BN) = AN \cdot KC + CN \cdot AK$，将 $KC = \frac{AM \cdot BC}{BM}$，$AK = \frac{BK \cdot CM}{BM}$，$BK = \frac{AB \cdot BC}{BM}$代入，得 $AC(\frac{AB \cdot BC}{BM} - BN) = \frac{AN \cdot AM \cdot BC}{BM} + \frac{CN \cdot BK \cdot CM}{BM}$，即 $\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$.

例 18 如图 3－22，在△ABC 中，$AB = AC$. 线段 AB 上有一点 D，线段 AC 延长线上有一点 E，使得 $DE = AC$. 线段 DE 与△ABC 的外接圆交于 T，P 是线段 AT 延长线上的一点. 证明：点 P 满足 $PD + PE = AT$ 的充分必要条件是点 P 在△ADE 的外接圆上.

(2000 年国家集训队选拔试题)

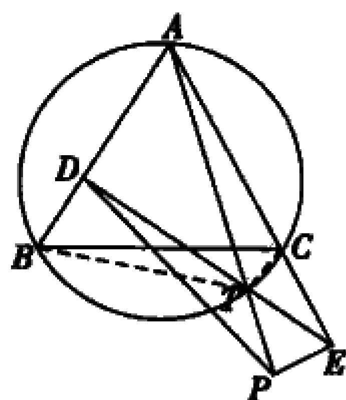


图 3－22

证明 充分性：连 BT，CT. 由 A，B，T，C；A，D，P，E 分别四点共圆，知 $\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP$，$\angle BCT = \angle BAT = \angle DEP$，于是 $\triangle BTC \backsim \triangle DPE$，可设 $\frac{DP}{BT} = \frac{PE}{CT} = \frac{DE}{BC} = k$.

对四边形 $ABTC$ 应用托勒迷定理，有

$AC \cdot BT + AB \cdot CT = BC \cdot AT$.

将上式两边同乘以 k，并用前一比例式代入，得

$AC . DP + AB \cdot PE = DE \cdot AT$.

注意到 $AB = AC = DE$，即得 $PD + PE = AT$.

必要性：以 D，E 为两个焦点，长轴长等于 AT 的椭圆与直线 AT 至多有两个交点，而其中在 DE 的一侧，即线段 AT 延长线上的交点至多一个，由前面的充分性证明，知 AT 的延长线与△ADE 的外接圆的交点 Q 在这个椭圆上；而依题设点 P 同时在 AT 的延长线上和椭圆上，故点 P 与点 Q 重合，命题获证.

2. 求解代数问题的一条途径

例 19 若 $a \geqslant b \geqslant c > 0$，且 $a < b + c$，解方程 $b\sqrt{x^2 - c^2} + c\sqrt{x^2 - b^2} = ax$.

(1993 年南昌市竞赛题)

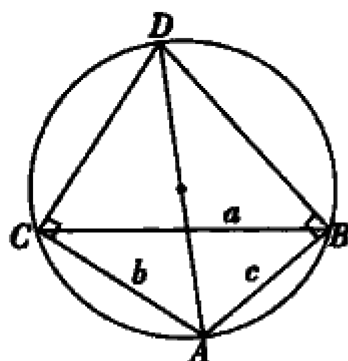


图 3－23

解 因 $a \geqslant b \geqslant c > 0$，且 $a < b + c$，所以 a，b，c 为边可以作一个三角形. 作△ABC，使 $BC = a$，$AC = b$，$AB = c$，分别作 AC，AB 的垂线，它们交于点 D. 则四边形 $ABDC$ 内接于圆，如图 3－23. 此时，AD 为直径，$\sin\angle BAD = \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{AD^2 - c^2}}{AD}$，$\sin\angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{AD^2 - b^2}}{AD}$，$\sin\angle CAB = \frac{a}{AD}$.

对 AD, AC, AB 应用托勒迷定理推论 1 或三弦定理，有 $AC\cdot\sin\angle BAD+AB\cdot\sin\angle CAD=AD\cdot\sin\angle CAB$，即

$$b\cdot\frac{\sqrt{AD^2-c^2}}{AD}+c\cdot\frac{\sqrt{AD^2-b^2}}{AD}=AD\cdot\frac{a}{AD}，即\ b\cdot\sqrt{AD^2-c^2}+c\cdot\sqrt{AD^2-b^2}=a\cdot AD.$$

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle CAB=\frac{abc}{2AD}$，而 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $P=\frac{1}{2}(a+b+c)$，从而 $AD=\dfrac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$为原方程的解.

例 20 已知 a, b 是不相等的正数，求函数 $f(x)=\sqrt{a\cos^2x+b\sin^2x}+\sqrt{a\sin^2x+b\cos^2x}$的值域.

解 因 $(\sqrt{a\cos^2x+b\sin^2x})^2+(\sqrt{a\sin^2x+b\cos^2x})^2=(\sqrt{a+b})^2$，则可以 $AC=\sqrt{a+b}$ 为直径作圆，且作 $AB=\sqrt{a\cos^2x+b\sin^2x}$, $BC=\sqrt{a\sin^2x+b\cos^2x}$. 如图 3－24，在另一半圆上取中点 D，则 $CD=AD=\sqrt{\frac{a+b}{2}}$. 于是对四边形 $ABCD$ 应用托勒迷定理，有

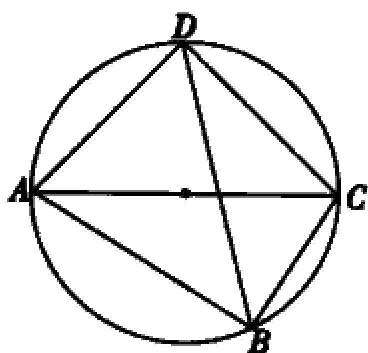


图 3－24

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{a+b}}(AB\cdot CD+BC\cdot AD)=\sqrt{\frac{2}{a+b}}\cdot AC\cdot BD=\sqrt{2}BD.$$

不妨取 $a>b$，则$\sqrt{b}\leqslant\sqrt{a\cos^2x+b\sin^2x}=\sqrt{(a-b)\cos^2x+b}\leqslant\sqrt{a}$，即 $\sqrt{b}\leqslant AB\leqslant\sqrt{a}$. 而$\sqrt{b}<\sqrt{\frac{a+b}{2}}<\sqrt{a}$，从而

当 $AB=CD=\sqrt{\frac{a+b}{2}}$时，$f(x)_{\max}=\sqrt{2(a+b)}$.

当$\sqrt{b}\leqslant AB\leqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}}$时，$f(x)$是 AB 的单调递增函数，

$$f(x)_{\min}=\sqrt{\frac{2}{a+b}}\left(\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

当$\sqrt{\frac{a+b}{2}}\leqslant AB\leqslant\sqrt{a}$时，$f(x)$是 AB 的单调递减函数，从而当 $AB=\sqrt{a}$, $BC=\sqrt{b}$,

$$f(x)_{\min}=\sqrt{\frac{2}{a+b}}\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

故 $f(x)$ 在定义域上，$f(x)_{\min}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，所以 $f(x)$ 的值域为$[\sqrt{a}+\sqrt{b},\sqrt{2(a+b)}]$.

注 对于一般的函数 $f(x)=a\cdot A(x)+b\cdot B(x)$，只要 $A^2(x)+B^2(x)=$ 定值，就可以构造圆的内接四边形，灵活运用托勒密定理求其极值或值域.

3. 注意广义托勒密定理的应用

前面给出的例 6 是一个很有价值的问题，甚至，我们可以称之为广义托勒密定理.

当一个圆的半径无限趋近于 0 时，圆就趋近于一点，过该点的直线就成了"点圆"的切线. 托勒密定理就是例 6 中内切于⊙O 的四个圆均变为点的情形.

利用广义托勒密定理可以处理如下问题：

例 21 已知⊙O_1 与⊙O_2 分别与⊙O 内切，作⊙O_1 和⊙O_2 的两条内公切线交⊙O 于 A，B，作⊙O_1 和⊙O_2 的外公切线，切点为 E 和 F. 求证：$EF/\!/AB$.

证明 如图 3－25，设 G，H 分别为⊙O_1 与⊙O_2 的内公切线的切点，EF 交⊙O 于 C，D 两点，记⊙O_1 和⊙O_2 的内公切线长为 d. 用[* * * *]表示一组与⊙O 内切的"圆"，并应用广义托勒密定理，则

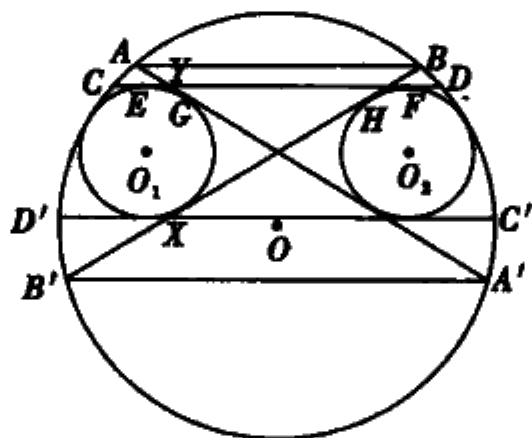


图 3－25

对于[A，C，⊙O_1，D]，有

$$AG\cdot CD=AC\cdot DE+CE\cdot AD, \quad ①$$

对于[B，D，⊙O_2，C]，有

$$\begin{aligned}BH\cdot CD&=BD\cdot CF+DF\cdot BC\\&=BD(CE+EF)+DF\cdot BC.\end{aligned} \quad ②$$

对于[A，C，⊙O_2，D]，有

$$(AG+d)\cdot CD=AC\cdot DF+AD\cdot(CE+EF). \quad ③$$

对于[B，D，⊙O_1，C]，有

$$(BH+d)\cdot CD=BD\cdot CE+BC(DF+EF). \quad ④$$

由①，③得 $AC\cdot DF+AD\cdot(CE+EF)-DC\cdot d=AC\cdot(EF+FD)+CE\cdot AD$，即

$$AD\cdot EF-DC\cdot d=AC\cdot EF. \quad ⑤$$

由②，④得 $BD\cdot CE+BC\cdot(DF+EF)-DC\cdot d=BD\cdot(CE+EF)+DF\cdot BC$，即

$$BC\cdot EF-DC\cdot d=BD\cdot EF. \quad ⑥$$

由⑤与⑥得 $EF(AD-AC)=DC\cdot d$，$EF(BC-BD)=DC\cdot d$.

$\therefore\ BC-BD=AD-AC$.

若四边形 $ABCD$ 中不含圆心 O，那么∠ABC，∠BAD 均为锐角. 不妨设∠$ABC>$∠BAD，则 $AC>BD$.

又∠$BDC>$∠ACD，则 $BC>AD$. 所以 $BC-BD>AD-AC$，矛盾. 故一定有∠$ABC=$∠BAD. 此时 $AB/\!/DC$.

若四边形中含圆心，则与之"对称"的四边形 $A'B'C'D'$（A'，B'，C'，D' 的定义方式

与 A,B,C,D 的定义方式相似)不含圆心.设 CD 交 AA' 于 Y,$C'D'$ 交 BB' 于 X.由已证结论 $A'B'/\!/C'D'$,因为 $\angle A'B'B=\angle A'AB$,$\angle C'XB=\angle DYA'$,$\angle A'B'B=\angle C'XB$,所以 $\angle DYA'=\angle A'AB$,故 $AB/\!/DC$.

例 22 如图 3-26,$\odot G_1$ 和 $\odot G_2$ 内切于 $\odot G$ 的一段弧,并且两圆彼此外切于点 W.设 A 是 G_1 和 G_2 的内公切线与该段弧的交点,而 B 和 C 是 G 中 G_1 与 G_2 的外公切线弦的端点.证明:W 是 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心. (IMO-33 预选题)

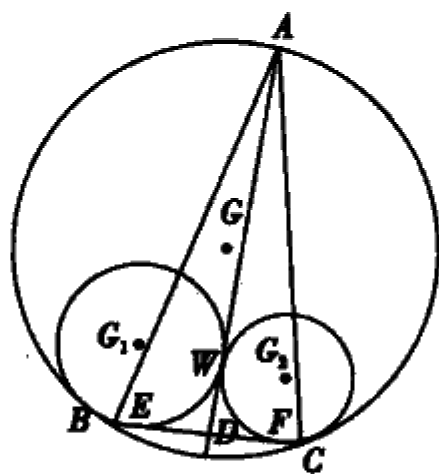


图 3-26

证明 设 AW 与 BC 的交点为 D,$\odot G_1$,$\odot G_2$ 与 BC 的切点分别为 E,F,并设各线段之长为 $BE=x$,$CF=y$,$BD=k$,$CD=h$,$AD=d$,于是,有 $DE=k-x$,$DF=h-y$.又因 $DE=DW=DF$,故 $k-x=h-y$,$AW=d-k+x=d-h+y$.

用$(A,\odot G_1)$表示点圆 A 与 $\odot G_1$ 的公切线的长,则$(A,\odot G_1)=d-k+x$.同理,$(A,B)=c$,$(A,C)=b$,$(\odot G_1,B)=x$,$(\odot G_1,C)=a-x$,$(B,C)=a$.

对$[A,\odot G_1,B,C]$应用广义托勒密定理,有

$(d-k+x)\cdot a+b\cdot x=c\cdot(a-x)$,

令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则由上式,有 $x=\frac{a}{2p}(k+c-d)$.

同理,对$[B,C,\odot G_2,A]$,有 $y=\frac{a}{2P}(h+b-d)$,

注意到 $k-x=h-y$,则 $k-\frac{a}{2p}(k+c-d)=h-\frac{a}{2p}(h+b-d)$,即有$(b+c)\cdot k-ac=(b+c)\cdot h-ab$,亦即$(b+c)(k-h)=a\cdot(c-b)$.

而 $BD+DC=BC$,即 $k+h=a$,于是,$(b+c)(k-h)=(k+h)(c-b)$,即 $c\cdot h=b\cdot k$,亦即$\frac{k}{h}=\frac{c}{b}$.

此表明$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$,即知 AD 平分$\angle BAC$.所以 $k=\frac{ac}{b+c}$,$h=\frac{ab}{b+c}$.

得 $k-x=\frac{ac}{b+c}-\frac{a}{2p}(\frac{ac}{b+c}+c-d)=\frac{ad}{2p}$.

因而 $\frac{d}{k-x}=\frac{d}{\frac{ad}{2p}}=\frac{2p}{a}=\frac{a+b+c}{a}$,于是

$$\frac{AW}{DW}=\frac{AD}{DW}-1=\frac{d}{k-x}-1=\frac{a+b+c}{a}-1=\frac{b+c}{a}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{BA}{BD}.$$

由此,即知 BW 平分$\angle ABC$.故 W 是$\triangle ABC$ 的内心.

【模拟实战】

习题 A

1. A,B,C,D 四点在同一圆周上,且 $BC=CD=4$,E 为 AC 与 BD 的交点,且 $AE=6$,线段 BE 和 DE 的长都是整数,则 BD 的长等于多少? (1988 年全国初中联赛题)
2. 在$\triangle ABC$ 中,$AB<AC<BC$,D 在 BC 上,E 在 BA 的延长线上,且 $BD=BE=AC$,$\triangle BDE$ 的外接圆与$\triangle ABC$ 的外接圆交于 F 点.求证:$BF=AF+CF$.
(1991 年全国初中联赛题)
3. 已知 P 是正方形 $ABCD$ 的外接圆$\overset{\frown}{AD}$上任一点,求$\dfrac{PA+PC}{PB}$的值.
4. $\odot O$ 过$\triangle ABC$ 的顶点 A,且分别与 AB,AC 和 BC 上的中线 AD 相交于 B_1,C_1,D_1,则 $AB_1\cdot AB,AD_1\cdot AD,AC_1\cdot AC$ 成等差数列.
5. 已知正七边形 $A_1A_2\cdots A_7$,求证:$\dfrac{1}{A_1A_2}=\dfrac{1}{A_1A_3}+\dfrac{1}{A_1A_4}$. (第 21 届全俄奥林匹克题)
6. 在圆内接六边形 $AB'CA'BC'$ 中,令 $BC'=a,B'C=a',CA=b,C'A=b',AB'=c,A'B=c',AA'=a_1,BB'=b_1,CC'=c_1$.求证:$a_1b_1c_1=abc+a'b'c'+aa'a_1+bb'b_1+cc'c_1$.
7. R,r 分别为$\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆的半径,m,n,p 分别在弧$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA}$上,$h_1,h_2,h_3$ 分别为弓形 AmB,BnC 和 CPA 的高.求证:$h_1+h_2+h_3=2R-r$.
8. 解方程 $2\sqrt{x^2-121}+11\sqrt{x^2-4}=7\sqrt{3}x$.
9. 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,且 $0\leqslant a\leqslant 1,0\leqslant b\leqslant 1$.求证:$a^2+b^2=1$.
10. 求函数 $y=\dfrac{x^2+2x\cdot\sin\theta+2}{x^2+2x\cdot\cos\theta+2}$的值域($\theta$ 为参数).
11. 已知$\triangle ABC$ 中,最大角 B 与最小角 C 的差为$\overset{\frown}{AB}$上任一点.求证:$PD+PE=PA+PB+PC+PF$.
12. AD,BE,CF 是正$\triangle ABC$ 的三条高,任取一点 P.试证:在$\triangle PAD,\triangle PBE,\triangle PCF$ 中,最大一个的面积等于其余两个的面积之和.
13. 已知$\triangle ABC$ 的$\angle A=60°$,令 $BC=a,CA=b,AB=c$.求证:$\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\dfrac{c-b}{c}$.

14. 已知 P 为等腰△ABC（$AB=AC$）外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上的一点，Q 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点. 求证：$\frac{PA}{PB+PC}=\frac{QA}{QC-QB}$.
15. 已知 AB 为⊙O 的直径，圆周上的点 C,D 分别在 AB 的两侧，过 CD 中点 M 分别作 AC,AD 的垂线，垂足为 P,Q. 求证：$BC\cdot MP+BD\cdot MQ=2MC^2$.
16. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，过 B 的圆分别交 AB,BC,BD 于 E,F,G. 求证：$BE\cdot AB+BF\cdot BC=BG\cdot BD$.
17. 设 AF 为⊙O_1 与⊙O_2 的公共弦，点 B,C 分别在⊙O_1，⊙O_2 上，且 $AB=AC$，$\angle BAF$，$\angle CAF$ 的平分线交⊙O_1，⊙O_2 于点 D,E. 求证：$DE\perp AF$.
18. 解方程 $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x^2-1}=\sqrt{7}x$.
19. 求函数 $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$（$a,b\in\mathbf{R}^+$）的值域.
20. 已知 $x^2+y^2\leqslant 1$（$x,y\in\mathbf{R}^+$）. 求证：$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$.
21. 已知两圆内切于点 T，△ABC 是大圆的内接正三角形，过 A,B,C 作小圆的切线 AM,BN,CP，且 M,N,P 为切点. 求证：CP,AM,BN 三条线段中，一条线段等于另外两条线段之和.
22. 在△ABC 中，$BC>AC>AB$，外接圆为 Γ. 三条内角平分线分别交 BC,CA 和 AB 于点 D,E 和 F，通过点 B 的直线平行于 EF 交圆 Γ 于点 Q，点 P 在圆 Γ 上，且 $QP\parallel AC$. 求证：$PC=PA+PB$.
23. 在四边形 $ABCF$ 中，$BF=AF+FC$. 点 D 在 BC 上，点 E 在 BA 的延长线上，且 $BD=BE=AC$，$AF\cdot CD=FC\cdot AE$. 求证：四边形 $ABCF$ 有外接圆.
24. ⊙O_1 与⊙O_2 相交于 A,E 两点，⊙O_1 的一条弦 BC 与⊙O_2 相切于点 D，且 AD 与⊙O_1 相切于点 A. 求证：$\frac{EB}{EC}=\frac{AB^3}{AC^3}$.

习题 B

1. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的四边 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$. 求对角线 AC 和 BD 的长（用 a,b,c,d 表示）.
2. 已知△ABC 内接于⊙O，P 为△ABC 内任一点，过点 P 引 AB,AC,BC 的平行线，分别交 BC,AC 于 F,E，交 AB,BC 于 K,I，交 AB,AC 于 G,H，AD 为⊙O 过点 P 的弦. 试证：$EF^2+KI^2+GH^2\geqslant 4PA\cdot PD$.　　（《数学通报》1991 年第 9 期问题）
3. 圆内接四边形被它的一条对角线分成两个三角形. 证明：这两个三角形的内切圆半径之和与对角线的选取无关.　　（IMO－23 预选题）

4. 设 C_1,C_2 是同心圆,C_2 的半径是 C_1 的半径的 $\lambda(\lambda>1)$倍. n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于 C_1,延长 $A_nA_1,A_1A_2,\cdots,A_{n-1}A_n$ 分别交圆 C_2 于 $B_1,B_2,\cdots B_n$,若 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$,$B_1B_2\cdots B_n$ 的周长分别为 p_1,p_2. 试证:$p_2\geqslant\lambda p_1$,其中等号当且仅当 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形时成立. (IMO-21 预选题)

5. 已知边长分别为 a,b,c 的△ABC 内接于⊙O,⊙O_1 内切于⊙O,切点 G 在$\overset{\frown}{BC}$上,由点 A,B,C 分别引⊙O_1 的切线长顺次为 d,e,f. 证明:$ad=be+cf$.

6. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中,⊙O_1,⊙O_2,⊙O_3,⊙O_4 分别是△ABD,△BCA,△CDB,△DAC 的内切圆. 设 AB,BC,CD,DA 上的切点依次是 E,F,M,N,G,H,P,Q,设⊙O_i 的半径为 $R_i(i=1,2,3,4)$. 求证:$EF\cdot MN=R_1R_3+R_2R_4$.

7. 设锐角△ABC 的∠A 的平分线交 BC 于 L,交外接圆于 N,自点 L 分别向 AB 和 AC 作垂线 LK 和 LM,垂足为 K 和 M. 求证:△ABC 的面积等于四边形 $AKNM$ 的面积. (IMO-28 试题)

8. △ABC 为⊙O 内接三角形,$AB>AC>BC$. 点 D 在$\overset{\frown}{BC}$上,从 O 点分别作 AB,AC 的垂线交 AD 于 E、F,射线 BE,CF 交于 P 点. 则 $PB=PC+PO$ 的充要条件是∠$BAC=30°$.

9. 证明:设△ABC 中,∠A,∠B 与∠C 的三条角平分线分别交△ABC 的外接圆于 A_1,B_1,C_1,则 $AA_1+BB_1+CC_1>AB+BC+CA$. (1982 年澳大利亚竞赛题)

10. 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,且 $AB=BC,CD=DE,EF=FA$. 证明:$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geqslant\frac{3}{2}$,并指出等式在什么条件下成立. (IMO-38 预选题)

11. 在△ABC 中,∠$A=90°$,∠$A<$∠C,过 A 点作△ABC 的外接圆⊙O 的切线,交直线 BC 于 D,设点 A 关于 BC 的对称点为 E,作 $AX\perp BE$ 于 X,Y 为 AX 的中点,BY 与⊙O 交于 Z. 证明:BD 为△ADZ 的外接圆的切线. (IMO-39 预选题)

12. ⊙O 为正△ABC 的外接圆,AD 为⊙O 的直径,在$\overset{\frown}{BC}$上任取一点 $P(P\neq B,P\neq C)$,设 E,F 分别为△PAB,∠PAC 的内心. 证明 $PD=|PE-PF|$.

13. 设 G 为△ABC 的重心,在△ABC 所在平面上确定点 P 的位置,使得 $PA\cdot AG+BP\cdot BG+CP\cdot CG$ 有最小值,并用△ABC 的边长表示这个最小值. (IMO-42 预选题)

14. 设 $A_1A_2\cdots A_n(n\geqslant4)$为凸 n 边形. 证明:$A_1A_2\cdots A_n$ 为圆内接多边形的充分必要条件是对每个顶点 A_j 对应一组实数(b_jc_j),$j=1,2,\cdots,n$,满足 $A_iA_j=b_jc_i-b_ic_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$. (IMO-41 预选题)

第四章　斯特瓦尔特定理及应用

【基础知识】

斯特瓦尔特定理　设 P 为$\triangle ABC$ 的 BC 边上任一点（$P\neq B,P\neq C$），则有

$$AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC \quad ①$$

或 $$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{PC}{BC}. \quad ②$$

证明　如图4－1，不失一般性，不妨设$\angle APC<90°$，则由余弦定理，有

$$AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos\angle APC,$$

$$\begin{aligned}AB^2&=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cdot\cos(180°-\angle APC)\\&=AP^2+BP^2+2AP\cdot BP\cdot\cos\angle APC.\end{aligned}$$

对上述两式分别乘以 BP,PC 后相加整理，得①式或②式.

斯特瓦尔特定理的逆定理　设 B,P,C 依次分别为从 A 点引出的三条射线 AB,AP,AC 上的点，若

$$AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC,$$

或 $$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{PC}{BC},$$

则 B,P,C 三点共线.

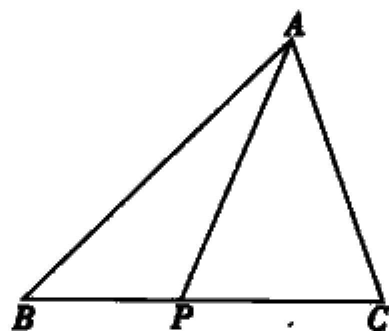


图4－1

证明　令$\angle BPA=\theta_1,\angle APC=\theta_2$，对$\triangle ABP$ 和$\triangle APC$ 分别应用余弦定理，有

$$AB^2=AP^2+PB^2-2AP\cdot PB\cdot\cos\theta_1,AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos\theta_2.$$

将上述两式分别乘以 PC,BP 后相加，再与已知条件式相比较得

$-2AP\cdot BP\cdot PC\cdot(\cos\theta_1+\cos\theta_2)=0$，由此推出 $\theta_1=180°-\theta_2$，即证.

斯特瓦尔特定理的推广　(1)设 P 为$\triangle ABC$ 的 BC 边延长线上任一点，则

$$AP^2=-AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BC^2\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{BP}{BC}. \quad ③$$

(2)设 P 为$\triangle ABC$ 的 BC 边反向延长线上任一点，则

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}-AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BC^2\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{BP}{BC}. \quad ④$$

注 若用有向线段表示,则②,③,④式是一致的.

推论1 设 P 为等腰$\triangle ABC$ 的底边 BC 上任一点,则 $AP^2=AB^2-BP\cdot PC$.

推论2 设 AP 为$\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线,则 $AP^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2$.

推论3 设 AP 为$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的内角平分线,则 $AP^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC$.

推论4 设 AP 为$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的外角平分线,则 $AP^2=-AB\cdot AC+BP\cdot PC$.

推论5 在$\triangle ABC$ 中,若 P 分线段 BC 满足$\frac{BP}{BC}=\lambda$,则

$$AP^2=\lambda(\lambda-1)BC^2+(1-\lambda)AB^2+\lambda\cdot AC^2.$$

注 若$\frac{BP}{PC}=k$,则 $AP^2=\frac{1}{1+k}\cdot AB^2+\frac{k}{1+k}AC^2-\frac{k}{(1+k)^2}\cdot BC^2$.

【典型例题与基本方法】

1. 选择恰当的三角形及一边上的一点,是应用斯特瓦尔特定理的关键.

例1 如图4-2,凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=60°$,$\angle BAD=\angle BCD=90°$,$AB=2$,$CD=1$,对角线 AC,BD 交于点 O.求 $\sin\angle AOB$. (1996年北京中学生竞赛题)

解 延长 BA,CD 相交于 P,设 $BC=x$,则 $PB=2x$,$PC=\sqrt{3}x$,对$\triangle PBC$ 及 PB 边上的点 A,应用斯特瓦尔特定理,有

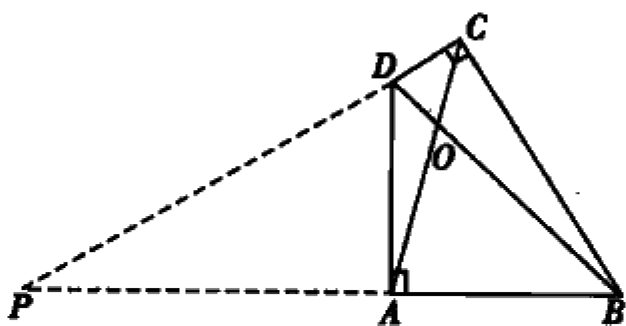


图4-2

$$\begin{aligned}CA^2&=PC^2\cdot\frac{AB}{PB}+BC^2\cdot\frac{PA}{PB}-AB\cdot PA\\&=(\sqrt{3}x)^2\cdot\frac{2}{2x}+x^2\cdot\frac{2x-2}{2x}-2(2x-2)\\&=x^2-2x+4.\end{aligned}$$

由 Rt$\triangle ADP\backsim$ Rt$\triangle CBP$,有 $PD\cdot PC=PA\cdot PB$,即$(\sqrt{3}x-1)\cdot\sqrt{3}x=(2x-2)\cdot 2x$,求得 $BC=x=4-\sqrt{3}$.

于是,$CA^2=15-6\sqrt{3}$.又在 Rt$\triangle BCD$ 中,$BD^2=x^2+1=20-8\sqrt{3}$,从而 $BD\cdot AC=\sqrt{4(5-2\sqrt{3})}\cdot\sqrt{3(5-2\sqrt{3})}=10\sqrt{3}-12$.

而 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=(2\sqrt{3}-2)+\frac{1}{2}(4-\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

故 $\frac{1}{2}(10\sqrt{3}-12)\cdot\sin\angle AOB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,即 $\sin\angle AOB=\frac{15+6\sqrt{3}}{26}$为所求.

例2 如图4-3,在$\triangle ABC$ 中,$\angle A=60°$,$AB>AC$,点 O 是外心,两条高 BE,CF 交

于 H 点，点 M,N 分别在线段 BH,HF 上，且满足 $BM=CN$，求$\frac{MH+NH}{OH}$的值.

（2002 年全国高中联赛题）

解 延长 BE 交⊙O 于 L，由三角形垂心性质，知 L 为 H 关于 AC 的对称点，则 $LC=CH$.

设⊙O 的半径为 R，$OH=d$，$CH=x$，$BH=y$，由 $\angle CLB=\angle A=60°$，知 $LH=LC=CH=x$. 延长 OH 两端交⊙O 于 T,S，如图 4-3，由相交弦定理有 $TH\cdot HS=BH\cdot HL$，即 $(R+d)(R-d)=x\cdot y$，即 $R^2=d^2+xy$.

在△BCL 及边 BL 上的点 H，应用斯特瓦尔特定理，并注意到 $BC=2R\cdot\sin\angle A=\sqrt{3}R$，可得

$$BC^2\cdot LH+LC^2\cdot BH=LH\cdot BH\cdot BL+CH^2\cdot BL,$$

即 $$(\sqrt{3}R)^2\cdot x+x^2\cdot y=x\cdot y\cdot(x+y)+x^2\cdot(x+y),$$

亦即 $$R^2=\frac{1}{3}(x^2+xy+y^2).$$

于是，有$\frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)=d^2+xy$.

亦即 $\frac{(x-y)^2}{d^2}=3$，即 $\frac{|x-y|}{d}=\sqrt{3}$.

而当 $AB>AC$ 时，$MH+NH=BH-BM+CN-CH=BH-CH=y-x=|x-y|$，

故 $\frac{MH+NH}{OH}=\frac{|x-y|}{d}=\sqrt{3}$为所求.

图 4-3

2. 注意斯特瓦尔特定理的推论的应用

例 3 如图 4-4，自⊙O 外一点引圆的两条切线 PE,PF，E,F 为切点，过 P 点任意引圆的割线交⊙O 于 A,B，交 EF 于 C. 证明：$\frac{2}{PC}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}$.

（2001 年湖南中学生夏令营试题）

证明 由相交弦定理，有 $EC\cdot CF=AC\cdot CB$.

由于 $PE=PF$，对等腰△PEF 及底边 EF 上的点 C，应用斯特瓦尔特定理的推论 1，有 $PC^2=PE^2-EC\cdot CF$，即有

$$\begin{aligned}PE^2&=PC^2+EC\cdot CF=PC^2+AC\cdot CB\\&=PC^2+(PC-PA)\cdot(PB-PC)\\&=PC^2-PC^2-PA\cdot PB+PC\cdot PB+PC\cdot PA\\&=PA\cdot PC+PB\cdot PC-PA\cdot PB.\end{aligned}$$

图 4-4

而 $PE^2=PA\cdot PB$，从而 $2PA\cdot PB=PA\cdot PC+PB\cdot PC$.

故 $\frac{2}{PC}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}$.

例4 如图4-5,设在$\triangle ABC$中,$AB>AC$,AE平分$\angle A$,且交BC于E,在BC上有一点S,使$BS=EC$.求证:$AS^2-AE^2=(AB-AC)^2$. (1979年江苏省竞赛题)

证明 对$\triangle ABC$及边BC上的点S,应用斯特瓦尔特定理,有

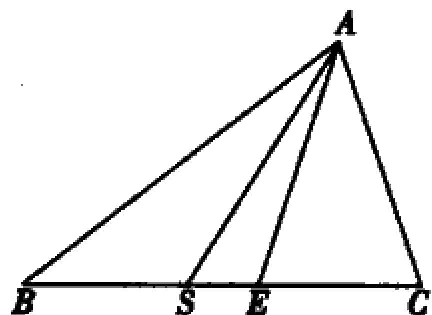


图4-5

$$AS^2=AB^2\cdot\frac{SC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BS}{BC}-BS\cdot SC.$$

由AE平分$\angle A$,对$\triangle ABC$及边BC上的点F,应用斯特瓦尔特定理的推论3,有$AE^2=AB\cdot AC-BE\cdot EC$,从而

$$AS^2-AE^2=AB^2\cdot\frac{SC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BS}{BC}-AB\cdot AC+BE\cdot EC-BS\cdot SC. \quad ①$$

因$BS=EC$,有$BE=SC$,即$BE\cdot EC=BS\cdot SC$.

由角平分线的性质,有 $\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AB+AC},\frac{EC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}$,

即 $\frac{SC}{BC}=\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AB+AC},\frac{BS}{BC}=\frac{EC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}$.

从而,由①式,有$AS^2-AE^2=(AB-AC)^2$.

3. 注意斯特瓦尔特定理等价于托勒迷定理

斯特瓦尔特定理可推导出托勒迷定理.

证明 如图4-6,在$\triangle ABC$中,点P在BC上,由斯特瓦尔特定理,有

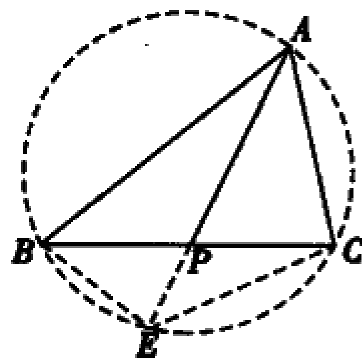


图4-6

$$AP^2\cdot BC=AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP-BP\cdot PC\cdot BC.$$

延长AP交$\triangle ABC$的外接圆于E,连BE,EC,由$\triangle ABP\backsim\triangle CEP$和$\triangle ACP\backsim\triangle BEP$,有$AB\cdot CP=CE\cdot AP$,$AC\cdot BP=AP\cdot BE$.

又由相交弦定理,有$BP\cdot PC=AP\cdot PE$.

于是,得$AP^2\cdot BC=AB\cdot CE\cdot AP+AC\cdot AP\cdot BE-AP\cdot PE\cdot BC$,

即 $BC(AP+PE)=AB\cdot CE+AC\cdot BE$,

亦即 $AB\cdot CE+AC\cdot BE=BC\cdot AE$.即为托勒迷定理.

由托勒迷定理也可推导斯特瓦尔特定理.

证明 如图4-7,设圆内接四边形$ABEC$的对角线AE,BC交于P.由托勒迷定理,有

$$AB\cdot EC+AC\cdot BE=BC\cdot AE.$$

即 $AB\cdot EC+AC\cdot BE=(BP+PC)\cdot AE$.

由$\triangle ABP \backsim \triangle CEP$和$\triangle ACP \backsim \triangle BEP$,有$EC=\frac{AB\cdot PC}{AP}$,$BE=\frac{AC\cdot BP}{AP}$.由相交弦定理,有$PE=\frac{BP\cdot PC}{AP}$.将这些式子代入前述式子即得斯特瓦尔特定理.

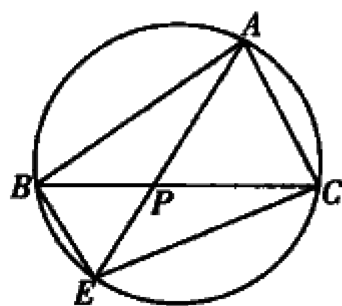


图 4-7

因此,在应用中,两个定理的应用范围相同,所显示的功能也一样,即凡能用托勒迷定理处理的问题也能用斯特瓦尔特定理处理.反之亦然.

例 5 若$\triangle ABC$的三边为连续整数,且最大角$\angle B$是最小角$\angle A$的两倍,求三角形的三边长. (IMO-10 试题)

解法 1 作$\angle ABC$的平分线BD(图略),则$BD=AD$,令$AD=y$,$AB=x$,则$AC=x+1$,$BC=x-1$,$CD=x+1-y$.

由斯特瓦尔特定理的推论3,有$y^2=x(x-1)-y(x+1-y)$,即$y=\frac{x(x-1)}{x+1}$,又$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$,即$\frac{x}{x-1}=\frac{y}{x+1-y}$,有$y=\frac{x(x+1)}{2x-1}$.

故由$\frac{x^2-x}{x+1}=\frac{x^2+x}{2x-1}$,求得$x=5$(舍去$x=0$),即$AB=5$,$BC=4$,$AC=6$.

解法 2 作$\triangle ABC$的外接圆O,取$\overset{\frown}{AC}$的中点D,连AD,BD,CD,则$ABCD$为梯形,其中$CD/\!/BA$.令$AB=x$,则$AC=x+1$,$BC=x-1$,且$CD=BC=x-1$,$BD=AC=x+1$.对四边形$ABCD$应用托勒迷定理,有$(x+1)^2=x(x-1)+(x-1)^2$,求得$x=5$.(下略)

【解题思维策略分析】

1. 获得线段倍分关系的一条途径

例 6 如图 4-8,已知$\triangle ABC$的外接圆k的圆心为O,半径为R,内切圆的圆心为I,半径为r,另一个圆k_0与边CA,CB分别切于点D,E,且与圆k内切.求证:内心I是线段DE的中点. (IMO-34 预选题)

证明 设圆k_0的圆心为O_1,半径为ρ,于是O_1,I,C三点共线,且$CI=\frac{r}{\sin\frac{1}{2}\angle C}$,$CO_1=\frac{\rho}{\sin\frac{1}{2}\angle C}$,则$IO_1=\frac{\rho-r}{\sin\frac{1}{2}\angle C}$,且$O_1E=\rho$.

于是,$\frac{IO_1}{CO_1}=\frac{\rho-r}{\rho}=1-\frac{r}{\rho}$.

连OC,OI,O_1O,对$\triangle COO_1$及边O_1C上的点I,应用斯特瓦尔特定理,有

$$OO_1^2 \cdot CI + OC^2 \cdot IO_1 = OI^2 \cdot CO_1 + CI \cdot IO_1 \cdot CO_1 . \qquad ①$$

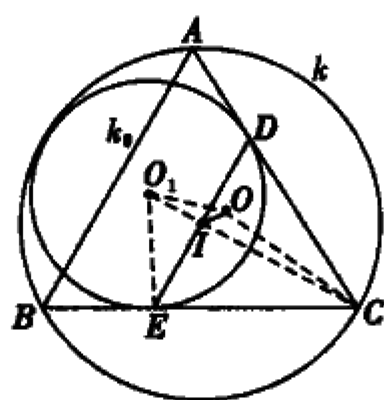


图 4-8

注意到欧拉公式，$OI^2 = R^2 - 2Rr$，及 $OO_1 = R - \rho$，$OC = R$，并将其代入①式，得到

$$(R-\rho)^2 \cdot \frac{r}{\sin \frac{1}{2}\angle C} + R^2 \cdot \frac{\rho - r}{\sin \frac{1}{2}\angle C}$$

$$= (R^2 - 2Rr) \cdot \frac{\rho}{\sin \frac{1}{2}\angle C} + \frac{r}{\sin \frac{1}{2}\angle C} \cdot \frac{\rho - r}{\sin \frac{1}{2}\angle C} \cdot \frac{\rho}{\sin \frac{1}{2}\angle C},$$

化简得 $\sin^2 \frac{1}{2}\angle C = \frac{\rho - r}{\rho} = 1 - \frac{r}{\rho}$.

从而 $\frac{IO_1}{CO_1} = \sin^2 \frac{1}{2}\angle C = (\frac{\rho}{CO_1})^2$,

即 $IO_1 \cdot CO_1 = \rho^2 = O_1E^2$. ②

因为 $O_1E \perp CE$，$CO_1 \perp DE$ 且平分 DE，令 DE 的中点为 I'，由射影定理，有

$I'O_1 \cdot CO_1 = O_1E^2$. ③

比较③式和②式，知 I' 与 I 重合，即得 I 为 DE 的中点.

例 7 如图 4-9，两个大圆⊙A，⊙B 相等且相交；两个小圆⊙C，⊙D 不相等但相交，且交点为 P，Q. 若⊙C，⊙D 既同时与⊙A 内切，又同时与⊙B 外切. 试证：直线 PQ 平分线段 AB. (《中等数学》奥林匹克问题高中 58 题)

证明 由于⊙C，⊙D 半径不相等，此两圆交点所在直线 PQ 必与线段 AB 相交，设交点为 M. 连 AC，MC，BC，AD，MD，BD，PC，PD，CD，显然 $PQ \perp CD$，设垂足为 N. 又设⊙A，⊙B 的半径均是 ρ，⊙C，⊙D 的半径分别为 R，r $(R \neq r)$，则易得 $AC = \rho - R$，$BC = \rho + R$，$AD = \rho - r$，$BD = \rho + r$.

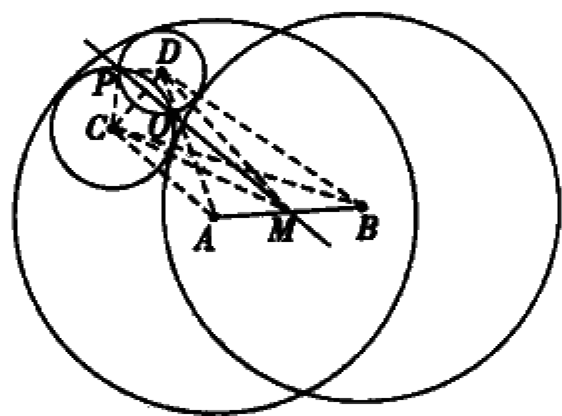


图 4-9

因为 $PQ \perp CD$，或 $MP \perp CD$，垂足为 N，则

$$\begin{aligned} MC^2 - MD^2 &= (CN^2 + NM^2)^2 - (MN^2 + ND^2) \\ &= CN^2 - ND^2 \\ &= (PC^2 - PN^2) - (PD^2 - PN^2) \\ &= PC^2 - PD^2 = R^2 - r^2 . \end{aligned}$$

设 $AM = x$，$MB = y$，对△CAB 及边 AB 上的点 M，应用斯特瓦尔特定理，有

$$\begin{aligned} x \cdot BC^2 + y \cdot AC^2 &= (x+y) \cdot MC^2 + (x+y)x \cdot y \\ &= (x+y) \cdot MC^2 + x \cdot MB^2 + y \cdot AM^2 . \end{aligned} \qquad ①$$

对$\triangle DAB$及边AB上的点M，应用斯特瓦尔特定理，有

$$x\cdot BD^2+y\cdot AD^2=(x+y)\cdot MD^2+x\cdot MB^2+y\cdot AM^2. \quad ②$$

①－②，得

$$x\cdot(BC^2-BD^2)+y(AC^2-AD^2)=(x+y)(MC^2-MD^2)=(x+y)(R^2-r^2),$$

即 $$x\cdot[(\rho+R)^2-(\rho+r)^2]+y\cdot[(\rho-R)^2-(\rho-r)^2]=(x+y)(R^2-r^2),$$

亦即 $$2\rho\cdot(x-y)\cdot(R-r)=0.$$

因$\rho\neq0$，$R\neq r$，从而$x-y=0$，即$x=y$.

故$AM=MB$，即直线PQ平分线段AB.

2. 求解三角形问题的一种工具

斯特瓦尔特定理在求解三角形中有关线段的问题有着重要作用，这可从习题A中的第6题，习题B中的第7题等可以看出．在求解三角形的其他问题中，它也有着重要作用．

例8 设$\triangle ABC$的三边为a,b,c，其面积为S，则$a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}S$，当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时，等式成立．（IMO－3试题）

证明 取BC的中点D，对$\triangle ABC$及BC边上的点D，应用斯特瓦尔特定理的推论2，有 $$AD^2=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{4}BC^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2.$$

从而有 $$a^2+b^2+c^2=2AD^2+\frac{3}{2}a^2\geqslant2\sqrt{2AD^2\cdot\frac{3}{2}a}=2\sqrt{3}\cdot AD\cdot a.$$

设$\triangle ABC$的BC边上的高为h，则$AD\geqslant h$，于是

$$2\sqrt{3}\cdot AD\cdot a\geqslant2\sqrt{3}\cdot2\cdot\frac{1}{2}a\cdot h=4\sqrt{3}S.$$

故$a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}S$，其中等号当且仅当$2AD^2=\frac{3}{2}a^2$且$AD=h$时成立，也即$AD\perp BC$且$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，此时$\triangle ABC$恰为正三角形．

例9 如图4－10，在$\triangle ABC$中，D,E分别为AC和AB同方向延长线上的点，BD与CE相交于P，且$BD=CE$．当P在BC边的中线上时，则$AB=AC$.

证明 设AP交BC于Q．分别对$\triangle BPQ$及点A和$\triangle CPQ$及点A应用斯特瓦尔特定理的推广结论，有

$$BA^2=-BP^2\cdot\frac{AQ}{PQ}+BQ^2\cdot\frac{AP}{PQ}+AP\cdot AQ,$$

$$CA^2=-CP^2\cdot\frac{AQ}{PQ}+CQ^2\cdot\frac{AP}{PQ}+AP\cdot AQ.$$

于是 $BA^2-CA^2=(CP^2-BP^2)\cdot\frac{AQ}{PQ}+(BQ^2-CQ^2)\cdot\frac{AP}{PQ}$.

由于 $BD=CE$,对△PBC 及点 A 应用塞瓦定理,有

$\frac{QB}{QC}\cdot\frac{EC}{EP}\cdot\frac{DP}{DB}=1$,即$\frac{PD}{PE}=\frac{QC}{QB}$.

当 P 点在 BC 边上的中线上时,有 $BQ=QC$.

从而 $PD=PE$,由此知 $PC=PB$,故 $AB=AC$.

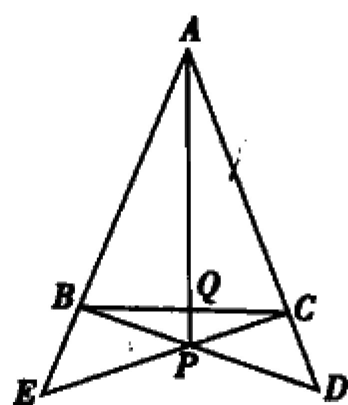


图 4-10

例 10 如图 4-11,若 D 是△ABC 的边 BC 延长线上一点,则 AD 平分∠A 的外角的充分必要条件是 $AD^2=BD\cdot CD-AB\cdot AC$.

证明 必要性:若 AD 平分∠A 的外角,则由推论 4 即有

$AD^2=BD\cdot CD-AB\cdot AC$.

或者按证明斯特瓦尔特定理的方法来推导.

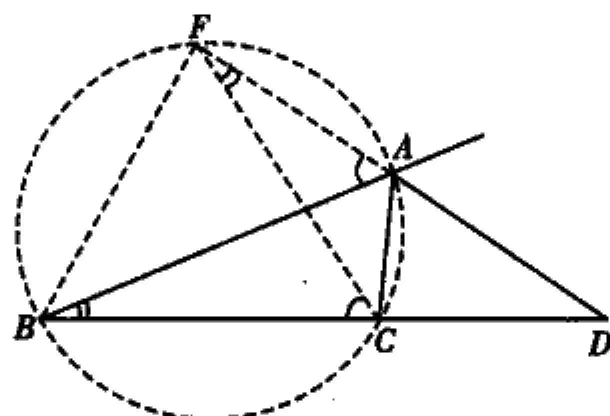


图 4-11

充分性:设直线 AD 交△ABC 的外接圆于 E,连 BE、CE.

由割线定理有 $BD\cdot CD=AD\cdot ED$,并将其代入条件式 $AD^2=BD\cdot CD-AB\cdot AC$ 可得

$AD(ED-AD)=AB\cdot AC$.

由此可知 E 必在 DA 的延长线上(因 $ED-AD>0$).

于是 $AD\cdot AE=AB\cdot AC$. ①

由△ACD∽△BCD,有 $AC\cdot BD=AD\cdot BE$. ②

由①×②得 $AE\cdot BD=AB\cdot BE$. ③

又由△ECD∽△BAD,有 $EC\cdot AD=CD\cdot AB$. ④

由①÷④得,$AE\cdot CD=AC\cdot CE$. ⑤

由③-⑤得,$AE\cdot BC=AB\cdot BE-AC\cdot CE$.

对四边形 $EBCA$ 应用托勒迷定理,有

$AE\cdot BC=AB\cdot CE-AC\cdot BE$.

于是 $AB\cdot CE-AC\cdot BE=AB\cdot BE-AC\cdot CE$.

即$(AB+AC)(CE-BE)=0$,从而 $CE=BE$.

因此∠CAD=∠EBC=∠ECB=∠EAB.

故 AD 平分∠A 的外角.

例 11 如图 4-12,设正△ABC 的内切圆圆心为 I,半径为 r,在⊙I 内任取一点 P,设点 P 到 BC,CA,AB 的距离分别为 d_1,d_2,d_3.求证:以$\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\sqrt{d_3}$为边可以构成

一个三角形,且其面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{r^2 - PI^2}$.　　　　(《数学通报》问题 1356 题)

证明　设正三角形 ABC 的边长为 1,则

$$d_1 + d_2 + d_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, IA = IB = IC = 2r = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

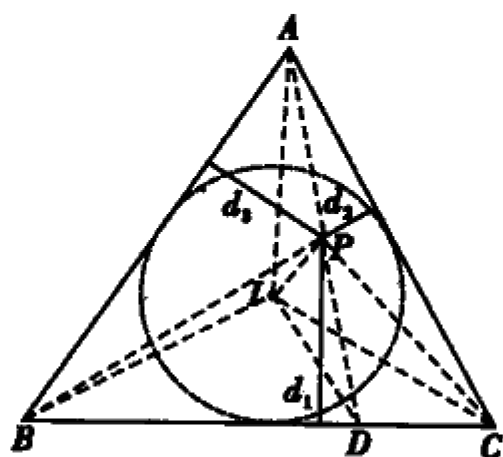


图 4-12

连 AP 并延长交 BC 于 D,则由题设知

$$\frac{BD}{DC} = \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}} = \frac{d_3}{d_2},$$

$$\frac{DP}{PA} = \frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle BAC} - S_{\triangle BPC}} = \frac{d_1}{(d_1 + d_2 + d_3) - d_1} = \frac{d_1}{d_2 + d_3}.$$

由于 $BI = IC, BA = AC$,对$\triangle BIC$ 及边 BC 上的点 D,对$\triangle ABC$ 及边 BC 上的点 D,均应用斯特瓦尔特定理的推论 1,有

$$ID^2 = IB^2 - BD \cdot DC, AD^2 = AB^2 - BD \cdot DC.$$

又由$\frac{BD}{DC} = \frac{d_3}{d_2}$,知 $BD = \frac{d_3}{d_2 + d_3} \cdot BC = \frac{d_3}{d_2 + d_3}, DC = \frac{d_2}{d_2 + d_3}$.

于是 $ID^2 = \frac{1}{3} - \frac{d_2 d_3}{(d_2 + d_3)^2}, AD^2 = 1 - \frac{d_2 d_3}{(d_2 + d_3)^2}$.　①

又对$\triangle AID$ 及边 AD 上的点 P 应用斯特瓦尔特定理,有

$$IP^2 = ID^2 \cdot \frac{PA}{AD} + IA^2 \cdot \frac{DP}{AD} - DP \cdot PA.\quad ②$$

由$\frac{DP}{PA} = \frac{d_1}{d_2 + d_3}$,知$\frac{PA}{AD} = \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2 + d_3}, \frac{DP}{AD} = \frac{d_1}{d_1 + d_2 + d_3}$.

将上述各式及①式代入②式,并注意 $IA = \frac{\sqrt{3}}{3}, d_1 + d_2 + d_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} - 4d_1 = 4d_2 + 4d_3$,有

$$\begin{aligned}
IP^2 &= IA^2 \cdot \frac{DP}{AD} + ID^2 \cdot \frac{PA}{AD} - DP \cdot PA \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_3 + d_3} + [\frac{1}{3} - \frac{d_2 d_3}{(d_2 + d_3)^2}] \cdot \frac{d_2 + d_3}{d_1 + d_2 + d_3} - \frac{DP}{AD} \cdot \frac{PA}{AD} \cdot AD^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{d_1 + d_2 + d_3}{d_1 + d_2 + d_3} - \frac{d_2 d_3}{d_2 + d_3} \cdot \frac{1}{d_1 + d_2 + d_2} - \frac{d_1(d_2 + d_3)}{(d_1 + d_2 + d_3)^2} \cdot [1 - \frac{d_2 d_3}{(d_2 + d_3)^2}] \\
&= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} d_1(d_2 + d_3) - \frac{2\sqrt{3} d_2 d_3 - 4 d_1 d_2 d_3}{3(d_2 + d_3)} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} d_1(d_2 + d_3) - \frac{d_2 d_3 (2\sqrt{3} - 4d_1)}{3(d_2 + d_3)}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3).$$

即 $$IP^2=\frac{1}{3}[1-4(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)].$$

于是,$-d_1^2-d_2^2-d_3^2+2(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)$

$$=-(d_1+d_2+d_3)^2+4(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)$$

$$=-\frac{3}{4}+(1-3IP^2)=3(r^2-IP^2).$$

此式可写成为$(\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3})(\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}-\sqrt{d_1})(\sqrt{d_1}+\sqrt{d_3}-\sqrt{d_2})(\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}-\sqrt{d_3})=3(r^2-IP^2)$. ③

由于 P 点在⊙I 内部,则 $r^2-IP^2>0$,从而,必有

$\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}-\sqrt{d_1}>0,\sqrt{d_1}+\sqrt{d_3}-\sqrt{d_2}>0,\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}-\sqrt{d_3}>0$.如若不然,比如$\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}-\sqrt{d_1}<0,\sqrt{d_1}+\sqrt{d_3}-\sqrt{d_2}<0$,则$(\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}-\sqrt{d_1})+(\sqrt{d_1}+\sqrt{d_3}-\sqrt{d_2})<0$,即$\sqrt{d_3}<0$与已知矛盾,则知$\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}>\sqrt{d_1},\sqrt{d_1}+\sqrt{d_3}>\sqrt{d_2},\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}>\sqrt{d_3}$.

可见,以$\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\sqrt{d_3}$为边可以构成三角形,且由海伦-秦九韶公式及③式知其面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{r^2-PI^2}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 在△ABC 中,$AB=AC=2$,BC 边有 100 个不同的点 $P_1,P_2,\cdots,P_{100}$,记 $m_i=AP_2^2+BP_i\cdot P_iC(i=1,2,\cdots,100)$,求 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}$的值.

2. 在△ABC 中,∠C 的平分线交AB 于D.证明:$CD<\sqrt{CA\cdot CB}$.

(匈牙利中学生数学竞赛题)

3. 在△ABC 中,D 是BC 边上的点,已知 $AB=13,AD=12,AC=15,BD=5$,求 DC.

4. 在△ABC 中,$AB=2\sqrt{2},AC=\sqrt{2},BC=2$,设 P 为BC 边上任一点,则( )

A. $PA^2<PB\cdot PC$　　B. $PA^2=PB\cdot PC$

C. $PA^2>PB\cdot PC$　　D. PA^2 与 $PB\cdot PC$ 的大小关系不确定

5. D 是△ABC 的边 AC 上的一点,且 $AD:DC=2:1$,∠$C=45°$,∠$ADB=60°$,求证:AB

是△BCD 的外接圆的切线.

6. 设△ABC 的三边 $BC=a, CA=b, AB=c, p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. 设 m_a, h_a 分别为 BC 边上的中线长和高线长；t_a, t'_a 分别为 BC 边所对的角的内、外角平分线长. 求证下列各式：

(Ⅰ) $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$；

(Ⅱ) $t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{b\cdot c\cdot p(p-a)}$；

(Ⅲ) $t'_a=\frac{2}{|b-c|}\sqrt{b\cdot c\cdot(p-b)(p-c)}$；

(Ⅳ) $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

7. 在△ABC 中，$AB=2BC$，$\angle B=2\angle A$，求证：△ABC 是直角三角形.
8. 证明：到三角形三顶点的距离的平方和最小的点是重心.

习题 B

1. 设$\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$分别是共线的三点 A, B, C 对于⊙O 所作切线的长. 求证：$a\cdot BC+c\cdot AB-b\cdot AC=BC\cdot AC\cdot AB$.
2. 锐角△ABC 的外接圆过 B, C 的切线相交于 N，点 M 是 BC 的中点. 求证：$\angle BAM=\angle CAN$.
(IMO－26 预选题)
3. PT_1 和 PT_2 是⊙O 的割线，分别交⊙O 于 S_1, S_2，且 $PT_1=PT_2$，过 P 的直线交⊙O 于 Q, R（Q 在 R 与 P 之间），交 T_1T_2, S_1S_2 于 T, S. 求证：$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}=\frac{1}{PS}+\frac{1}{PT}$.
4. A, B, C, D 四点在同一圆周上，且 $BC=DC=4$，$AE=6$，线段 BE 和 DE 的长都是整数，求 BD 的长.
5. 在正方形 $ABCD$ 中，E 在 BC 上，$BE=2$，$CE=1$，P 点在 BD 上，则 PE 和 PC 的长度之和最小可达到多少？
6. 设凸四边形的边长是 a, b, c, d，对角线长是 e 和 f. 求证：$2\min\{a, b, c, d\}\leqslant\sqrt{e^2+f^2}$，当且仅当这个凸四边形是菱形时等号成立.
7. 设 I, O, G, H 分别为△ABC 的内心，外心，重心，垂心，令 $BC=a, CA=b, AB=c$，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，R, r 分别为外接圆和内切圆的半径. 求证下列各式：

(Ⅰ) $a\cdot IA^2+b\cdot IB^2+c\cdot IC^2=abc$；

(Ⅱ) $IO^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c} = R^2 - 2Rr$;

(Ⅲ) $IG^2 = \dfrac{1}{18p}[2a(b^2+c^2)+2b(c^2+a^2)+2c(a^2+b^2)-(a^2+b^2+c^2)-9abc]$

$= \dfrac{2}{3}p^2 - \dfrac{5}{18}(a^2+b^2+c^2) - 4Rr$;

(Ⅳ) $IH^2 = 4R^2 - \dfrac{1}{2p}(a^2+b^2+c^2+abc)$.

8. 已知△ABC 满足∠ACB = 2∠ABC，设 D 是 BC 边上一点，且 $CD = 2BD$. 延长线段 AD 至 E，使 $AD = DE$. 证明：∠$ECB + 180° = 2$∠EBC. （IMO－39 预选题）

第五章 张角定理及应用

【基础知识】

张角定理 设 A,C,B 顺次分别是平面内一点 P 所引三条射线 PA,PC,PB 上的点，线段 AC,CB 对点 P 的张角分别为 α,β，且 $\alpha+\beta<180°$，则 A,C,B 三点共线的充要条件是：$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\dfrac{\sin\alpha}{PB}+\dfrac{\sin\beta}{PA}$.

证明 如图 5-1，A,C,B 三点共线

$\Leftrightarrow S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ACP}+S_{\triangle CBP}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}PA\cdot PB\cdot\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}PA\cdot PC\cdot\sin\alpha+\dfrac{1}{2}PC\cdot PB\cdot\sin\beta$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\dfrac{\sin\alpha}{PB}+\dfrac{\sin\beta}{PA}$.

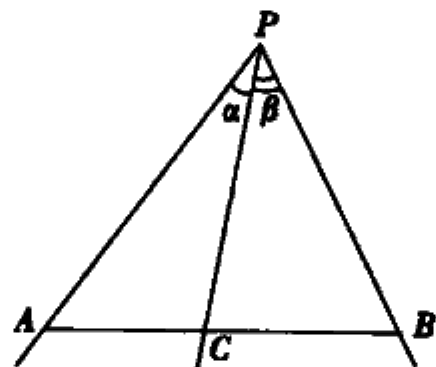


图 5-1

推论 在定理的条件下，且 $\alpha=\beta$，即 PC 平分 $\angle APB$，则 A,C,B 三点共线的充要条件是：$\dfrac{2\cos\alpha}{PC}=\dfrac{1}{PB}+\dfrac{1}{PA}$.

注 若规定角的绕向，逆时针方向为正，否则为负，则上述定理、推论中的点 C 可表示在 AB 的延长线上的情形.

上述定理把平面几何和三角函数紧密相连，它给出了用三角法处理平面几何问题的一个颇为有用的公式.用它去解几何题，适当地配合三角形面积公式、正弦定理、三角公式、几何知识，可以大大简化解题步骤，众多的几何问题可以简捷地解决.

【典型例题与基本方法】

1. 恰当地选择共一端点的两线段对同一视点的两张角，是应用张角定理的关键

例 1 如图 5-2，已知 $ABCD$ 为四边形，两组对边延长后得交点 E,F，对角线 $BD/\!/EF$，AC 的延长线交 EF 于 G.求证：$EG=GF$. （1978 年全国竞赛题）

证明 以 E 为视点，令 $\angle BEC=\alpha$，$\angle CEG=\beta$，分别对 B,C,F；A,D,F 及 A,C,G 应用张角定理，得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EC}=\frac{\sin\alpha}{EF}+\frac{\sin\beta}{EB},\qquad ①$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ED}=\frac{\sin\alpha}{EF}+\frac{\sin\beta}{EA},\qquad ②$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EC}=\frac{\sin\alpha}{EG}+\frac{\sin\beta}{EA}.\qquad ③$$

又由 $BD\parallel EF$，有 $\angle BDE=\beta$，在 $\triangle BED$ 中应用正弦定理，有 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ED}=\frac{\sin\beta}{EB}$. ④

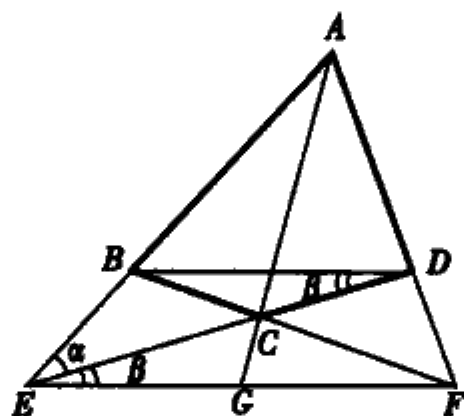


图 5－2

由①＋②－③－④，得 $\frac{2\sin\alpha}{EF}=\frac{\sin\alpha}{EG}$，

$\therefore\quad EF=2EG$，即 $EG=GF$.

例 2 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 对应的三边长分别为 a,b,c，E 为其内切圆圆心，AE 交 BC 于 D. 求证：$\frac{AE}{ED}=\frac{b+c}{a}$. （1979 年广东省竞赛题）

证明 如图 5－3，连 BE 并延长交 AC 于 F，令 $\angle BAE=\alpha$，由于 E 为内心，则 $\angle EAF=\alpha$. 以 A 为视点，分别对 B,E,F 及 B,D,C 应用张角定理的推论，得

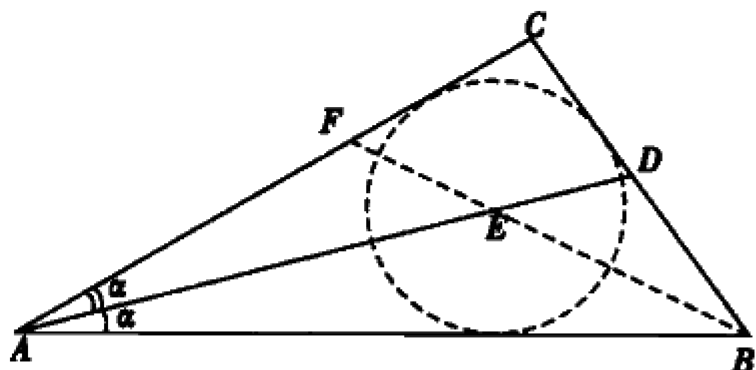


图 5－3

$$\frac{2\cos\alpha}{AE}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AF},\ \frac{2\cos\alpha}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}.$$

上述两式相除，得

$$\frac{AD}{AE}=\frac{AC(AB+AF)}{AF(AC+AB)},$$

而 $\frac{AD}{AE}=\frac{AE+ED}{AE}=1+\frac{ED}{AE}$，

从而
$$\frac{ED}{AE}=\frac{AB(AC-AF)}{AF(AC+AB)}=\frac{AB}{AF}\cdot\frac{CF}{AB+AC}.\qquad ①$$

又 BF 平分 $\angle B$，则 $\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{CF}$，即 $\frac{AB}{AF}=\frac{BC}{CF}$.

于是，由上式代入①式，得 $\frac{ED}{AE}=\frac{BC}{AB+AC}$，故 $\frac{AE}{ED}=\frac{b+c}{a}$.

例 3 如图 5－4，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$. 在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G. 求证：$\angle GAC=\angle EAC$.

（1999 年全国高中联赛题）

证明 作 $\angle CAG'=\angle CAE$，交 BC 于 G'. 只须证 G',F,D 三点共线. 设 $\angle BAC=\angle CAD=\theta$，$\angle CAG'=\angle CAE=\alpha$.

以 A 为视点，分别对 B,F,E；B,G',C；C,E,D 应用张角定理，有

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin\theta}{AE},\qquad ①$$

$$\frac{\sin\theta}{AG'}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC},\qquad ②$$

$$\frac{\sin\theta}{AE}=\frac{\sin\alpha}{AD}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC},\qquad ③$$

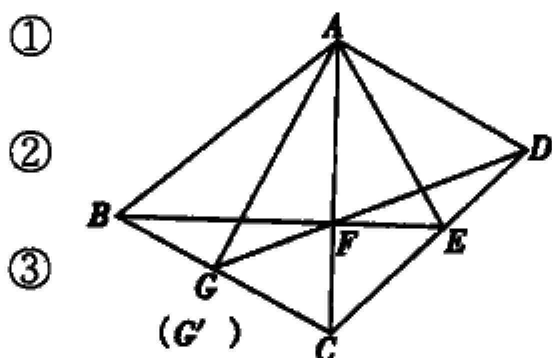


图 5－4

由①－②＋③式，得$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}=\frac{\sin\alpha}{AD}+\frac{\sin\theta}{AG'}$.

又以 A 为视点，对 G'，F，D 应用张角定理，知 G'，F，D 三点共线.

由此，知 G'与 G 重合，故$\angle GAC=\angle EAC$.

例 4 如图 5－5，已知 AM 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线，任作一直线顺次交 AB，AC，AM 于 P，Q，N.求证：$\frac{AB}{AP}$，$\frac{AM}{AN}$，$\frac{AC}{AQ}$成等差数列. （1979 年辽宁省竞赛题）

证明 令$\angle BAM=\alpha$，$\angle MAC=\beta$，$\angle AMB=\theta$.以 A 为视点，分别对 P，N，Q 及 B，M，C 应用张角定理，有

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AN}=\frac{\sin\beta}{AP}+\frac{\sin\alpha}{AQ},\qquad ①$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{\sin\beta}{AB}+\frac{\sin\alpha}{AC}.\qquad ②$$

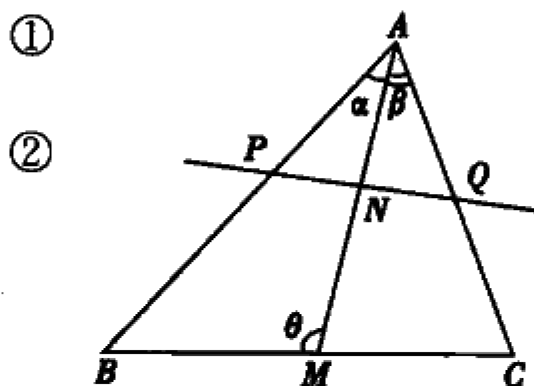


图 5－5

又在$\triangle ABM$ 和$\triangle AMC$ 中，由正弦定理，有

$$\frac{\sin\theta}{AB}=\frac{\sin\alpha}{MB},\ \frac{\sin\theta}{AC}=\frac{\sin\beta}{MC}.$$

注意到 $MB=MC$，上述两式相除得$\frac{\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin\beta}{AB}$.

于是②式变为 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{2\sin\beta}{AB}=\frac{2\sin\alpha}{AC}$.

由①式除以上式，得 $\frac{AM}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}\right)$.

故$\frac{AB}{AP}$，$\frac{AM}{AN}$，$\frac{AC}{AQ}$成等差数列.

2. 找准视点，寻找到与题设条件或结论有关的线段所在的三角形，是灵活应用张角定理的前提.

例 5 如图 5－6，圆的割线 PAB 通过圆心 O，自 P 作圆的任一割线 PCD 交圆于 C，D.又在圆上取一点 E，使$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{BD}$，连 CE 交 AB 于 F.求证：$\frac{2}{AB}=\frac{1}{BP}+\frac{1}{BF}$.

证明 连 AC，BC，令$\angle ECB=\angle 1$，$\angle BCD=\angle 2$，$\angle ACE=\angle 3$，$\angle ACP=\angle 4$，$AC=$

$a, BC = b$.

由 $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD}$，有 $\angle 1 = \angle 2$.

连 BD，由 $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AD}$，有 $\angle 3 = \angle ABD = \angle 4$.

以 C 为视点，考察线段 AB, BP, BF 所在的三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$，分别应用张角定理，有

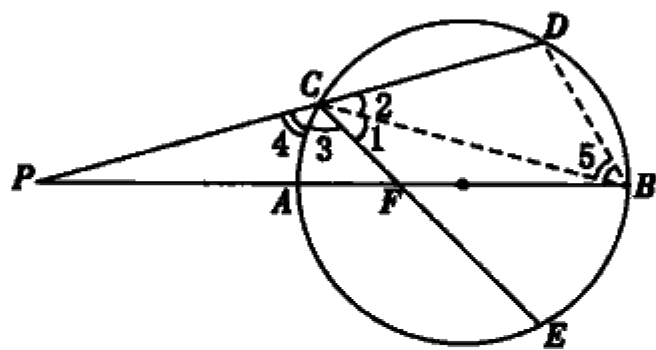


图 5-6

$$\frac{\sin 90^\circ}{CF} = \frac{\sin\angle 1}{a} + \frac{\sin\angle 3}{b},$$

$$\frac{\sin(90^\circ + \angle 4)}{a} = \frac{\sin\angle 4}{b} + \frac{\sin 90^\circ}{CP}.$$

即
$$CF = \frac{ab}{b\sin\angle 1 + a\sin\angle 3} = \frac{ab}{b\cos\angle 3 + a\sin\angle 3},$$

$$CP = \frac{ab}{b\cos\angle 4 - a\sin\angle 4} = \frac{ab}{b\cos\angle 3 - a\sin\angle 3}.$$

由此，知 $b\cos\angle 3 - a\sin\angle 3 > 0$.

在 $\triangle CPB$ 中，由余弦定理，得

$$BP = \left[\left(\frac{ab}{b\cos\angle 3 - a\sin\angle 3}\right)^2 + b^2 - 2\cdot\frac{ab^2}{b\cos\angle 3 - a\sin\angle 3}\cdot\cos(90^\circ + \angle 3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

因 $0 < \angle 3 + \angle 4 < 180^\circ$，则 $0 < \angle 3 = \angle 4 < 90^\circ$，即 $\cos\angle 3 > 0$.

于是，$BP = \left[\dfrac{b^2\cos^2\angle 3\cdot(a^2 + b^2)}{(b\cos\angle 3 - a\sin\angle 3)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{b\cdot\cos\angle 3\cdot\sqrt{a^2 + b^2}}{b\cos\angle 3 - a\sin\angle 3}$.

同理，在 $\triangle CFP$ 中，有 $BF = \dfrac{b\cdot\cos\angle 3\cdot\sqrt{a^2 + b^2}}{b\cos\angle 3 + a\sin\angle 3}$.

又在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$，

故 $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{1}{BP} + \dfrac{1}{BF}$.

【解题思维策略分析】

1. 给出著名问题的一种新证法

例 6（斯坦纳定理） 在 $\triangle ABC$ 中，BD, CE 分别是 $\angle ABC, \angle ACB$ 的平分线. 若 $BD = CE$，则 $AB = AC$.

证明 如图 5-7，令 $\angle ABD = \angle DBC = \alpha, \angle BCE = \angle ACE = \beta$，分别以 B, C 为视点，对 $\triangle ABC$ 应用张角定理的推论，有 $\dfrac{2\cos\alpha}{BD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC}, \dfrac{2\cos\beta}{CE} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BC}$.

亦有 $\dfrac{2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha}{AB + BC} = BD = CE = \dfrac{2AC\cdot BC\cdot\cos\beta}{AC + BC}$，

亦即 $\dfrac{AB(AC+BC)}{AC(AB+BC)}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

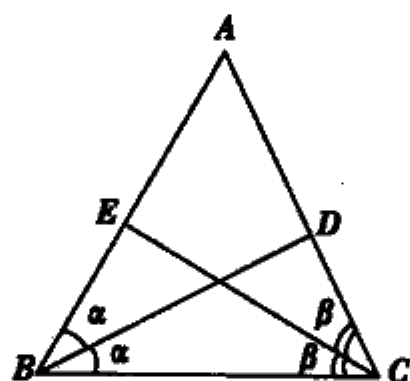


图 5-7

对上式应用分比定理,把 $\cos\beta-\cos\alpha$ 化为积,并变形可得

$$AB-AC=-\frac{2AC(AB+BC)}{BC\cdot\cos\alpha}\cdot\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \quad ①$$

显然,$\alpha,\beta,|\alpha\pm\beta|$均只能为锐角.

若 $AB>AC$,则①式左端为正,而右端为负,

若 $AB<AC$,则①式左端为负,而右端为正.

所以 $AB=AC$.

例 7(蝴蝶定理) 已知 M 是⊙O 的弦 AB 的中点,过 M 任作两弦 CD,EF,连 CF,DE 分别交 AB 于 G,H,则 $MH=MG$.

证明 如图 5-8,令$\angle AMF=\angle BME=\alpha$,$\angle BMD=\angle AMC=\beta$.以 M 为视点,对$\triangle MDE$ 和$\triangle MCF$ 分别应用张角定理,有

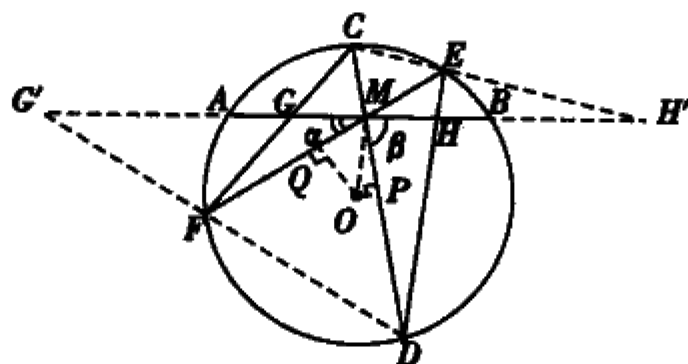


图 5-8

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MH}=\frac{\sin\beta}{ME}+\frac{\sin\alpha}{MD},$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MG}=\frac{\sin\beta}{MF}+\frac{\sin\alpha}{MC}.$$

上述两式相减,得

$$\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{MH}-\frac{1}{MG}\right)=\frac{\sin\beta}{ME\cdot MF}(MF-ME)-\frac{\sin\alpha}{MC\cdot MD}(MD-MC).$$

设 P,Q 分别是 CD,EF 的中点,由 $OM\perp AB$,有

$$\begin{cases}MD-MC=2MP=2OM\cdot\cos(90^\circ-\beta)=2OM\cdot\sin\beta,\\ MF-ME=2MQ=2OM\cdot\cos(90^\circ-\alpha)=2OM\cdot\sin\alpha.\end{cases}$$

于是,$\sin(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{MH}-\dfrac{1}{MG}\right)=0$.

而 $\alpha+\beta\neq180^\circ$,知 $\sin(\alpha+\beta)\neq0$.故 $MH=MG$.

注 类似地应用张角定理,可证明如图 5-8 中的 $AG'=BH'$.

2. 获得线段倍分关系的一种途径

例 8 已知 G 是$\triangle ABC$ 的重心,过 G 作直线分别交$\triangle ABC$ 的两边 AB,AC 于 E,F.求证:$EG\leqslant2GF$.

证明 如图 5-9,作中线 BGM,CGN,令$\angle MGF=\angle BGE=\alpha$,$\angle CGF=\angle NGE=\beta$.

以 G 为视点,分别对$\triangle GCM$,$\triangle BGN$ 应用张角定理,有$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{GF}=\dfrac{\sin\beta}{MG}+\dfrac{\sin\alpha}{GC}$,

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EG}=\frac{\sin\beta}{BG}+\frac{\sin\alpha}{NG}.$$

注意到，$BG=2GM$，$GC=2NG$，则

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{GF}=\frac{\sin\beta}{GM}+\frac{\sin\alpha}{2GN},\quad ①$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EG}=\frac{\sin\beta}{2GM}+\frac{\sin\alpha}{GN}.\quad ②$$

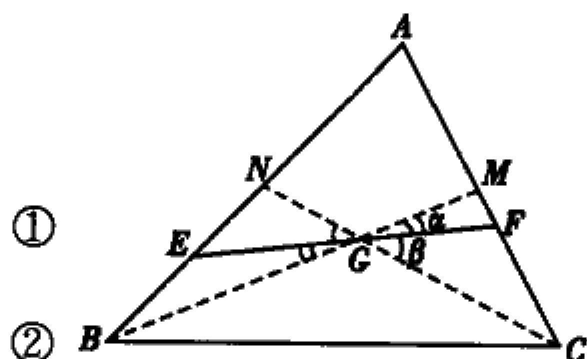


图 5－9

$①\cdot\frac{1}{2}-②$，得

$$\left(\frac{1}{2GF}-\frac{1}{EG}\right)\cdot\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\alpha}{GN}\leqslant 0.$$

而　$\sin(\alpha+\beta)>0(0<\alpha+\beta<90°)$，

故　$\frac{1}{EG}-\frac{1}{2GF}\geqslant 0$，即 $EG\leqslant 2GF$.

例 9　如图 5－10，平行四边形 $ABCD$ 中，在 AB 边上取一点 P，使 $AB=3AP$，在边 AD 上取点 Q，使 $AD=4AQ$，且 PQ 交 AC 于 M. 求证：$AC=7AM$.

证明　连 BD 交 AC 于 O，则 $AO=\frac{1}{2}AC$. 令 $\angle DAM=\alpha$，$\angle BAM=\beta$，$AB=3a$，$AD=4b$. 以 A 为视点，分别对 $\triangle APQ$ 和 $\triangle ABD$ 应用张角定理，有

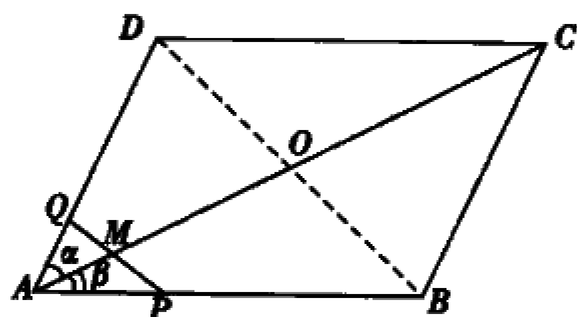


图 5－10

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{\sin\alpha}{a}+\frac{\sin\beta}{b}=\frac{b\cdot\sin\alpha+a\cdot\sin\beta}{ab},$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AO}=\frac{\sin\alpha}{3a}+\frac{\sin\beta}{4b}=\frac{4b\cdot\sin\alpha+3a\cdot\sin\beta}{12ab}.$$

因 $S_{\triangle ADO}=S_{\triangle ABO}$，则 $4b\cdot\sin\alpha=3a\cdot\sin\beta$.

于是，$\frac{AM}{AO}=\frac{4b\cdot\sin\alpha+3a\cdot\sin\beta}{12b\cdot\sin\alpha+12a\cdot\sin\beta}=\frac{6a\cdot\sin\beta}{9a\cdot\sin\beta+12a\cdot\sin\beta}=\frac{2}{7}$.

故 $AC=7AM$.

例 10　如图 5－11，筝形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$BC=DC$. 经过 AC 与 BD 的交点 O 任作两条直线，分别交 AD 于 E，交 BC 于 F，交 AB 于 G，交 CD 于 H，GF，EH 分别交 BD 于 I，J. 求证：$OI=OJ$.　　（CMO－5 试题）

证明　令 $\angle AOE=\alpha$，$\angle EOD=\beta$，$\angle DOH=\gamma$，$\angle COH=\delta$. 由题设，知 AC 垂直平分 BD 于 O，以 O 为视点，考虑分别在 OJ，OI 所在的三角形 $\triangle EOH$ 及 $\triangle GOF$ 中应用张角定理.

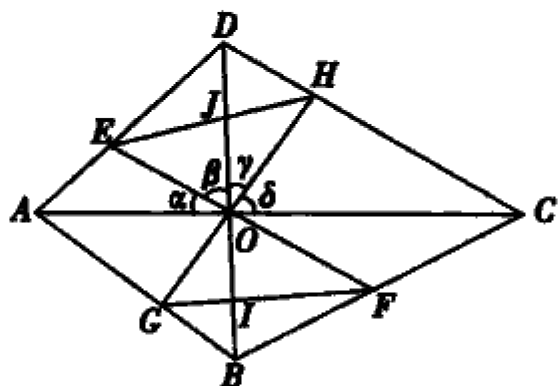


图 5－11

但在△EOH 中，涉及 OE，OH，于是，又在△AOD，△COD 及△EOH 中分别应用张角定理，有$\frac{\sin90^\circ}{OE}=\frac{\sin\alpha}{OD}+\frac{\sin\beta}{OA}$，$\frac{\sin90^\circ}{OH}=\frac{\sin\gamma}{OC}+\frac{\sin\delta}{OD}$，$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{OJ}=\frac{\sin\beta}{OH}+\frac{\sin\gamma}{OE}$.

由上述三式，有

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{OJ}=\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{OC}+\frac{\sin\beta\cdot\sin\delta}{OD}+\frac{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{OD}+\frac{\sin\gamma\cdot\sin\beta}{OA}.$$

同理，在△AOB，△COB 及△GOE 中分别应用张角定理，有

$$\frac{\sin(\gamma+\beta)}{OI}=\frac{\sin\gamma\cdot\sin\beta}{OC}+\frac{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{OB}+\frac{\sin\beta\cdot\sin\delta}{OB}+\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{OA}.$$

注意到 $OD=OB$，则有$\frac{1}{OJ}=\frac{1}{OI}$，故 $OI=OJ$.

3. 证明线段比例关系式的一种方法

例 11 如图 5-12，已知 AD，AE 分别是△ABC 的内外角平分线，点 D 在 BC 边上，点 E 在 BC 边的延长线上. 求证：$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{DE}$.

证明 设 $AD=a$，$AE=b$，$\angle BAD=\angle DAC=\alpha$. 以 A 为视点，分别对△ADE 和△ABE 应用张定理，得 $\frac{\sin90^\circ}{AC}=\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{a}$，$\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{a}=\frac{\sin90^\circ}{AB}+\frac{\sin\alpha}{b}$.

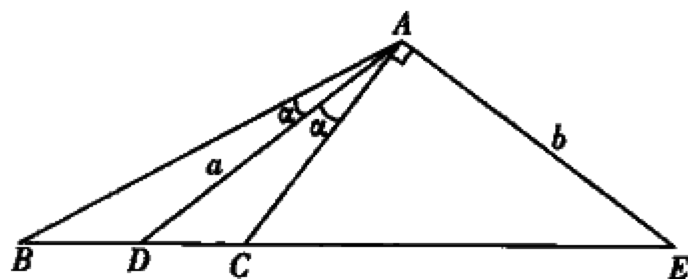


图 5-12

于是 $AC=\frac{ab}{b\cos\alpha+a\sin\alpha}$，$AB=\frac{ab}{b\cos\alpha-a\sin\alpha}$.

在△ABE 中，由余弦定理，并注意

$\cos\alpha>0$，$b\cos\alpha-a\sin\alpha>0(AB>0)$，

有 $BE=\sqrt{AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cdot\cos(90^\circ+\alpha)}$

$$=\sqrt{\frac{b^2\cdot\cos^2\alpha\cdot(a^2+b^2)}{(b\cos\alpha-a\sin\alpha)^2}}=\frac{b\cos\alpha\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{b\cos\alpha-a\sin\alpha}.$$

同理，在△ACE 中，求得 $CE=\frac{b\cos\alpha\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{b\cos\alpha+a\sin\alpha}$.

而在 Rt△ADE 中，$DE=\sqrt{a^2+b^2}$.

故 $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2b\cos\alpha}{b\cdot\cos\alpha\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{DE}$.

注 $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{DE}$表示 DE 被 B、C 调和分割(即$\frac{DB}{DC}=\frac{BE}{CE}$).

用张角定理也可以证明如下调和分割问题：

凸四边形 $ABDF$ 的两组对边延长相交于点 C，E，直线 AD 交 BF 于 M，交 CE 于点 N，则 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AD}$ 或 $\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$.

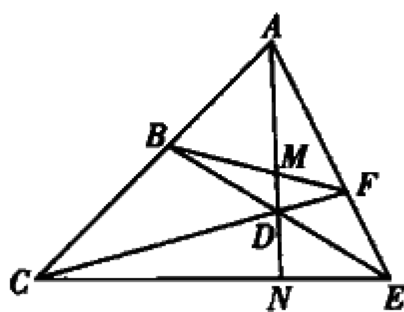


图 5－13

事实上，如图 5－13，令 $\angle CAN=\alpha$，$\angle NAE=\beta$，以 A 为视点，分别对 $\triangle ABF$，$\triangle ABE$，$\triangle ACF$，$\triangle ACE$ 应用张角定理，有

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}=\frac{\sin\alpha}{AF}+\frac{\sin\beta}{AB},\ \frac{\sin(\alpha+\beta)}{AD}=\frac{\sin\alpha}{AE}+\frac{\sin\beta}{AB},$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AD}=\frac{\sin\alpha}{AF}+\frac{\sin\beta}{AC},\ \frac{\sin(\alpha+\beta)}{AN}=\frac{\sin\alpha}{AE}+\frac{\sin\beta}{AC}.$$

上述第一式与第四式相减后减去其余两式，得

$$\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}\right)=\frac{2}{AD}\cdot\sin(\alpha+\beta).$$

而 $\sin(\alpha+\beta)\neq0$，故 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AD}$.

或由 $\frac{AD}{AM}+\frac{AD}{AN}=2=\frac{AM}{AM}+\frac{AN}{AN}$ 得 $\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$.

这个调和分割问题可以参见第九章中的性质 2.

例 12 如图 5－14，设 I，H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心，点 B_1，C_1 分别为边 AC，AB 的中点．已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$，射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2，B_2C_2 与 BC 相交于 K，A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心．试证：A，I，A_1 三点共线的充分必要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKK_2$ 的面积相等． （CMO－18 试题）

证明 首先证明：$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKK_2}\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ$.

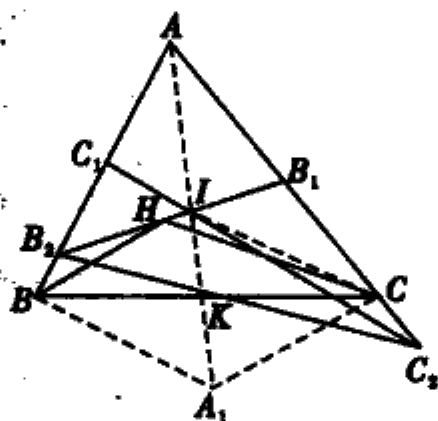


图 5－14

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，连 IC，在 $\triangle ACI$ 与 $\triangle ABC$ 中运用正弦定理，有 $\frac{AI}{\sin\frac{1}{2}\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle AIC}=\frac{AC}{\cos\frac{1}{2}\angle B}=4R\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B$，即 $AI=4R\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C$.

又 $AB_1=\frac{1}{2}AC=R\cdot\sin\angle B$.

在 $\triangle AB_1B_2$ 中，注意 AI 平分 $\angle A$，以 A 为视点，在此三角形中应用张角定理的推论，有 $\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle A}{AI}=\frac{1}{AB_1}+\frac{1}{AB_2}$,

即有 $AB_2=\dfrac{1}{\dfrac{2\cos\frac{1}{2}\angle A}{AI}-\dfrac{1}{AB_1}}=\dfrac{2R\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C}{\cos\frac{1}{2}\angle A\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B-\sin\frac{1}{2}\angle C}$

$$=\frac{2R\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C}{\sin\frac{1}{2}\angle A}.$$

同理，$AC_2=\dfrac{2R\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B}{\sin\frac{1}{2}\angle A}$.

从而 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow AB\cdot AC=AB_2\cdot AC_2$

$$\Leftrightarrow\sin\angle C\cdot\sin\angle B=\frac{\sin\frac{1}{2}\angle C\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B}{\sin\frac{1}{2}\angle A}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\angle B\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C}{\sin\frac{1}{2}\angle A}$$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\dfrac{\angle A}{2}=1$，注意到$\angle A$ 为三角形内角$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

其次，再证$\angle BAC=60°\Leftrightarrow A,I,A_1$ 三点共线.

连 BA_1,CA_1，在$\triangle ABA_1$ 和$\triangle ACA_1$ 中分别应用正弦定理，有

$$\frac{A_1A}{\sin\angle ABA_1}=\frac{A_1B}{\sin\angle A_1AB},\ \frac{A_1A}{\sin\angle ACA_1}=\frac{A_1C}{\sin\angle A_1AC}.$$

因 I 为$\triangle ABC$ 的内心，A,I,A_1 共线$\Leftrightarrow\angle A_1AB=\angle A_1AC\Leftrightarrow\angle ABA_1$ 与$\angle ACA_1$ 均为锐角，$\sin\angle ABA_1=\sin\angle ACA_1\Leftrightarrow\angle ABA_1\neq\angle ACA_1$（因 $AB\neq AC$）时，$\angle ABA_1+\angle ACA_1=180°\Leftrightarrow A,B,A_1,C$ 四点共圆.

注意到$\odot A_1$ 中圆周角与圆心角的关系，有$\angle BA_1C=360°-2\angle BHC=360°-2(180°-\angle A)=2\angle A$，且$\angle BA_1C+\angle A=180°\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

4. 证明三点共线的又一个工具

例 13 如图 5－15，已知 AB 是圆的直径，PA,PC 是圆的切线，A,C 为切点．作$CD\perp AB$ 于D，Q 为 CD 的中点．求证：P,Q,B 三点共线.

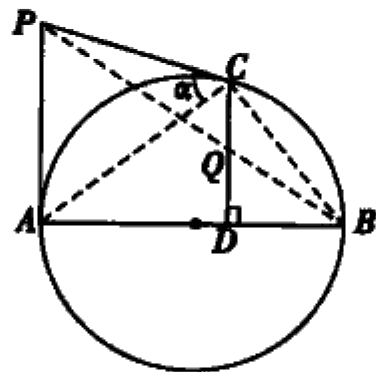


图 5－15

证明 以 C 为视点，考察线段 PQ,QB 所张的角的情形.

连 AC,BC，则$\angle ACB=90°$，令$\angle PCA=\alpha$，则$\angle CBA=\angle ACD=\alpha$，令 $PC=a$，易知 $AC=2a\cdot\cos\alpha$，$BC=AC\cdot\cot\alpha=$

$2a\cdot\cos\alpha\cdot\cot\alpha$, $CD=BC\cdot\sin\alpha=2a\cdot\cos^2\alpha$, $CQ=a\cdot\cos^2\alpha$.

所以 $\dfrac{\sin\angle PCB}{CQ}=\dfrac{\sin(90°+\alpha)}{CQ}=\dfrac{\cos\alpha}{a\cdot\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{a\cdot\cos\alpha}$,

$$\frac{\sin\angle PCQ}{CB}+\frac{\sin\angle QCB}{CP}=\frac{\sin2\alpha}{2a\cos\alpha\cdot\cot\alpha}+\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin^2\alpha}{a\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{a}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{a\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{a\cdot\cos\alpha}.$$

故 $\dfrac{\sin\angle PCB}{CQ}=\dfrac{\sin\angle PCQ}{CB}+\dfrac{\sin\angle QCB}{CP}$.

由张角定理,知 P,Q,B 三点共线.

例 14 如图 5-16,在线段 AB 上取内分点 M,使 $AM\leqslant BM$,分别以 MA,MB 为边,在 AB 的同侧作正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$,$\odot P$ 和 $\odot Q$ 分别是这两个正方形的外接圆,两圆交于 M,N.求证:B,C,N 三点共线.

(IMO-1 试题)

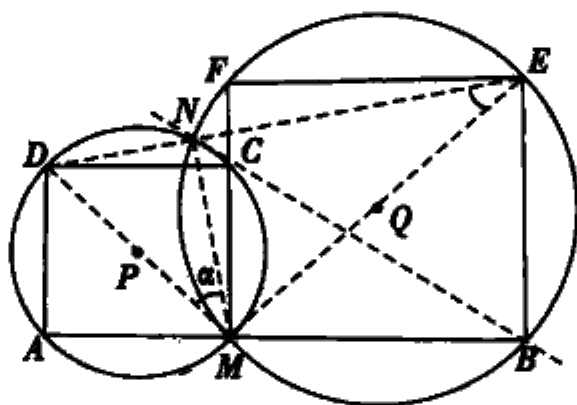


图 5-16

证明 连 MD,ME,NE,ND,NM,则 $\angle DNM=\angle ENM=90°$,则 D,N,E 三点共线,注意$\angle DME=45°+45°=90°$.

设$\angle DMN=\angle NEM=\alpha$,$\odot P,\odot Q$ 的半径分别为 r_1,r_2,则 $MC=\sqrt{2}r_1$,$MB=\sqrt{2}r_2$,$MN=2r_1\cdot\cos\alpha=2r_2\cdot\sin\alpha$.对视点 M,考察点 B,C,N 所在的三角形$\triangle MBN$.由

$$\frac{\sin\angle CMB}{MN}+\frac{\sin\angle CMN}{MB}=\frac{\sin90°}{2r_2\sin\alpha}+\frac{\sin(45°-\alpha)}{\sqrt{2}r_2}=\frac{1+\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\sin(45°-\alpha)}{2r_2\cdot\sin\alpha}$$
$$=\frac{1+\sin\alpha\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)}{2r_1\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2r_1\cos\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2r_1}=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos(45°-\alpha)}{2r_1}=\frac{\cos(45°-\alpha)}{\sqrt{2}r_1}$$
$$=\frac{\sin(90°+45°-\alpha)}{\sqrt{2}r_1}=\frac{\sin\angle NMB}{MC}.$$

应用张角定理,即知 B,C,N 三点共线.

例 15 如图 5-17,在$\triangle ABC$ 中,令$\angle A=\alpha$,$\angle B=\beta$,$\angle C=\gamma$,且 $\alpha>\beta$,AD,BE,CF 是它的三条垂线;AP,BQ 是两条角平分线;I,O 分别是它的内心和外心.证明:点 D,I,E 共线当且仅当 P,O,Q 共线,当且仅当 O,I,F 共线.

(IMO-38 预选题或由 1998 年全国高中联赛题改编)

证明 由于外心 O 有在$\triangle ABC$ 内、外、边上三种情形,故须对 α 分三种情况讨论.

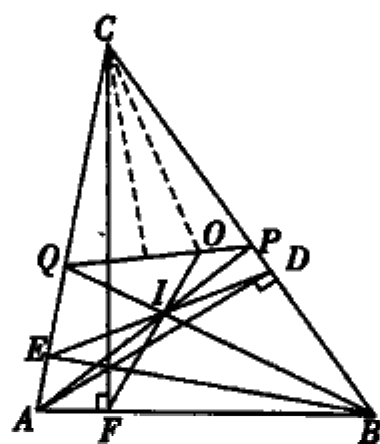


图 5－17

（Ⅰ）当 α 为锐角时.

设△ABC 的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，令 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，连 CO，CI，则 $CP=\dfrac{ab}{b+c}$，$CQ=\dfrac{ab}{a+c}$，$\angle OCQ=\dfrac{\pi}{2}-\beta$，$\angle OCP=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$CD=b\cdot\cos\gamma$，$CE=a\cdot\cos\gamma$，$CI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}$，$\angle OCI=\angle ICF=\dfrac{\pi}{2}-\beta-\dfrac{\gamma}{2}$（或 $\dfrac{\gamma}{2}+\alpha-\dfrac{\pi}{2}$），$\angle OCF=\pi-2\beta-\gamma$（或 $\gamma+2\alpha-\pi$）.

以 C 为视点，分别考察△PCQ，△DCE，△OCF，并应用张角定理.

P,O,Q 共线 $\Leftrightarrow\dfrac{\sin\gamma}{OC}=\dfrac{\sin\angle OCP}{CQ}+\dfrac{\sin\angle OCQ}{CP}$

$\Leftrightarrow ab\cdot\sin\gamma=R[(a+c)\cdot\cos\alpha+(b+c)\cdot\cos\beta]$

$\Leftrightarrow 4R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=R^2[\sin2\alpha+\sin2\beta+2\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)]$

$\Leftrightarrow R^2(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)=R^2[\sin2\alpha+\sin2\beta+2\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)]$

$\Leftrightarrow\sin2\gamma=2\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)\Leftrightarrow\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta$.

D,I,E 共线 $\Leftrightarrow\dfrac{\sin\gamma}{CI}=\dfrac{\sin\dfrac{\gamma}{2}}{CD}+\dfrac{\sin\dfrac{\gamma}{2}}{CE}\Leftrightarrow ab\sin\gamma\cdot\cos\gamma=r(a+b)$

$\Leftrightarrow r(a+b+c)\cdot\cos\gamma=r(a+b)\quad\Leftrightarrow\quad(a+b)(1-\cos\gamma)=c\cdot\cos\gamma$

$\Leftrightarrow(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\cos\gamma)=\sin\gamma\cdot\cos\gamma$

$\Leftrightarrow 2\cos\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot2\sin^2\dfrac{\gamma}{2}=\sin\gamma\cdot\cos\gamma$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\cos\gamma\Leftrightarrow\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta$.

O,I,F 共线 $\Leftrightarrow\dfrac{\sin\angle OCF}{CI}=\dfrac{\sin\angle OCI}{CF}+\dfrac{\sin\angle ICF}{CO}$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sin(2\beta+\gamma)}{CI}=\dfrac{\cos(\beta+\dfrac{\gamma}{2})}{a\cdot\sin\beta}+\dfrac{\cos(\beta+\dfrac{\gamma}{2})}{R}\Leftrightarrow 2\sin(\beta+\dfrac{\gamma}{2})=\dfrac{CI}{2R\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\dfrac{r}{2R\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\dfrac{r}{R\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}}$（注意 $\beta+\dfrac{\gamma}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}$，$r=4R\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$）

$\Leftrightarrow 2\sin(\beta+\dfrac{\gamma}{2})=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}}+4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}$

$\Leftrightarrow 4\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=1+2\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\Leftrightarrow \sin(\beta+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2})+\sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2})+\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2})+\sin(\beta-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})$

$=1+\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow \cos\beta+\cos\alpha+1+\cos(\alpha-\beta)=1+\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma \Leftrightarrow \cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta$.

因此，D,I,E 共线$\Leftrightarrow P,O,Q$ 共线$\Leftrightarrow O,I,F$ 共线.

（Ⅱ）当 α 为钝角时，注意$\angle OCP=\alpha-\frac{\pi}{2}$，依照（Ⅰ）类似证明.

（Ⅲ）当 α 为直角时，易证点 D,I,E 共线当且仅当$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；点 P,O,Q 共线当且仅当$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；点 O,I,F 共线当且仅当$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.综合即证.

注 在$\triangle ABC$ 中，可证得：$\cos\angle C=\cos\angle A+\cos\angle B$，当且仅当$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 AB 边上的旁切圆半径.因此本例题还等价于$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 AB 边上的旁切圆半径，此为 1998 年全国高中联赛平面几何题结论.

5. 注意张角定理与斯特瓦尔特定理的等价性

例 16 如图 5－18，设 B,P,C 依次分别为从 A 点引出的三条射线 AB,AP,AC 上的点.线段 BP,PC 对点 A 的张角分别为 α，β，且 $\alpha+\beta<180°$，则 B,P,C 三点共线的下述两个充要条件等价：

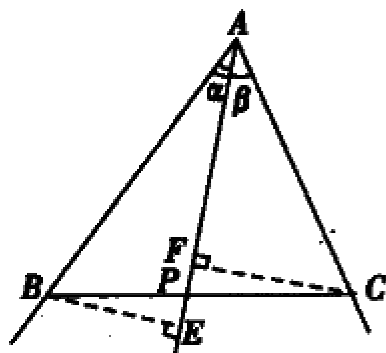


图 5－18

（Ⅰ）$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}$（张角定理）；

（Ⅱ）$AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC$（斯特瓦尔特定理）.

证明 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}\Leftrightarrow AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha+\beta)=AP\cdot AB\cdot\sin\alpha+AP\cdot AC\cdot\sin\beta$

$\Leftrightarrow AB\cdot AC\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta+AB\cdot AC\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=AP\cdot AB\cdot\sin\alpha+AP\cdot AC\cdot\sin\beta$.

作 $BE\perp$射线 AP 于 E，作 $CF\perp$射线 AP 于 F，则

$\frac{AB\cdot\sin\alpha}{AC\cdot\sin\beta}=\frac{BE}{CF}=\frac{BP}{PC}=\frac{k\cdot BP}{k\cdot PC}$

$\Leftrightarrow AC\cdot\cos\beta\cdot k\cdot BP+AB\cdot\cos\alpha\cdot k\cdot PC=AP\cdot k\cdot BP+AP\cdot k\cdot PC=AP\cdot k\cdot BC$

$\Leftrightarrow AP\cdot AC\cdot BP\cdot\frac{AC^2+AP^2-PC^2}{2AC\cdot AP}+AP\cdot AB\cdot PC\cdot\frac{AB^2+AP^2-BP^2}{2AB\cdot AP}=AP^2\cdot BC$

$\Leftrightarrow AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC$.

【模拟实战】

习题 A

1. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，M 为 BC 中点，$DE\perp$射线 AM 于 E，求 DE 之长.（用 a，b 表示）
2. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 为 BC 边上的高，AD 的中点为 M，CM 的延长线交 AB 于 K. 求证：$AB=3AK$.
3. 已知 $AC\perp AB$，$BD\perp AB$，AD 和 BC 相交于点 E，$EF\perp AB$ 于 F. 又 $AC=p$，$BD=q$，$EF=r$，$AF=m$，$FB=n$. 求证：$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$.
4. 梯形 $ABCD$($AB/\!/DC$)的对角线 AC，BD 相交于 P，过 P 作梯形下底的平行线交两腰 AD 于 M，BC 于 N. 求证：$PM=PN$.
5. 设$\angle XOY$ 的平分线上任一点为 P，过 P 作两条任意直线 AB，CD，分别交 OX，OY 于 A，C，B，D. 求证：$OC\cdot OA\cdot BD=OB\cdot OD\cdot AC$.
6. 直线 l 的同侧有三个相邻的等边三角形$\triangle ADE$，$\triangle AFG$，$\triangle ABC$，且 G，A，B 都在直线 l 上. 设这三个三角形的边长依次为 b，c，a，连 GD 交 AE 于 N，连 BN 交 AC 于 L. 求证：$AL=\frac{abc}{ab+bc+ac}$.
7. 在$\odot O$ 中，过弦 GH 的中点 M 作弦 AB，CD，令$\angle AMG=\alpha$，$\angle CMG=\beta$. 求证：$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{MB-MA}{MC-MD}$.
8. 在平行四边形 $ABCD$ 的 CD 边上取一点 P，使 $CP:PD=1:2$，在对角线上取一点 Q，使 $CQ:QA=1:3$. 求证：B，Q，P 三点共线.

习题 B

1. 已知四边形 $ABCD$ 两组对边的延长线分别交于 K，L. 过 K，L 作直线，对角线 AC，BD 之延长线分别交 KL 于 G，F. 求证：$\frac{1}{KF}$，$\frac{1}{KL}$，$\frac{1}{KG}$成等差数列.
2. 在锐角三角形 ABC 中，$AC>AB$. 求证：$\angle B$ 的平分线 BD 小于$\angle C$ 的平分线 CE.
3. 在$\odot O$ 内，直径 $AOB\perp$半径 OC，$\odot O'$与 OB，OC 相切于 D，E，并与$\odot O$ 内切于 F. 求证：A，E，F 三点共线.

4. 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，△ADC 和△CDB 的内心分别为 O_1，O_2，O_1O_2 与 CD 交于 K. 求证：$\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{CK}$.

5. 设 P 为△ABC 内任一点，顶点 A，B，C 与 P 的连线分别与 BC，CA，AB 交于点 D，E，F. P'为△DEF 周界上任一点，过 P' 作 PD，PE，PF 的平行线分别与 BC，CA，AB 交于 D'，E'，F'. 证明：在比值$\frac{P'D'}{PD}$，$\frac{P'E'}{PE}$，$\frac{P'F'}{PF}$中必有一个等于另两个的和.

第六章　西姆松定理及应用

【基础知识】

西姆松定理　过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边的垂线，则三垂足点共线(此线常称为西姆松线).

证明　如图 6-1，设 P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上任一点，从 P 向三边 BC,CA,AB 所在直线作垂线，垂足分别为 L,M,N. 连 PA,PC，由 P,N,A,M 四点共圆，有 $\angle PMN=\angle PAN=\angle PAB=\angle PCB=\angle PCL$.

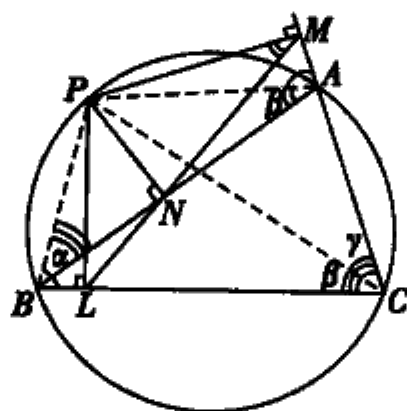


图 6-1

又 P,M,C,L 四点共圆，有 $\angle PML=\angle PCL$.

故　$\angle PMN=\angle PML$，即 L,N,M 三点共线.

注　此定理有许多证法.例如，如下证法：

如图 6-1，连 PB，令 $\angle PBC=\alpha,\angle PCB=\beta,\angle PCM=\gamma$，则 $\angle PAM=\alpha,\angle PAN=\beta,\angle PBN=\gamma$，且 $BL=PB\cdot\cos\alpha,LC=PC\cdot\cos\beta,CM=PC\cdot\cos\gamma$，$MA=PA\cdot\cos\alpha,AN=PA\cdot\cos\beta,NB=PB\cdot\cos\gamma$. 对 $\triangle ABC$，有 $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{PB\cdot\cos\alpha}{PC\cdot\cos\beta}\cdot\frac{PC\cdot\cos\gamma}{PA\cdot\cos\alpha}\cdot\frac{PA\cdot\cos\beta}{PB\cdot\cos\gamma}=1$. 故由梅涅劳斯定理之逆定理，知 L,N,M 三点共线.

西姆松定理还可运用托勒迷定理、张角定理、斯特瓦尔特定理来证(略).

西姆松定理的逆定理　若一点在三角形三边所在直线上的射影共线，则该点在此三角形的外接圆上.

证明　如图 6-1，设点 P 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 所在直线上的射影分别为 L,M,N，且此三点共线.由 $PN\perp AB$ 于 N，$PM\perp AC$ 于 M，$PL\perp BC$ 于 L，知 P,B,L,N 及 P,N,A,M 分别四点共圆，而 AB 与 LM 相交于 N，则 $\angle PBC=\angle PBL=\angle PNM=\angle PAM$，从而 P,B,C,A 四点共圆，即点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

【典型例题与基本方法】

1. 找到或作出三角形外接圆上一点在三边上的射影，是应用西姆松定理的关键

例 1　如图 6-2，过正 $\triangle ABC$ 外接圆的 $\overset{\frown}{AC}$ 上点 P 作 $PD\perp$ 直线 AB 于 D，作 $PE\perp AC$

于 E,作 $PF\perp BC$ 于 F.求证:$\frac{1}{PF}+\frac{1}{PD}=\frac{1}{PE}$.

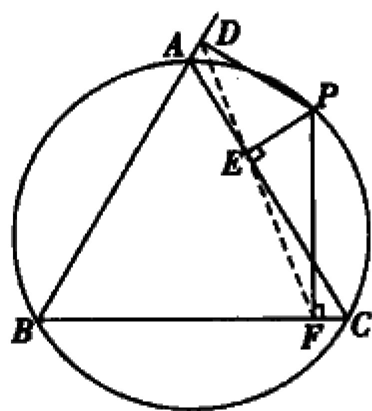


图 6-2

证明 由 $PD\perp$直线 AB 于 D,$PE\perp AC$ 于 E,$PF\perp BC$ 于 F,知 A,E,P,D 及 E,F,C,P 分别四点共圆,则$\angle DPE=\angle BAE=60°$,$\angle EPF=\angle ECF=60°$.

由西姆松定理,知 D,E,F 三点共线,从而以 P 为视点,对$\triangle PDF$ 应用张角定理,有$\frac{\sin\angle DPF}{PE}=\frac{\sin\angle DPE}{PF}+\frac{\sin\angle EPF}{PD}$,即

$\frac{\sin120°}{PE}=\frac{\sin60°}{PF}+\frac{\sin60°}{PD}$,故$\frac{1}{PF}+\frac{1}{PD}=\frac{1}{PE}$.

例 2 如图 6-3,设 AD,BE,CF 为$\triangle ABC$ 的三条高线,自 D 点作 $DP\perp AB$ 于 P,$DQ\perp BE$ 于 Q,$DR\perp CF$ 于 R,$DS\perp AC$ 于 S,连 PS.求证:Q,R 在直线 PS 上.

证明 由于$\triangle BFH$ 的外接圆为$\odot BDHF$,而 D 为该圆上一点,且 D 在$\triangle BFH$ 三边所在直线上的射影分别为 P,Q,R,于是,由西姆松定理知 P,Q,R 三点共线.

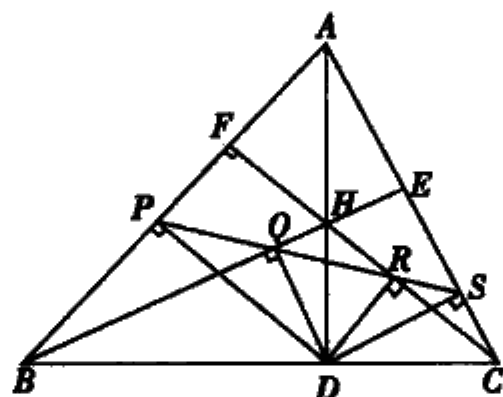


图 6-3

同理,可证 Q,R,S 是$\triangle HEC$ 的西姆线上三点.

由于直线 PQR 与直线 QRS 有两个公共点 Q,R,所以这两直线重合,故 Q,R 在直线 PS 上.

例 3 如图 6-4,设 P 为$\triangle ABC$ 外接圆上一点,作 $PA'\perp BC$ 交圆周于 A',作 $PB'\perp$直线 AC 交圆周于 B',作 $PC'\perp AB$ 交圆周于 C'.求证:$AA'\parallel BB'\parallel CC'$.

证明 设 $PA'\perp BC$ 于 L,$PB'\perp$直线 AC 于 N,$PC'\perp AB$ 于 M,则由西姆松定理知 L,M,N 三点共线.注意到 L,B,P,M 及 A',B,P,A 分别四点共圆,连 BP,则$\angle AMN=\angle BML=\angle BPL=\angle BPA'=\angle BAA'$,于是 $AA'\parallel LN$.

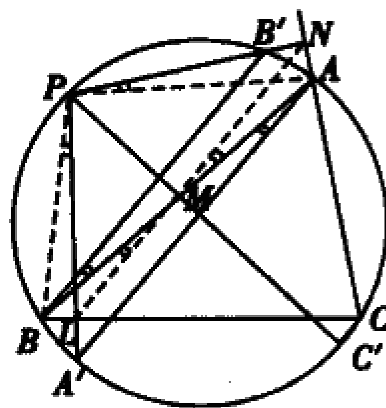


图 6-4

同样,注意到 A,B,P,B' 及 A,M,P,N 分别四点共圆,连 PA,则$\angle ABB'=\angle APB'=\angle APN=\angle AMN$,于是 $BB'\parallel LN$.

由 A,P,C',C 四点共圆,知$\angle ACC'+\angle APC'=180°$.注意到$\angle APC'=\angle APM=\angle ANM=\angle CNM$,则$\angle ACC'+\angle CNM=180°$,于是 $CC'\parallel LM$,故 $AA'\parallel BB'\parallel CC'$.

例 4 如图 6-5,设 P 为$\triangle ABC$ 外接圆上$\overset{\frown}{BC}$内一点,过 P 作 $PD\perp BC$ 于 D,作 $PF\perp$直线 AB 于 F,设 H 为$\triangle ABC$ 的垂心.延长 PD 至 P',使 $PD=P'D$.求证:$HP'\parallel DF$.

(1979 年山西省竞赛题改编)

证明 连 AH 并延长交 BC 于 A',交圆于 H',则由$\angle HCB=\angle BAH'=\angle BCH'$,知

$HA' = A'H'$.

又由已知 $PP' \perp BC$，且 $P'D = DP$，连 PH'，则知 PH' 与 $P'H$ 关于 BC 对称，从而 $\angle PH'H = \angle P'HH'$.

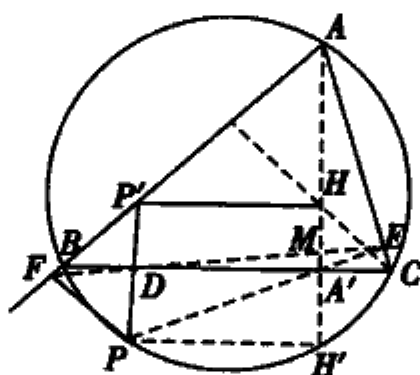


图 6-5

由于从 P 点已向 $\triangle ABC$ 的两边所在直线 AB，BC 引了垂线 PF，PD，再过点 P 向边 AC 所在直线作垂线 PE，垂足为 E，则由西姆松定理，知 F，D，E 三点共线，设西姆松线 EF 与 HA' 交于 M. 此时，又由 P，C，E，D 四点共圆，有 $\angle CPE = \angle CDE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCE$ 中，$\angle CPE$ 与 $\angle PCE$ 互余；在 $\mathrm{Rt}\triangle MDA'$ 中，$\angle A'DM = \angle CDE$ 与 $\angle DMA'$ 互余. 故 $\angle DMA' = \angle PCE = \angle PCA = \angle PH'H = \angle P'HH'$，由此即知 $HP' \parallel EF$，故 $HP' \parallel DF$.

例 5 如图 6-6，设 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上一点，过点 P 分别作 $PL \perp BC$ 于 L，作 $PN \perp$ 直线 AB 于 N，直线 LN 交 BC 边上的高线于 K，设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 求证：$PK \parallel LH$.

证明 由于从 P 点引了 $\triangle ABC$ 的边 BC，BA 所在直线的垂线，再过 P 点作 $PM \perp AC$ 于 M，则由西姆松定理，知 L，M，N 三点共直线，即 L，M，N，K 四点共线.

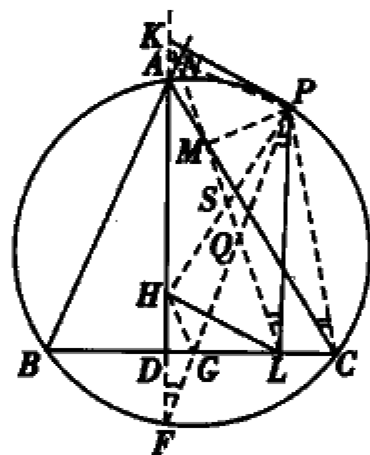


图 6-6

设 BC 边上的高线为 AD，延长 AD 交圆于 F，连 PF 交 BC 于 G，交西姆松线 NL 于 Q，连 PH 交西姆松线 NL 于 S.

由 P，C，L，M 四点共圆及 A，F，C，P 共圆，连 PC，则 $\angle MLP = \angle MCP = \angle AFP = \angle LPF$，从而 $QP = QL$，即 Q 为 $\mathrm{Rt}\triangle PLG$ 的斜边 PG 的中点. 连 HG，由 $\angle DFC = \angle ABC = \angle DHC$，知 $HD = DF$，有 $\angle HGD = \angle DGF = \angle LGP = \angle QLG$，从而 $HG \parallel ML$，即 SQ 是 $\triangle PHG$ 的中位线，亦即 $HS = SP$.

又 $PL \parallel KH$，有 $\angle LPS = \angle KHS$ 及 $\angle PSL = \angle HSK$，于是 $\triangle PSL \cong \triangle HSK$，即有 $PL \mathrel{\underline{\parallel}} KH$，亦即四边形 $PKHL$ 为平行四边形，故 $PK \parallel LH$.

注 由此例可得，三角形外接圆周上一点 P 与垂心 H 的连线段 PH，被关于 P 点的西姆松线所平分. 这是西姆松线的一条重要性质.

2. 注意发现四点共圆与三点共线的联系，灵活应用西姆松定理及其逆定理

例 6 如图 6-7，延长凸四边形 $ABCD$ 的边 AB，DC 交于 E，延长 AD，BC 交于 F. 试证：$\triangle BCE$，$\triangle CDF$，$\triangle ADE$，$\triangle ABF$ 的四个外接圆共点.

证明 设 $\triangle BCE$ 与 $\triangle CDF$ 的两个外接圆除交于点 C 外，另一交点为 M. 设点 M 在直线 BE，EC，BC 上的射影分别为 P，Q，R，则由西姆松定理，知 P，Q，R 三点共线.

同样，M 点在直线 DC，CF，DF 上的射影 Q，R，S 也三点共线，故 P，Q，R，S 四点

共线.

在$\triangle ADE$中,P在AE上,Q在DE上,S在边AD所在直线上,且P,Q,S三点共线,则由西姆松定理的逆定理,知M点在$\triangle ADE$的外接圆上.

在$\triangle ABF$中,P在直线AB上,R在BF上,S在AF上,且P,R,S三点共线,由西姆松定理的逆定理,知M点在$\triangle ABF$的外接圆上.

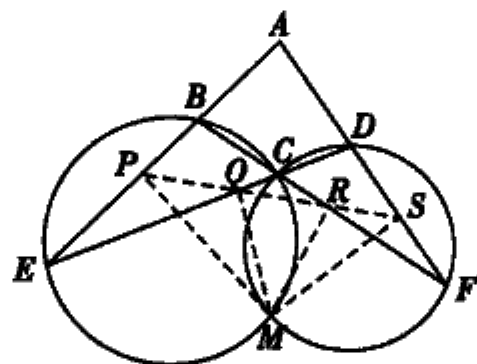


图6-7

故$\triangle BCE$,$\triangle CDF$,$\triangle ADE$,$\triangle ABF$的四个外接圆共点.

注 此例题的结论实际为完全四边形$ABECFD$的四个三角形$\triangle AED$、$\triangle BEC$、$\triangle CFD$、$\triangle ABF$共点,此点称为密克尔(Miquel)点,直线$PQRS$称为完全四边形的西姆松线.

【解题思维策略分析】

1. 证明点共线的又一工具

例7 如图6-8,设P为四边形$A_1A_2A_3A_4$外接圆上任一点,点P在直线A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_1上的射影分别为B_1,B_2,B_3,B_4,又点P在直线B_1B_2,B_2B_3,B_3B_4,B_4B_1上的射影分别为C_1,C_2,C_3,C_4.求证:C_1,C_2,C_3,C_4共线.

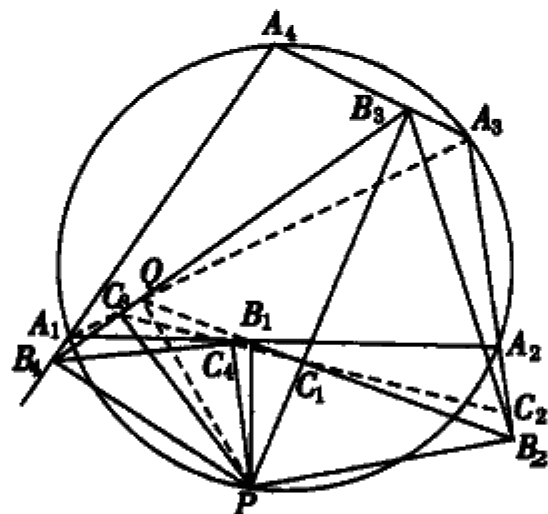


图6-8

证明 连A_1A_3,过P作A_1A_3的垂线,垂足为Q.从而,点P关于$\triangle A_1A_2A_3$的西姆松线为B_1B_2Q.同样,点P关于$\triangle A_1A_3A_4$的西姆松线为B_3QB_4.

由$\angle A_1B_4P=\angle A_1QP=\angle A_1B_1P$,知点$P$在$\triangle QB_1B_4$的外接圆上,由西姆松定理,知点$P$在$\triangle QB_1B_4$三边上的垂足$C_1$,$C_3$,$C_4$共线.

同理,C_1,C_2,C_4三点也共线.

故C_1,C_2,C_3,C_4四点共线(此直线称为P点圆内接四边形关于$A_1A_2A_3A_4$的西姆松线).

2. 注意西姆松线在转化问题中的媒介作用

例8 如图6-9,设P为$\triangle ABC$外接圆周上任一点,P点关于边BC,AC所在直线的对称点分别为P_1,P_2.求证:直线P_1P_2经过$\triangle ABC$的垂心H.

证明 由于P_1,P_2分别为P点关于直线BC,AC的对称点,设PP_1交直线BC于

L，PP_2 交直线 AC 于 N，则 L，M 分别为 P 点在△ABC 的边 BC，CA 所在直线上的射影，且 L，N 分别为线段 PP_1，PP_2 的中点.

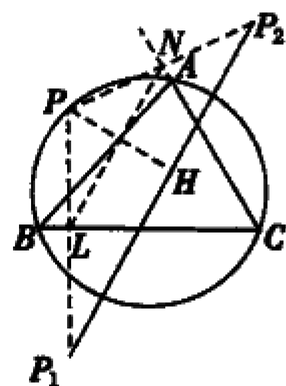


图 6-9

由西姆松定理，知 LN 为西姆松线，此时 $LN /\!/ PP_2$.

又由前面例 5 知，当 H 为△ABC 的垂心时，直线 LN 平分线段 PH. 于是，可知 H 点在直线 P_1P_2 上，即直线 P_1P_2 经过 H 点.

例 9 如图 6-10，一条直线 l 与圆心为 O 的圆不相交，E 是 l 上一点，$OE \perp l$，M 是 l 上任意异于 E 的点，从 M 作⊙O 的两条切线分别切圆于 A 和 B，C 是 MA 上的点，使得 $EC \perp MA$，D 是 MB 上的点，使得 $ED \perp MB$，直线 CD 交 OE 于 F. 求证：点 F 的位置不依赖于 M 的位置. （IMO-35 预选题）

证明 令 $OE = a$，⊙O 的半径为 R，连结 EA，EB，OA，OB，OM，AB，设 AB 交 OM 于 G，交 OE 于 Q，则 $OA \perp MA$，$OB \perp MB$，$OM \perp AB$.

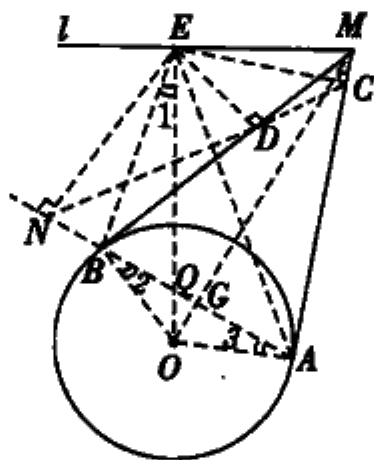


图 6-10

由射影定理，得 $OG \cdot OM = OB^2$，又由 M，E，Q，G 四点共圆，有 $OQ \cdot OE = OG \cdot OM = OB^2 = R^2$，从而知 $OQ = \dfrac{R^2}{a}$. 由 $OB^2 = OQ \cdot OE$，有△OEB∽△OBQ，即有 $\angle BEO = \angle OBQ = \angle BAO$，即 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 由此得 $\angle MEB + \angle MAB = (90^\circ + \angle 1) + (90^\circ - \angle 3) = 180^\circ$，故 A，B，E，M 四点共圆.

作 $EN \perp AB$ 交 AB 的延长线于 N，由西姆松定理，知 C，D，F，N 四点共线. 注意到 A，N，E，C 与 A，O，E，M 均四点共圆，有 $\angle ENF = \angle EAM = \angle EOM$. 又由 $EN /\!/ OM$，有 $\angle ENF = \angle NEF$，故 $\angle ENF = \angle NEF$.

在 Rt△NEQ 中，由上推知 F 为 EQ 的中点，因此，$EF = \dfrac{1}{2}EQ = \dfrac{1}{2}(OE - OQ) = \dfrac{a^2 - R^2}{2a}$. 故 F 的位置不依赖于 M 的位置.

3. 注意西姆松线性质的应用

三角形外接圆上一点的西姆松线平分该点与三角形垂心的连线.

此性质已在例 5 给出一种证法，现另证如下：

如图 6-11，设 H 为△ABC 的垂心，P 为其外接圆上一点，作△HBC 的外接圆⊙HBC，则该圆与⊙ABC 关于 BC 对称(参见垂心性质 7).

设点 P 的垂足线(即西姆松线)为 LMN，由 P、B、L、M 四点共圆，有 $\angle PLM = \angle PBM$.

设⊙HBC 与直线 PL 交于点 P'、Q，则 L 为 PP' 的中点，连 HP'，由 $\angle LP'H = \overset{\frown}{QH}$ 的

度数 = $\overset{\frown}{PA}$的度数 = $\angle PBA = \angle PBM = \angle PLM$，知 $P'H /\!/ LMN$．由此即知 PH 被直线 LMN 平分．

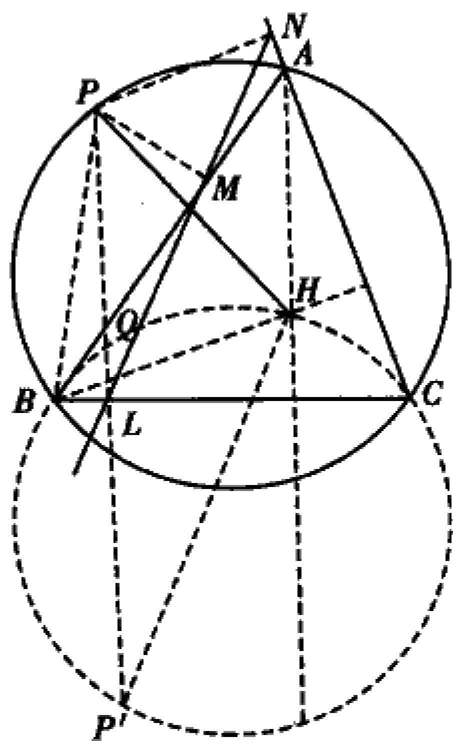


图 6－11

例 10　如图 6－12，由$\triangle ABC$ 的顶点 A 引另两顶点 B、C 的内、外角平分线的垂线，垂足分别为 F、G、E、D，则 F、G、E、D 四点共线，且此线与$\triangle ABC$ 的中位线重合．

证明　延长 BE、CD 相交于点 K，设 CG 与 BE 相交于点 I，则 I 为$\triangle ABC$ 的内心．由$\angle CAI = \frac{1}{2}\angle A$，$\angle CKI = 90° - \angle CIK = 90° - (\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C) = \frac{1}{2}\angle A$，知 A、I、C、K 四点共圆．

对$\triangle ICK$ 及点 A 应用西姆松定理，知 G、E、D 三点共线．

同理，对$\triangle BCL$ 及点 A 应用西姆松定理，知 F、G、E 三点共线．

故 F、G、E、D 四点共线．

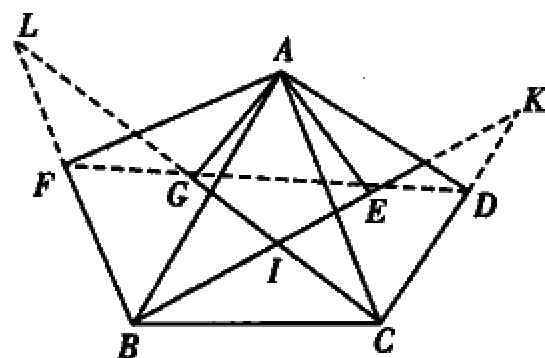


图 6－12

由于 C 为$\triangle ICK$ 的垂心，则由西姆松线的性质知直线 GED 平分 AC．同理，直线 FGE 平分 AB，故直线 FD 与$\triangle ABC$ 的中位线重合．

注　由例 10 再回过来看例 2，在例 2 中，是由点 D 引$\triangle DEF$ 另两个顶点 E、F 的内、外角平分线的垂线，垂足分别为 P、Q、R、S．

4. 注意西姆松定理与托勒密定理的等价性

可用西姆松定理证明托勒密定理：

如图 6－13，$ABCD$ 为任意圆 O 内接凸四边形，连 AC，过 D 向$\triangle ABC$ 各边作垂线，AB，AC，BC 所在直线上的垂足分别为 C_1，B_1，A_1，连 C_1B_1，B_1A_1，由西姆松定理，知 $C_1B_1 + B_1A_1 = C_1A_1$．①

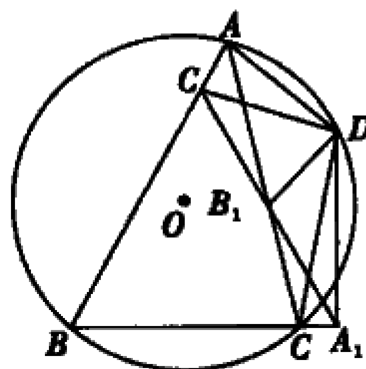


图 6－13

由 A，C_1，B_1，D 四点共圆，且 AD 为该圆直径及正弦定理，有 $C_1B_1 = AD\cdot\sin\angle C_1DB_1 = AD\cdot\sin\angle C_1AB_1$，设 R 为⊙O 半径，则 $\sin\angle C_1AB_1 = \sin\angle BAC = \frac{BC}{2R}$，故 $C_1B_1 = \frac{AD\cdot BC}{2R}$．

同理，$B_1A_1 = \frac{CD\cdot AB}{2R}$，$C_1A_1 = \frac{AC\cdot BD}{2R}$．

于是，由①式有 $AD\cdot BC + CD\cdot AB = AC\cdot BD$．此即为托勒密定理．

也可用托勒密定理证明西姆松定理：

设 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，则由托勒迷定理，有

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD. \quad ②$$

作 $DC_1\perp$直线 AB 于 C_1，作 $DB_1\perp$直线 AC 于 B_1，则由 A_1,C_1,B_1,D 四点共圆，且 AD 为该圆直径及正弦定理，有 $\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1DB_1}=\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1AB_1}=AD$，即 $C_1B_1=AD\cdot\sin\angle C_1AB_1=AD\cdot\frac{BC}{2R}$（$R$ 为⊙O 半径），亦即 $AD\cdot BC=2R\cdot C_1B_1$.

同理，$AB\cdot CD=2R\cdot A_1B_1$，$AC\cdot BD=2R\cdot A_1C_1$.

把上述三式代入②式，有 $C_1B_1+A_1B_1=A_1C_1$.

故 A_1,B_1,C_1 三点在一条直线上，此即为西姆松定理.

因此，在应用中，我们应当注意灵活处置，若应用哪个定理方便，就应用哪个定理.

【模拟实战】

习题 A

1. 设 P 为△ABC 外接圆周劣弧$\overset{\frown}{BC}$上一点，P 在边 BC,CA,AB 上的射影分别为 L,M,N，令 $PL=l,PM=m,PN=n,BC=a,CA=b,AB=c$.求证：$mna=lnb+lmc$.
2. 设 PA,PB,PC 为⊙O 的三条弦，分别以它们为直径作圆两两相交于 $D,E.F$.求证：D,E,F 三点共线.
3. 自△ABC 的顶点 A 作∠B 的内、外角平分线 BE,BF 的垂线，垂足为 E,F，再作∠C 的内、外角平分线 CG,CD 的垂线，垂足为 G,D.求证：F,G,E,D 四点共线.
4. 求证：正三角形外接圆周上任一点到三边距离的平方和为定值.
5. 若三圆均经过其三圆心所成的外接圆上任何一点，则此三圆两两相交于三个共线点.

习题 B

1. 点 P,Q 是△ABC 的外接圆上的两点（异于 A,B,C），点 P 关于直线 BC,CA,AB 的对称点分别是 U,V,W，连线 QU,QV,QW 分别与直线 BC,CA,AB 交于点 D,E,F.求证：（Ⅰ）U,V,W 三点共线；（Ⅱ）D,E,F 三点共线.
2. 设 $ABCD$ 是一个圆内接四边形，点 P,Q 和 R 分别是 D 到直线 BC,CA 和 AB 的射影.证明：$PQ=QR$ 的充要条件是∠ABC=∠ADC 的角平分线的交点在 AC 上.

（IMO-44 试题）

3. (**卡诺定理**)过$\triangle ABC$外接圆上一点P,向三边所在直线引斜线分别交BC,CA,AB于点D,E,F,且$\angle PDB=\angle PEC=\angle PFB$.求证:$D,E,F$共线.
4. 过$\triangle ABC$的三顶点引互相平行的三直线,它们和$\triangle ABC$的外接圆的交点分别为A',B',C'.在$\triangle ABC$的外接圆上任取一点P,设PA',PB',PC'与BC,CA,AB或其延长线分别交于D,E,F.求证:D,E,F共线.
5. (**清宫定理**)设P,Q为$\triangle ABC$外接圆上异于A,B,C的任意两点,P点关于BC,CA,AB的对称点分别为U,V,W,而QU,QV,QW和BC,CA,AB分别交于D,E,F.求证:D,E,F共线.
6. 设P,Q,为$\triangle ABC$外接圆半径OK或延长线上两点,$OP\cdot OQ=R^2$,其中R为外接圆半径,P点关于BC、CA、AB的对称点分别为U,V,W,而QU,QV,QW分别交BC,CA,AB于点D,E,F.求证:D,E,F共线.

第七章　九点圆定理及应用

【基础知识】

九点圆定理　三角形三条高的垂足、三边的中点，以及垂心与顶点的三条连接线段的中点，这九点共圆.

如图 7－1，设$\triangle ABC$三条高AD，BE，CF的垂足分别为D，E，F；三边BC，CA，AB的中点分别为L，M，N；又AH，BH，CH的中点分别为P，Q，R.求证：D，E，F，L，M，N，P，Q，R九点共圆.

证法 1　连PQ，QL，LM，MP，则知$LM \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}BA \overset{\parallel}{=} QP$，即知$LMPQ$为平行四边形.又$LQ \parallel CH \perp BA \parallel LM$，知$LMPQ$为矩形.从而$L$，$M$，$P$，$Q$四点共圆，且圆心$V$为$PL$与$QM$的交点.同理，$MNQR$为矩形，从而$L$，$M$，$N$，$P$，$Q$，$R$六点共圆，且$PL$，$QM$，$NR$均为这个圆的直径.

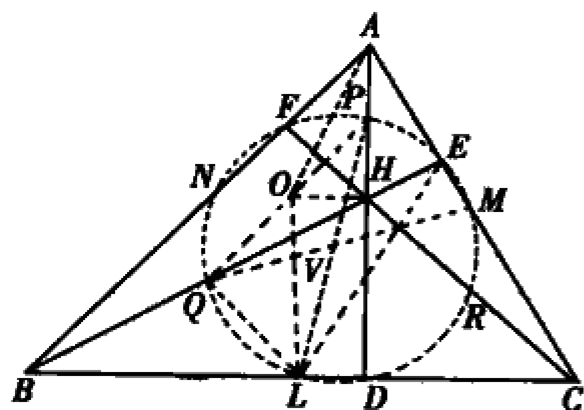


图 7－1

由$\angle PDL = \angle QEM = \angle RFN = 90°$，知$D$，$E$，$F$三点也在这个圆上.故$D$，$E$，$F$，$L$，$M$，$N$，$P$，$Q$，$R$九点共圆.

证法 2　设$\triangle ABC$的外心为O，取OH的中点并记为V，连AO，以V为圆心，$\frac{1}{2}AO$为半径作$\odot V$，如图 7－1.

由$VP \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}OA$，知$P$在$\odot V$上.同理，$Q$，$R$也在$\odot V$上.

由$OL \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}AH$（可由延长$AO$交$\triangle ABC$的外接圆于$K$，得$HBKC$为平行四边形，此时$L$为$KH$的中点，则$OL$为$\triangle AKH$的中位线即得），知$OL \overset{\parallel}{=} PH$.又$OV = VH$，知$\triangle OLV \cong \triangle HPV$，从而$VL = VP = \frac{1}{2}OA$，且$L$，$V$，$P$共线，故$L$在$\odot V$上.

同理，M，N在$\odot V$上.

由L，V，P共线知LP为$\odot V$的一条直径.

又$\angle LDP=90°$，$\angle MEQ=90°$，$\angle NFR=90°$，知 D,E,F 在$\odot V$上.

故 D,E,F,L,M,N,P,Q,R 九点共圆.

上述圆通常称为九点圆，也有人叫费尔巴哈圆或欧拉圆.显然，正三角形的九点圆即为其内切圆.

由上述定理及其证明，我们可得如下一系列推论：

推论 1 $\triangle ABC$ 九点圆的圆心是其外心与垂心所连线段的中点，九点圆的半径是$\triangle ABC$ 的外接圆半径的$\frac{1}{2}$.

注意到$\triangle PQR$ 与$\triangle ABC$ 是以垂心 H 为外位似中心的位似形，位似比是 $HP:HA=1:2$，因此，可得

推论 2 三角形的九点圆与其外接圆是以三角形的垂心为外位似中心，位似比是1:2 的位似形；垂心与三角形外接圆上任一点的连结线段被九点圆截成相等的两部分.

注意到欧拉定理(欧拉线)，又可得

推论 3 $\triangle ABC$ 的外心 O，重心 G，九点圆圆心 V，垂心 H，这四点(心)共线，且$OG:GH=1:2$，$GV:VH=1:3$，或 O 和 V 对于 G 和 H 是调和共轭的，即$\frac{OG}{GV}=\frac{OH}{HV}$.

推论 4 $\triangle ABC$ 的九点圆与$\triangle ABC$ 的外接圆又是以$\triangle ABC$ 的重心 G 为内位似中心，位似比为 1:2 的位似形.

事实上，因 G 为两相似三角形$\triangle LMN$ 与$\triangle ABC$ 的相似中心，而$\triangle LMN$ 的外接圆即$\triangle ABC$ 的九点圆.

推论 5 一重心组的四个三角形有一个公共的九点圆；已知圆以已知点为垂心的所有内接三角形有共同的九点圆.

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 7-2，设 H 为$\triangle ABC$ 的垂心，L 为 BC 边的中点，P 为 AH 的中点.过 L 作 PL 的垂线交 AB 于 G，交 AC 的延长线于 K.求证：G,B,K,C 四点共圆.

图 7-2

证明 设$\triangle ABC$ 的外心为 O，连 OH，取 OH 的中点 V，则 V 为$\triangle ABC$ 九点圆的圆心.

连 AO，则 $AO/\!/PV$，从而 $AO\perp GK$.设 N 为 AB 的中点，连 ON，则 $ON\perp AG$，由此知$\angle AON=\angle AGL$.

又$\angle ACL=\angle AON$，则$\angle ACL=\angle AGL$.

从而$\angle BGL=\angle BGK=\angle KCL=\angle KCB$.故 B,K,C,G 四点共圆.

例 2 试证：$\triangle ABC$ 的垂心 H 与其外接圆上的点的连线被其九点圆平分.

证明 如图 7－3，过垂心 H 作 $\triangle ABC$ 外接圆的两条弦 DE，FG，连 DF，EG.

设 M，N，S，T 分别为 HD，HE，HF，HG 的中点，则 $\angle FDH=\angle SMH$，$\angle EGH=\angle NTH$.

又 $\angle FDH=\angle EGH$，则 $\angle SMH=\angle NTH$.

故 M，S，T，N 四点共圆.

由 DE，FG 的任意性，得 H 与 $\triangle ABC$ 外接圆上任意点连线的中点在同一圆上，由于这个圆过 HA，HB，HC 的中点，故这个圆就是 $\triangle ABC$ 的九点圆，从而命题获证.

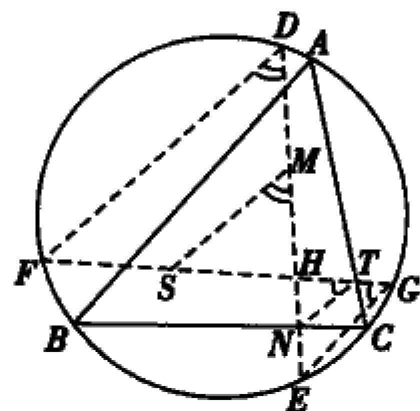


图 7－3

例 3 如图 7－4，$\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高 AD，BE，CF 交于点 H，直线 ED 和 AB 交于点 M，FD 和 AC 交于点 N. 求证：(1) $OB\perp DF$，$OC\perp DE$；(2) $OH\perp MN$.

（2001 年全国高中联赛题）

证明 (1)设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，由相交弦定理，有 $R^2-OF^2=AF\cdot FB$，$R^2-OD^2=BD\cdot DC$，

从而 $OF^2-OD^2=BD\cdot DC-AF\cdot FB$.

由 A，F，D，C 四点共圆，有 $BD\cdot BC=BF\cdot BA$，即 $BD\cdot(BD+DC)=BF(BF+FA)$，亦即 $BF^2-BD^2=BD\cdot DC-AF\cdot FB=OF^2-OD^2$，故 $OB\perp DF$. 同理，$OC\perp DE$.

(2)由九点圆定理的推论 1，知 OH 的中点 V 为 $\triangle DEF$ 的外心. 又由 D，E，A，B 及 D，F，A，C 分别四点共圆，有 $MD\cdot ME=MB\cdot MA$，$ND\cdot NF=NC\cdot NA$.

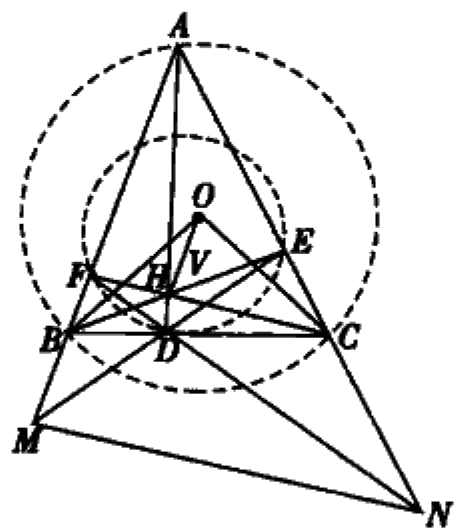


图 7－4

由此，即知 M，N 对 $\triangle ABC$ 的外接圆与 $\triangle DEF$ 的外接圆的幂相等，从而 M，N 在这两个外接圆的根轴上，即有 $MN\perp OV$，故 $MN=OH$.

【解题思维策略分析】

1. 注意题中九点圆的显现形式

例 4 如图 7－5，$\triangle ABC$ 中，O 为外心，H 是垂心，作 $\triangle CHB$，$\triangle CHA$ 和 $\triangle AHB$ 的外接圆，依次记它们的圆心为 A_1，B_1，C_1. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$，且这两个三角形的九点圆重合.

（IMO－31 预选题）

证明 由于 $\angle CHB=180^\circ-(90^\circ-\angle B)-(90^\circ-\angle C)=\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$，知 $\triangle CHB$ 外接圆的半径和 $\triangle CAB$ 外接圆的半径相等，从而，有 A_1 是 O 关于 BC 的对称点.

设 M 是 BC 中点,则知 $AH=2OM$,即 $AH=OA_1$.

又 $AH /\!/ OA_1$,则连 AA_1 与 OH 的交点 K 为平行四边形 AHA_1O 的中心,即 AA_1 与 OH 互相平分于 K.

同理,BB_1,CC_1 也经过 K 且被它平分,从而 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 关于 K 中心对称,故 $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$.

显然,K 是 $\triangle ABC$ 九点圆的圆心.因此,这个圆关于 K 作中心对称时不变,它也是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的九点圆.

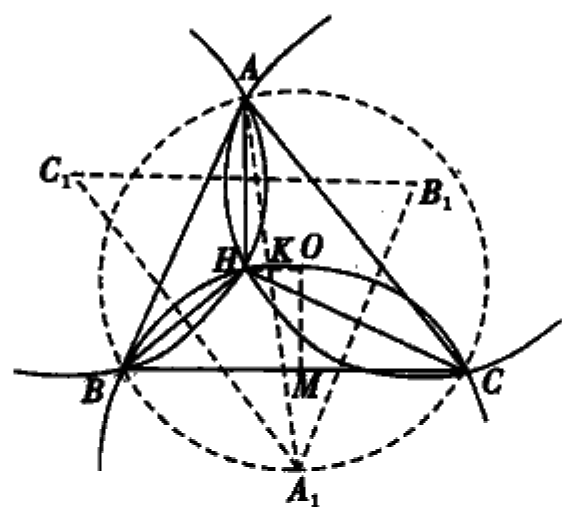


图 7-5

例 5 如图 7-6,在 $\triangle ABC$ 中,AD 是 BC 边上的高,M,N 分别是 CA,AB 两边的中点.设直线 l 通过 A 点,且 BC 在 l 上的射影为 $B'C'$,连 $B'N$ 与 $C'M$ 交于点 P.求证:B',C',D,P 四点共圆,且其圆心 O 与 P 点均在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.

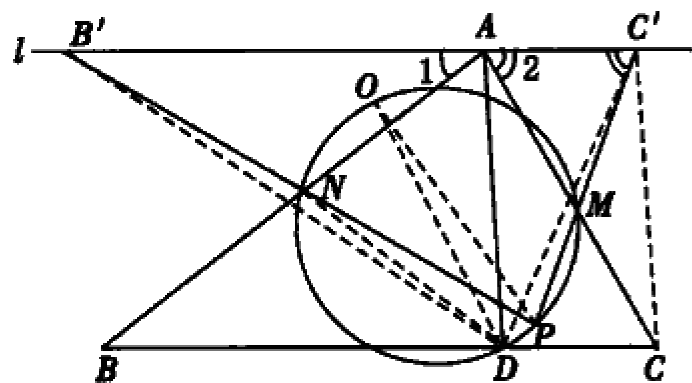


图 7-6

证明 连 BB',CC',ND,MD.在 $\mathrm{Rt}\triangle AB'B$ 中,N 为斜边 AB 的中点,令 $\angle BAB'=\angle 1$,则 $\angle NB'A=\angle 1$.

同理,$\angle NAD=\angle NDA$,$\angle MAD=\angle MDA$.令 $\angle CAC'=\angle 2$,则 $\angle MC'A=\angle 2$.

于是,
$$\begin{aligned}\angle NB'A+\angle MC'A &=\angle 1+\angle 2\\ &=180^\circ-\angle A,\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\angle MPN &=180^\circ-(\angle NB'A+\angle MC'A)\\ &=180^\circ-(180^\circ-\angle A)=\angle A\\ &=\angle NAD+\angle DAM=\angle NDA+\angle ADM=\angle MDN.\end{aligned}$$

由此,知 D,M,N,P 四点共圆.

而 $\triangle MND$ 的外接圆即为 $\triangle ABC$ 的九点圆,即点 P 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.

由 A,B',B,D 四点共圆,连 $B'D$,则知 $\angle B'DA=\angle B'BA=90^\circ-\angle 1$.

同理,$\angle C'DA=\angle C'CA=90^\circ-\angle 2$.

于是,$\angle B'DC'=\angle B'DA+\angle C'DA=180^\circ-\angle 1-\angle 2=\angle A=\angle MPN=\angle B'PC'$.

故 B',C',D,P 四点共圆.

由题设,$\odot B'C'DP$ 的圆心为 O,连 DO,PO,则 $\angle DOP=2\angle DB'P$.

由于 A,B',B,D 四点共圆且以 N 为其圆心,则知 $NB'=ND$.

于是,有 $\angle DNP=2\angle DB'P$,

$\therefore$ $\angle DOP=\angle DNP$,$\therefore$ D,O,P,N 四点共圆,

$\therefore$ O 在 $\odot DPN$ 上,即 O 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上,故命题获证.

2. 注意题中九点圆的隐含形式

例 6 如图 7-7,锐角$\triangle ABC$中,角 A 的等分线与三角形的外接圆交于另一点A_1,点 B_1,C_1 与此类似.直线 AA_1 与 B,C 两角的外角等分线交于A_0,点 B_0,C_0 与此类似.求证:(1)$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 面积的二倍;(2)$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积至少是$\triangle ABC$ 面积的四倍.

(IMO-30 试题)

证明 (1)令$\triangle ABC$ 的内心为I($I=AA_0\cap BB_0\cap CC_0$),则I又是$\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心(内、外角平分线互相垂直).显然,$\triangle ABC$ 的外接圆是$\triangle A_0B_0C_0$ 的九点圆,即知 A_1,B_1,C_1 分别为 A_0I, B_0I, C_0I 的中点,于是得 $S_{\triangle A_0BI}=2S_{\triangle A_1BI}$,$S_{\triangle A_0CI}=2S_{A_1CI}$,从而 $S_{四边形A_0BIC}=2S_{四边形A_1BIC}$.

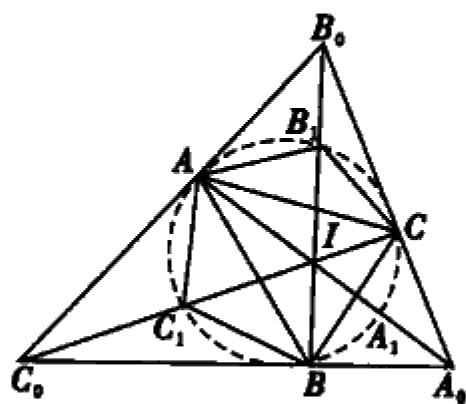


图 7-7

同理,$S_{四边形B_0CIA}=2S_{四边形B_1CIA}$,$S_{四边形C_0AIB}=2S_{四边形C_1AIB}$,

故 $S_{\triangle A_0B_0C_0}=2S_{六边形AC_1BA_1CB_1}$.

(2)由(1),有$\dfrac{S_{\triangle A_0B_0C_0}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{2(S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle B_1CA}+S_{\triangle C_1AB})}{S_{\triangle ABC}}+2$.

故只要证 $k=\dfrac{S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle B_1CA}+S_{\triangle C_1AB}}{S_{\triangle ABC}}\geqslant 1$.

记$\angle BAC=2\alpha$,$\angle ABC=2\beta$,$\angle BCA=2\gamma$,则

$$\frac{S_{\triangle A_1BC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}A_1B\cdot A_1C\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin2\alpha}{\sin2\gamma\cdot\sin2\beta\cdot\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin2\beta\cdot\sin2\gamma}.$$

同理,$\dfrac{S_{\triangle B_1CA}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\sin^2\beta}{\sin2\alpha\cdot\sin2\gamma}$,$\dfrac{S_{\triangle C_1AB}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin2\alpha\cdot\sin2\beta}$.

$$\begin{aligned}于是,k&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin2\beta\cdot\sin2\gamma}+\frac{\sin^2\beta}{\sin2\alpha\cdot\sin2\gamma}+\frac{\sin^2\gamma}{\sin2\alpha\cdot\sin2\beta}\\&\geqslant3\sqrt[3]{\frac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}{\sin^22\alpha\cdot\sin^22\beta\cdot\sin^22\gamma}}=\frac{3}{4}(\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)^{-\frac{2}{3}}\\&\geqslant\frac{3}{4}\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\right)^{-2}\geqslant\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^{-2}=1.\end{aligned}$$

例 7 如图 7-8,$\triangle A_1A_2A_3$ 是一非等腰三角形,它的边长分别为 a_1,a_2,a_3,其中 a_i 是A_i 的对边($i=1,2,3$),M_i 是边 a_i 的中点.$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆$\odot I$ 切边 a_i 于 T_i 点,S_i 是 T_i 关于$\angle A_i$ 角平分线的对称点($i=1,2,3$).求证:M_1S_1,M_2S_2,M_3S_3 三线共点.

(IMO-23 试题)

证明 由题设，知 $M_1M_2 /\!/ A_2A_1$，下面证 $S_1S_1 /\!/ A_2A_1$.

由 T_1 和 S_1，T_2 和 T_3 分别关于直线 A_1I 对称，有 $\overset{\frown}{T_1T_2} = \overset{\frown}{T_3S_1}$.

同理，$\overset{\frown}{T_1T_2} = \overset{\frown}{T_3S_2}$.

故有 $\overset{\frown}{T_3S_1} = \overset{\frown}{T_3S_2}$，即 T_3 是等腰 $\triangle T_3S_1S_2$ 的顶点，有 $T_3I \perp S_1S_2$，从而 $S_1S_2 /\!/ A_2A_1$.

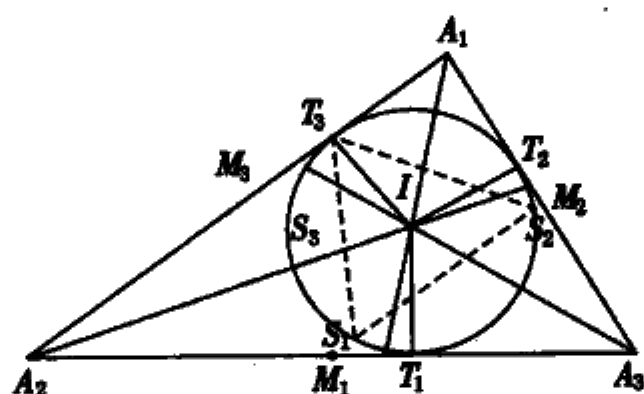


图 7-8

同理，$S_2S_3 /\!/ A_3A_2$，$S_3S_1 /\!/ A_1A_3$.

又 $M_1M_2 /\!/ A_2A_1$，$M_2M_3 /\!/ A_3A_2$，$M_3M_1 /\!/ A_1A_3$，于是 $\triangle M_1M_2M_3$ 和 $\triangle S_1S_2S_3$ 的对应边两两平行，故这两个三角形或全等或位似.

由于 $\triangle S_1S_2S_3$ 内接于 $\triangle ABC$ 的内切圆，而 $\triangle M_1M_2M_3$ 内接于 $\triangle ABC$ 的九点圆，且 $\triangle A_1A_2A_3$ 不为正三角形，故其内切圆与九点圆不重合，所以 $\triangle S_1S_2S_3$ 与 $\triangle M_1M_2M_3$ 位似，这就证明了 M_1S_1，M_2S_2，M_3S_2 共点(于位似中心).

例 8 过锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 的三条高线分别交其对边于点 D，E，F，过点 D 平行于 EF 的直线分别交 AC，AB 于点 Q 和 R，EF 交 BC 于点 P. 证明：$\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

(IMO-38 预选题)

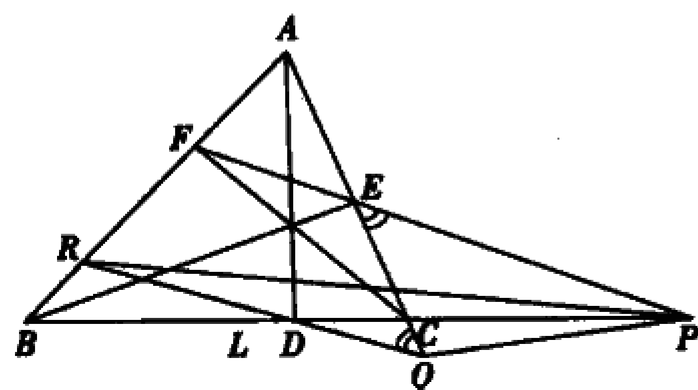


图 7-9

证明 由题设，点 P 的存在意味着 $AB \neq AC$.

由对称性，可设 $AB > AC$，则 P 在射线 BC 上，如图 7-9.

取 BC 的中点 L，我们证明 Q，P，R，L 四点共圆 $\Leftrightarrow DR \cdot DQ = DP \cdot DL$. ①

因 $BE \perp AC$ 于 E，$CF \perp AB$ 于 F，则 B，C，E，F 共圆，于是知 $\angle CEP = \angle ABC$.

又 $EF /\!/ QR$，有 $\angle CEP = \angle CQD$，则知 B，Q，C，R 四点共圆，从而 $DR \cdot DQ = DB \cdot DC$.

设 $BL = CL = a$，$CP = c$，$DL = b$，则证①式等价于证明 $DB \cdot DC = DP \cdot DL$，即

$$(a+b)\cdot(a-b) = (a+c-b)\cdot b,$$

亦即 $a^2 = b(a+c)$.

由九点圆定理，知 D，E，F，L 四点共圆，有 $PE \cdot PF = PD \cdot PL$.

注意到 B，C，E，F 四点共圆，有 $PE \cdot PF = PC \cdot PB$，故得 $PC \cdot PB = PD \cdot PL$，即 $c(2a+c) = (a+c-b)\cdot(b+a)$，亦即 $a^2 = b(a+c)$.

故有 $DB \cdot DC = DP \cdot DL$，亦有 $DR \cdot DQ = DP \cdot DL$.

亦即 Q,P,R,L 四点共圆,即$\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

注 由例 8 可演变得如下第 8 届台湾数学奥林匹克试题:已知过锐角$\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 的垂线分别交对边于 D,E,F,$AB>AC$,直线 EF 交直线 BC 于 P,过点 D 且平行于 EF 的直线分别交直线 AC,AB 于 Q,R,N 是 BC 上的一点,且$\angle NQP+\angle NRP<180°$.求证:$BN>CN$.

事实上,同例 8,取 BC 的中点 L,关键是证明 Q,P,R,L 四点共圆,又等价地证明 $DR\cdot DQ=DP\cdot DL$.而当 Q,P,R,L 四点共圆时,$\angle LQP+\angle LRP=180°$,参见图 7-9,若$\angle NQP+\angle NRP<180°$,则 N 点在$\odot QPRL$ 的内部,又因 N 是 BC 上的一点,则 N 在点 L 的右侧,于是 $BN>CN$.

【模拟实战】

习题 A

1. 试证:圆的直径两端点对$\triangle ABC$ 的西姆松线垂直相交,且相交于此三角形的九点圆上.
2. 设 G 为$\triangle ABC$ 的重心,P 为$\triangle ABC$ 外接圆上任一点,连 PG 并延长至点 Q,使 $PQ=\frac{1}{2}PG$.求证:点 Q 在$\triangle ABC$ 的九点圆上.
3. 试证:$\triangle ABC$ 的九点圆与它的内切圆及三个旁切圆相切.
4. 给定非退化的$\triangle ABC$,设外心为 O,垂心为 H,外接圆的半径为 R.求证:$OH<3R$.

   (1994 年亚太地区奥林匹克题)
5. 试证:三角形的三个切圆(内切或旁切)的圆心构成一个三角形,此新三角形的外心对于已知三角形的外心为另外一个切圆圆心的对称点.

习题 B

1. 设 I_A,I_B,I_C 分别为$\triangle ABC$ 的切 BC,CA,AB 边的旁切圆的圆心.试证:(1)$\triangle I_AI_BI_C$ 的九点圆为$\triangle ABC$ 的外接圆;(2)过点 I_A,I_B,I_C 分别作 BC,CA,AB 边的垂线,则这三条垂线共点.
2. 试证:圆周上任意四点,过其中任意三点作三角形,则这四个三角形的九点圆的圆心共圆.

第八章　相交两圆的性质及应用

【基础知识】

两圆相交为圆周角定理、圆内接四边形性质定理提供了用武之地，由此我们也可获得相交两圆的一系列有趣性质.

性质1　相交两圆的连心线垂直平分公共弦.

性质2　以相交两圆的一交点为顶点，过另一交点的割线为对边的三角形称为两相交圆的内接三角形.相交两圆的内接三角形的三个内角均为定值.

推论1　在相交两圆中，内接三角形都相似.

如图8－1，$\triangle ACD$，$\triangle AGH$，$\triangle BEF$ 均相似.

推论2　在相交两圆中，若公共弦与内接三角形的一边垂直，则另两边必分别为两圆直径.反之亦真.如图8－1中，AC，AD 分别为$\odot O_1$，$\odot O_2$ 的直径$\Leftrightarrow AB\perp CD$.

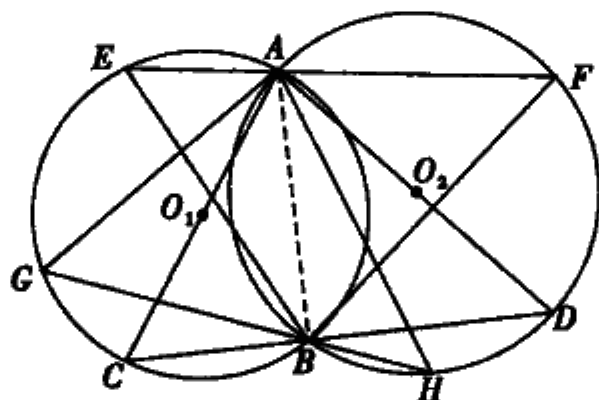


图8－1

推论3　在相交两圆中，内接三角形的交点(两圆交点)顶点，两非交点顶点以及两非交点顶点处的两切线交点，此四点共圆.或两非交点顶点处的两切线交点在内接三角形的外接圆上.

性质3　两相交圆的公共弦所在直线平分外公切线线段.

性质4　以相交两圆的两交点分别为视点，对同一外公切线线段的张角的和为180°.

性质5　两相交圆为等圆的充要条件是下述条件之一成立：(1)公共弦对两圆的张角相等；(2)过同一交点的两条割线交两圆所得两弦相等.

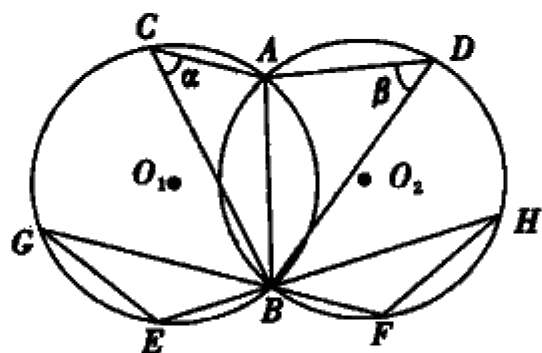


图8－2

事实上，如图8－2，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 A，B.

(1)令$\angle ACB=\alpha$，$\angle ADB=\beta$，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 为等圆$\Leftrightarrow$ $\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{AB}{\sin\beta}\Leftrightarrow\alpha=\beta(\alpha,\beta\in(0,\pi))$.

(2)$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 为等圆 $\Leftrightarrow \frac{EG}{\sin\angle GBE}=\frac{FH}{\sin\angle HBF}\Leftrightarrow GE=HF$.

性质 6 过相交两圆的两交点分别作割线,交两圆于四点,同一圆上的两点的弦互相平行.

事实上,如图 8-3 所示,即可证得 $CE/\!/DF$(证略).

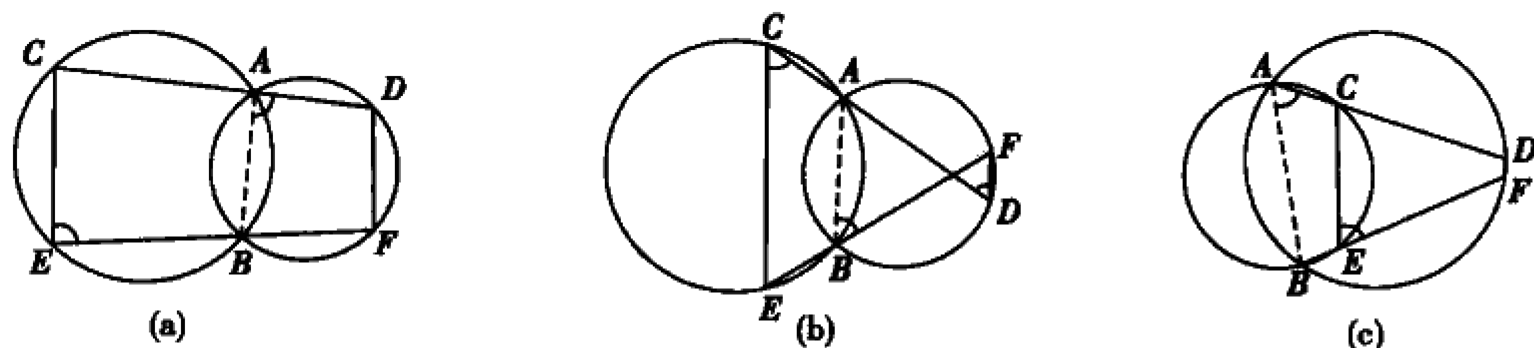


图 8-3

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 8-4,四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,对角线 AC 与 BD 相交于 P.设三角形 ABP,BCP,CDP 和 DAP 的外接圆圆心分别是 O_1,O_2,O_3,O_4.求证:OP,O_1O_3,O_2O_4 三直线共点.

(1990 年全国高中联赛题)

证明 连 PO_2 并两方延长交 $\odot O_2$ 于 Q,交 AD 于 R.在 $\triangle PRD$ 和 $\triangle PBQ$ 中,$\angle PDR=\angle BDA=\angle BCA=\angle BCP=\angle BQP$,$\angle DPR=\angle QPB$,从而 $\angle PRD=\angle PBQ=90°$,即 $PO_2\perp AD$.

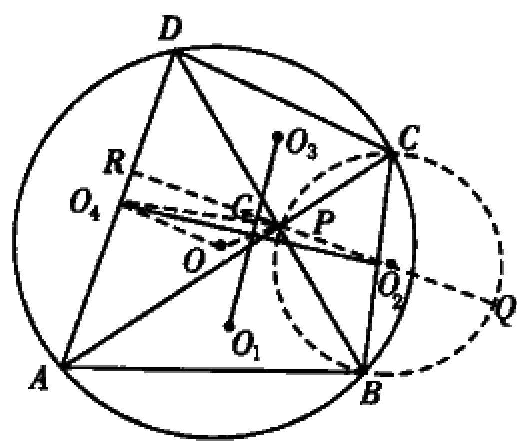


图 8-4

利用相交两圆的性质 1,知 $\odot O$ 与 $\odot O_4$ 的连心线 $OO_4\perp$公共弦 AD,故 $PO_2/\!/OO_4$.

同理,$PO_4/\!/OO_2$.从而 PO_2OO_4 为平行四边形,O_2O_4 交 OP 于其中点 G.

同理,O_1O_3 也交 OP 于其中点 G.

所以,OP,O_1O_3,O_2O_4 三直线共点.

例 2 如图 8-5,证明:若凸五边形 $ABCDE$ 中,$\angle ABC=\angle ADE$,$\angle AEC=\angle ADB$,则 $\angle BAC=\angle DAE$.

(第 21 届全俄中学生(10 年级)奥林匹克题)

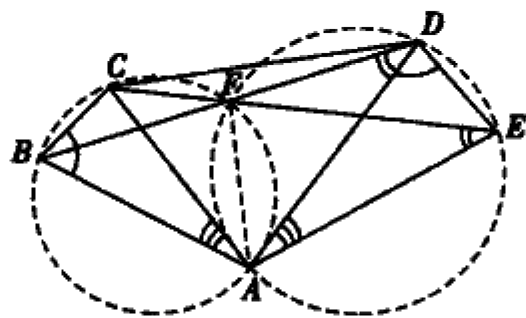


图 8-5

证明 设对角线 BD 与 CE 相交于 F.由 $\angle AEC=\angle AEF=\angle ADB=\angle ADF$,知 A,E,D,F 共圆.因此,$\angle AFE=\angle ADE=\angle ABC$,即 $\angle ABC+\angle AFC=180°$,故

A,B,C,F 共圆.

此时,两圆⊙$ABCF$与⊙$AFDE$相交于点 F,A,从而由相交两圆性质 2 的推论 1,知 $\triangle ADB \backsim \triangle AEC$,即$\angle BAD=\angle CAE$,故$\angle BAC=\angle DAE$.

例 3 如图 8-6,两圆⊙O_1,⊙O_2 相交于 A,B,⊙O_1 的弦 BC 交⊙O_2 于 E,⊙O_2 的弦 BD 交⊙O_1 于 F.证明:(Ⅰ)若$\angle DBA=\angle CBA$,则 $DF=CE$;(Ⅱ)若 $DF=CE$,则$\angle DBA=\angle CBA$.

(1979 年全国高中联赛题)

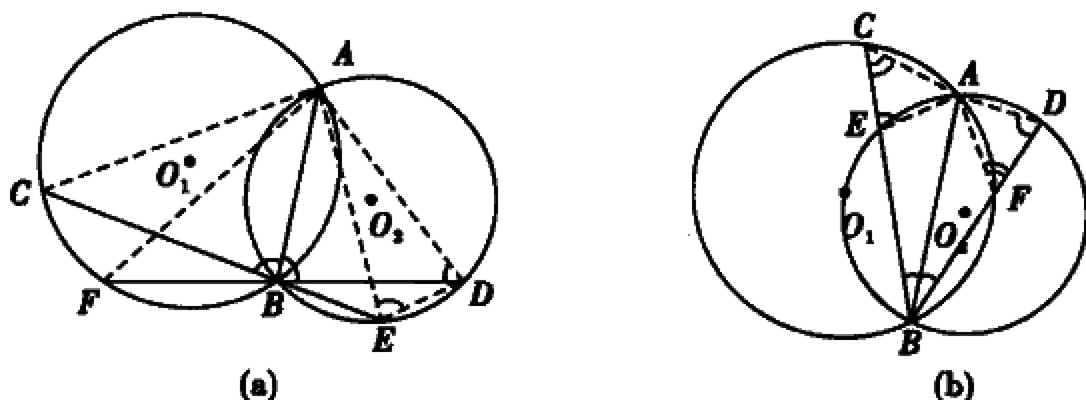


图 8-6

证明 (Ⅰ)对图 8-6(a),因 A,B,E,D 四点共圆,有$\angle ABD=\angle AED$,且$\angle ABC=\angle ADE$,而$\angle ABD=\angle ABC$,故$\angle AED=\angle ADE$,于是 $AD=AE$.

又由相交两圆性质 2 的推论 1,知$\triangle ADF \backsim \triangle AEC$.注意到 $AD=AE$,则$\triangle ADF \cong \triangle AEC$,故 $DF=EC$.

对图 8-6(b),由 A,E,B,D 及 A,C,B,F 分别四点共圆,有$\angle AEC=\angle ADF$,$\angle ACE=\angle AFD$.又由$\angle CBA=\angle ABD$,知 $AC=AF$,$AE=AD$,有$\triangle AEC \cong \triangle ADF$,故 $DF=CE$.

(Ⅱ)由 $DF=CE$ 及(Ⅰ)中证明,可得$\triangle ADF \cong \triangle AEC$,由此,可推证得$\angle DBA=\angle CBA$.

注 此例的第(Ⅰ)部分,1988 年又作为第 13 届全俄中学生数学竞赛题:两圆相交于点 M,N.过点 M 引直线 l_1,l_2,使它们分别与弦 MN 所构成的角相等.除点 M 外,l_1 与两圆的交点分别为 A,B,l_2 与两圆的交点分别为 C,D.证明:$AB=CD$.

例 4 如图 8-7,已知⊙O_1 与⊙O_2 相交于 A,B,直线 MN 垂直于 AB 且分别与⊙O_1,⊙O_2 交于 M,N,P 为线段 MN 的中点,Q_1,Q_2 分别是⊙O_1,⊙O_2 上的点,$\angle AO_1Q_1=\angle AO_2Q_2$.求证:$PQ_1=PQ_2$. (1985 年广州、武汉、福州联合初中竞赛题)

证明 连 MB,BN,因 $BA\perp MN$,则由相交两圆性质 2 的推论 2,知 O_1 在 MB 上,O_2 在 BN 上.连 O_1O_2,O_1P,则四边形 O_1O_2NP 为平行四边形,即 $O_1P=O_2N=O_2A$.于是,知 O_1O_2AP 为等腰梯形,从而

$$\angle AO_1P=\angle AO_2P,\ PO_2=AO_1=O_1Q_1.$$

又$\angle AO_1Q_1=\angle AO_2Q_2$，注意$O_1P=O_2N=O_2Q_2$，便有$\triangle O_1Q_1P\cong\triangle O_2PQ_2$.

故 $PQ_1=PQ_2$.

注 此例实际上是由 IMO－21 第 3 题改编而来：平面上两圆相交，其中一交点为 A，两边点各以匀速自 A 点出发在不同的圆周上依同向移动，这两点经移动一周后同时返回到 A 点. 求证：平面上有一定点 P，它不论在何时皆和两动点等距离.

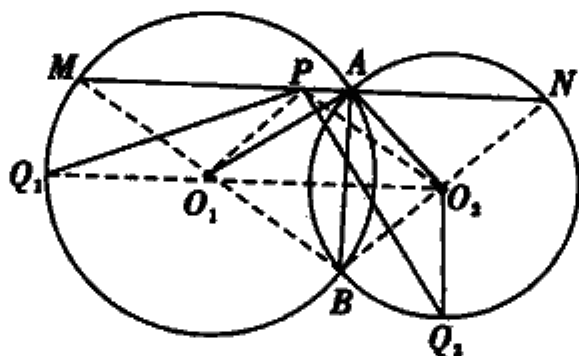


图 8－7

例 5 如图 8－8，平面上两圆$\odot O_1$与$\odot O_2$相交，其中一交点为 A. 两动点 Q_1，Q_2 各以匀速自 A 点出发在不同的圆周上依同向移动，这两点经移动一周后可同时返回到 A 点. 求证：过 A 的任一割线交两圆的两交点 M，N 分别与对应的移动中的 Q_1，Q_2 的连线互相平行.

（IMO－21 试题改编）

证明 设两动点 Q_1，Q_2 出发后，经某一时段后分别到达$\odot O_1$和$\odot O_2$上的如图 8－8 所示位置. 不妨设两动点是按逆时针方向移动，因移动一周的时间相同，故$\angle AO_1Q_1=\angle AO_2Q_2$.

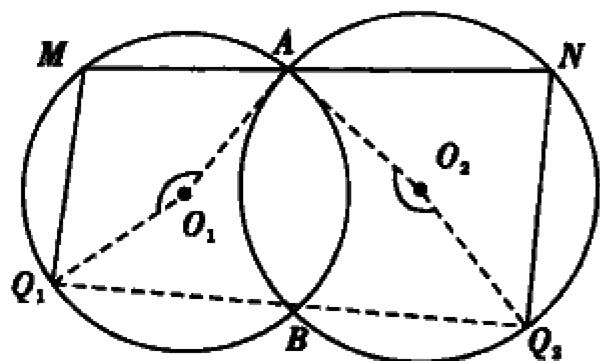


图 8－8

设 B 为$\odot O_1$与$\odot O_2$的另一交点，连 Q_1B，Q_2B. 因圆周角等于所对的同弧上的圆心角的一半，故$\angle ABQ_1=\frac{1}{2}\angle AO_1Q_1$，$\angle ABQ_2=180^\circ-\angle ANQ_2=180^\circ-\frac{1}{2}\angle AO_2Q_2$，即$\angle ABQ_1+\angle ABQ_2=\frac{1}{2}\angle AO_1Q_1+180^\circ-\frac{1}{2}\angle AO_2Q_2=180^\circ$，从而 Q_1，B，Q_2 三点共线. 于是由性质 6，知 $MQ_1/\!/NQ_2$.

【解题思维策略分析】

1. 发掘题给条件中的两圆性质

例 6 如图 8－9，$\odot O_1$与$\odot O_2$的半径均为 r，$\odot O_1$过$\square ABCD$的两顶点 A，B，$\odot O_2$过顶点 B，C，M 是$\odot O_1$，$\odot O_2$的另一个交点. 求证：$\triangle AMD$ 的外接圆半径也是 r.

证明 作$\square ABMN$，连 ND，MC，则四边形 $DCMN$ 也是平行四边形. 记$\angle BAM=\alpha$，$\angle BCM=\beta$，由于$\odot O_1$与$\odot O_2$是等圆，由相交两圆的性质 5(1)，知 $\alpha=\beta$.

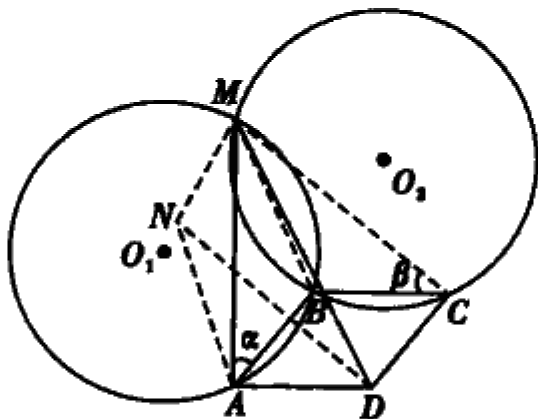


图 8－9

注意到 $AD /\!/ BC$，$ND /\!/ MC$，$AB /\!/ NM$，则知$\angle ADN=\angle BCM=\beta=\alpha=\angle BAM=\angle AMN$，由此，有 A,D,M,N 四点共圆，于是，$\angle AMD=\angle AND$.

又注意到 $AN /\!/ BM$，$DN /\!/ CM$，有$\angle AND=\angle BMC$，于是$\angle AMD=\angle BMC$.

设$\triangle AMD$ 的外接圆半径为 R，则由正弦定理有

$$2R=\frac{AD}{\sin\angle AMD}=\frac{BC}{\sin\angle BMC}=2r.\text{故 } R=r.$$

这说明$\triangle AMD$ 的外接圆半径也是 r.

例 7 如图 8－10，已知 A 为平面上两个半径不等的$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的一个交点，两圆的两条外公切线分别为 P_1P_2 和 Q_1Q_2，切点分别为 P_1,P_2,Q_1,Q_2，M_1 和 M_2 分别为 P_1Q_1，P_2Q_2 的中点.求证：$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$. （IMO－24 试题）

证明 延长 AO_1 交$\odot O_1$ 于 E，延长 AO_2 交$\odot O_2$ 于 F，由性质 2 的推论 2，知 E,B,F 三点共线.

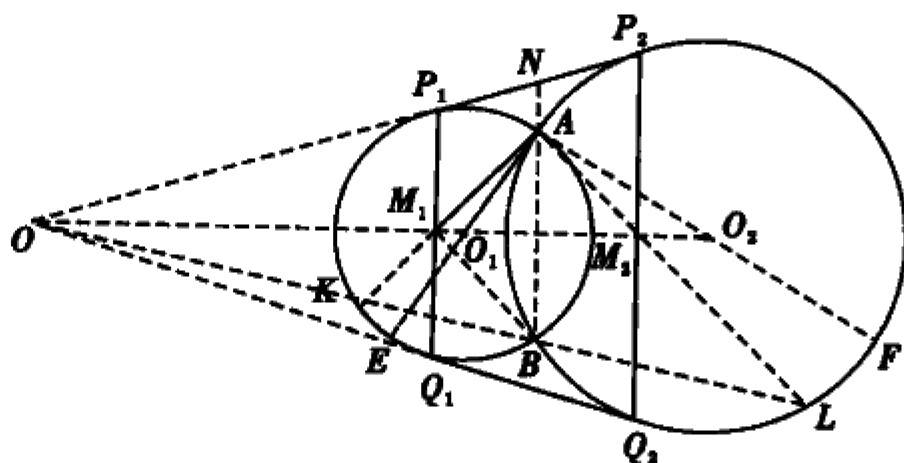


图 8－10

由于两圆半径不等，设直线 P_2P_1 与 Q_2Q_1 相交于 O，则 O 点在 O_2O_1 所在直线上.

连 OB 并延长交$\odot O_1$ 于 K，交$\odot O_2$ 于 L，连 M_1K，M_1B，M_2L.延长 BA 交 P_1P_2 于 N，则由性质 3 知 $P_1N=NP_2$，所以线段 M_1M_2 与弦 AB 互相垂直平分.于是，$\angle AM_2M_1+\angle M_1M_2L=\angle BM_1M_2+\angle BM_1O=180^\circ$，即 A,M_2,L 三点共线.同理，A,M_1,K 三点共线.

故由性质 2 的推论 1，知$\triangle AKL\backsim\triangle AEF$，即有$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

例 8 如图 8－11，圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N.设 l 是圆Γ_1 和圆 Γ_2 的两条公切线中距离 M 较近的公切线，l 与Γ_1 切于点 A，与 Γ_2 切于点 B.设过 M 且与 l 平行的直线与圆Γ_1 还相交于点 C，与圆 Γ_2 还相交于点 D，直线 CA 和 DB 交于点 E，直线 AN，BN 分别交直线 CD 于点 P 和 Q.求证：$EP=EQ$. （IMO－41 试题）

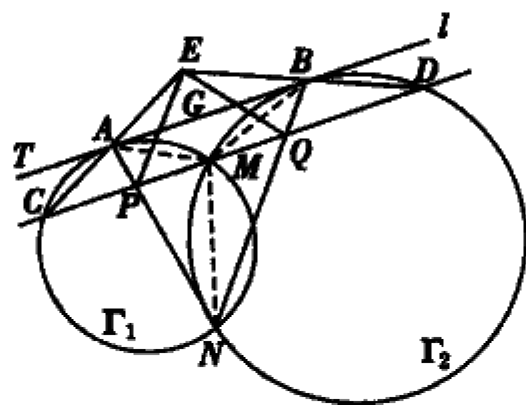


图 8－11

证明 连 NM 并延长交 AB 于 G，则由相交两圆的性质 3，知 G 为 AB 的中点.

在$\triangle NAB$ 中，由 $PQ /\!/ AB$ 又可得 M 为 PQ 的中点.

由 $AB /\!/ CM$ 及 AB 为 Γ_1 的切线，连 AM，则推知 $AC=AM$，从而知$\angle MAG=\angle CAT=$

$\angle GAE$(T 在 GA 延长线上),故 AB 平分$\angle EAM$.

同理,连 BM,知 AB 平分$\angle EBM$.

此时,即知 E,M 关于直线 AB 对称,故 $EM\perp AB$.

于是,在$\triangle EPQ$ 中,有 $EM\perp PQ$,从而 $EP=EQ$.

2. 根据题设条件构作相交圆

例 9 如图 8-12,自$\triangle ABC$ 的外接圆$\odot O$ 上任一点 P,引三边或其延长线的垂线 PL,PM,PN,分别交 BC 于 L,交 AB 于 M,交 CA 于 N,交$\odot O$ 分别于 A',B',C'.求证:$A'A\parallel B'B\parallel C'C$.

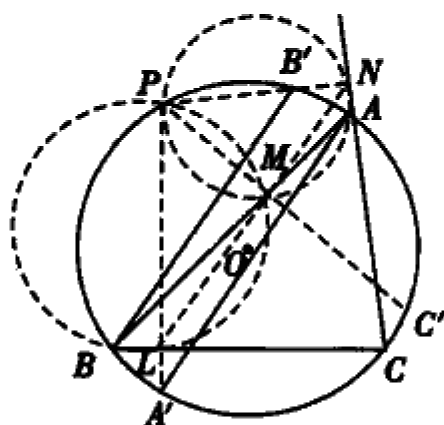


图 8-12

证明 注意到西姆松定理,知 L,M,N 三点共线.

由 P,B,L,M 四点共圆,且此圆与$\triangle ABC$ 的外接圆$\odot O$ 相交于 P,B 两点,BC,PC'是过这两相交圆交点的两条割线,根据相交两圆性质 5,知 $LM\parallel CC'$.同样,PA',BA 也是过这两相交圆交点的两条割线,由性质 6 有 $LM\parallel A'A$.故 $A'A\parallel C'C$.

又由 P,M,A,N 四点共圆,此时 PN,AB 是分别过$\odot PMAN$ 与$\odot PABC$ 的交点 P,A 的两条割线,由性质 6 知 $B'B\parallel NL$,故 $A'A\parallel B'B\parallel C'C$.

例 10 如图 8-13,等腰$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D 是 AB 延长线上一点,E 是 AC 上一点,且 $CE=BD$,DE 交 BC 于 F,经过 B,D,F 的圆交$\triangle ABC$ 的外接圆于 G.求证:$GF\perp DE$.

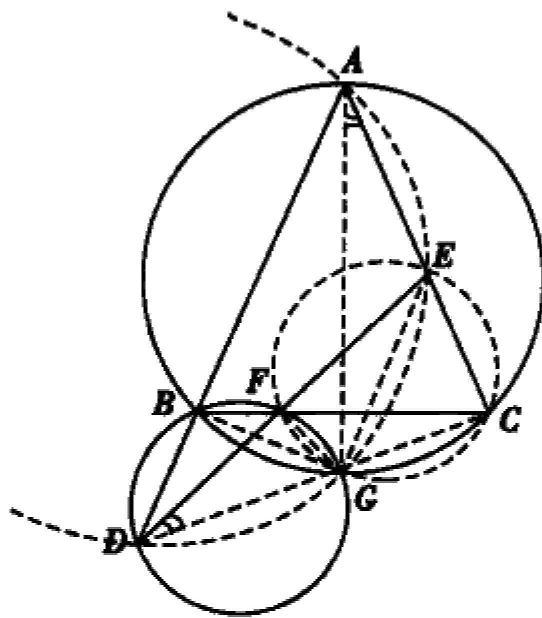


图 8-13

证明 由题设,知 B,D,G,F 及 A,B,G,C 分别四点共圆,连 BG,DG,AG,有$\angle FDG=\angle FBG=\angle CBG=\angle GAC=\angle GAE$,从而知 A,D,G,E 四点共圆.此时,连 EG,FG,则$\angle GEC=\angle ADG=\angle BDG=\angle CFG$,所以 G,C,E,F 四点共圆.于是,DE,BC 是过两相交圆$\odot BDGF$ 与$\odot GCEF$ 的交点 F 的两条割线.

由于 $CE=BD$,$\angle CFE=\angle BFD$,由两相交圆性质 5(2),知$\odot BDGF$ 与$\odot GCEF$ 是等圆.又由 A,B,G,C 共圆,有$\angle DBG=\angle ECG$.再注意到性质 5(2),知 $DG=GE$.

因 B,D,G,F 共圆,有$\angle ABC=\angle ABF=\angle FGD$.而$\angle ECF=\angle ACB=\angle ABC$,故$\angle FGD=\angle ECF$,即有 $DF=EF$.此时,推知$\triangle DGF\cong\triangle EGF$,有$\angle DFG=\angle EFG$,故 $GF\perp DE$.

例 11 已知在凸四边形 $ABCD$ 中,直线 CD 与以 AB 为直径的圆相切.求证:直线

AB 与以 CD 为直径的圆相切的充分必要条件是 $BC /\!/ AD$. (IMO－25 试题)

证明 必要性：如图 8－14，将 AB，CD 的中点分别记为 O，O'，$\odot O$ 切 CD 于 E，$\odot O'$ 切 AB 于 F. 连 $O'F$，DF，AE，OE，则 $\triangle O'DF$，$\triangle OEA$ 均为等腰三角形.

由 O'，F，O，E 四点共圆，有 $\angle DO'F=\angle FOE=\angle AOE$，从而两等腰三角形的底角相等，即 $\angle EDF=\angle EAO=\angle EAF$，由此有 D，A，F，E 四点共圆.

同理，E，F，B，C 四点共圆. 此两圆相交于 E，F. 而 CD，AB 是分别过这两交点的割线，故由性质 6，知 $BC /\!/ AD$.

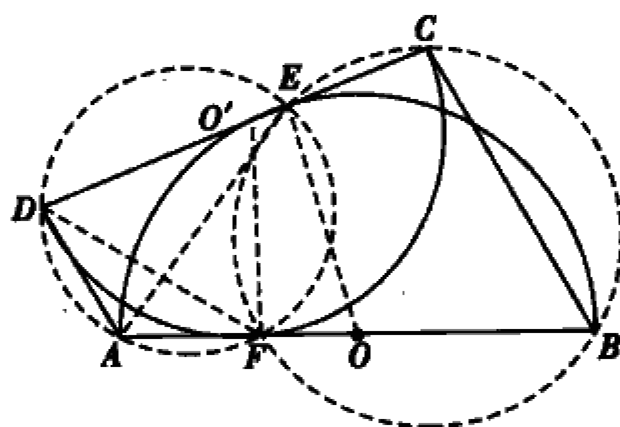


图 8－14

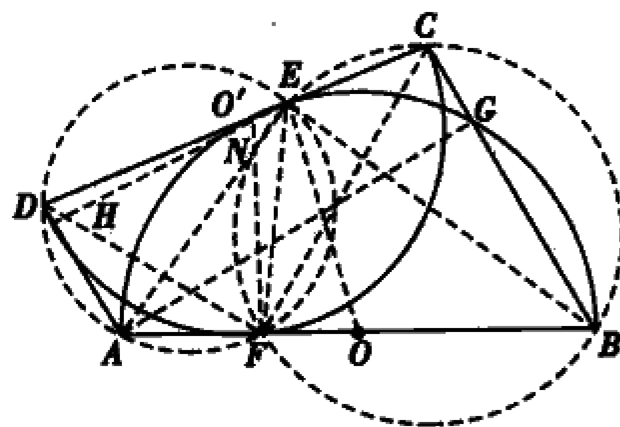


图 8－15

充分性：如图 8－15，设 O，O' 分别为 AB，CD 的中点，作 $O'F\perp AB$ 于 F. 以 AB 为直径的圆切 CD 于 E，连 OE，则 $OE\perp CD$ 于 E. 连 OO'，设 BC 与 $\odot O$ 交于 G，连 AG，过 C 作 $CH /\!/ GA$ 交 DA 于 H.

因 $BC /\!/ AD$，故 $O'O /\!/ AD$. 由 $AG\perp BC$，则 $O'O\perp AG$，$OO'\perp HC$.

而 O'，F，O，E 四点共圆，有 $\angle O'FE=\angle O'OE \overset{*}{=\!=} \angle O'CH$［其中（$*$）是由 $\angle O'OE$ 与 $\angle O'CH$ 的两对应边互相垂直推得］.

设 CH 与 $O'F$ 的交点为 M，则 M，F，C，E 四点共圆. 又因 $\angle MFB=90°=\angle BCM$，知 M，F，B，C 四点共圆，此时，有 M，F，B，C，E 五点共圆.

同理，A，F，E，D 四点共圆，且此圆与 $\odot FBCE$ 的公共弦为 EF. 连 AE，BE，则 $\angle AEB=90°$.

连 DF，FC，则由相交两圆的性质 2 的推论 1，知 $\angle DFC=90°$，故以 CD 为直径的圆过 F 点且 AB 切于点 F.

【模拟实战】

习题 A

1. 两圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A 和 B，过点 B 作两直线与两圆的交点分别为 P，Q；C，

D(P,C 在$\odot O_1$ 上),且 $CD\perp AB$.求证:$PC:QD$ 为定值.

2. 两等圆相交于 A,B,过 A 作直线与两圆分别交于 C,D.若 E 为 CD 的中点,求证:$BE\perp CD$.

3. 两圆相交于 A,B,过 A 任作直线被两圆所截得的线段为 PQ,又过 A 作 AB 的垂线,被两圆所截得的线段为 CD.求证:$PQ\leqslant CD$.

4. $\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 A,B 两点,割线 CE,FD 都过 B 点(F,C 在$\odot O_1$ 上).若$\angle ABC=\angle ABD$,求证:$CE=FD$.

习题 B

1. 梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$AB>CD$,K,M 分别是腰 AD,CB 上的点,$\angle DAM=\angle CBK$.求证:$\angle DMA=\angle CKB$.

2. 定长弦 PQ(长度小于直径)的两端在半圆弧$\overset{\frown}{AB}$上滑动.试证:不论 PQ 在什么位置,从 P,Q 分别向弦 AB 作垂线,其垂足 P',Q' 与 PQ 中点 N 所成三角形都相似.

(1981 年福州市竞赛题)

3. 三圆两两相交,并过公共点 M,而另一交点分别为 P,Q,R.过其中一圆的$\overset{\frown}{PQ}$上(不含 M 点)任取两点 A 与 A'(P,Q,M 点除外),引直线 AP,AQ,$A'P$,$A'Q$,与其他两圆依次相交于 B,C,B',C'.求证:$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

4. 给定正$\triangle ABC$,D 是 BC 边上任意一点,$\triangle ABD$ 的外心、内心分别为 O_1,I_1,$\triangle ADC$ 的外心、内心分别为 O_2,I_2,直线 O_1I_1 与 O_2I_2 相交于 P.求证:点 D 为$\triangle O_1O_2P$ 的外心.

(2001 年国家集训队选拔考试题改编)

5. 点 D 是锐角$\triangle ABC$ 的外心,过 A,B,D 作圆分别交 AC,BC 于 M,N.证明:$\triangle ABD$ 和$\triangle MNC$ 的外接圆相等.

(第 25 届全俄奥林匹克题)

6. 圆 S_1 和 S_2 交于点 A_1,A_4,圆 S_2 和 S_3 交于点 A_2,A_5,圆 S_3 和 S_1 交于点 A_3,A_6.折线 $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7$ 使得每条直线 M_kM_{k+1} 含有点 A_k.而 M_k 和 M_{k+1} 在相交于点 A_k 的两圆周上,而且点 M_{k+1} 异于点 A_{k+1}.证明:点 M_1 与点 M_7 重合.

(第 17 届全俄奥林匹克题)

第九章　完全四边形的性质及应用

【基础知识】

我们把两两相交又没有三线共点的四条直线及它们的六个交点所构成的图形，叫做完全四边形．六个点可分成三对相对的顶点，它们的连线是三条对角线．

如图 9－1，直线 ABC、BDE、CDF、AFE 两两相交于 A、B、C、D、E、F 六点，即为完全四边形 $ABCDEF$．线段 AD、BF、CE 为其三条对角线．

完全四边形中既有凸四边形、凹四边形，还有折四边形以及四个三角形．如图 9－1 中有凸四形 $ABDF$，凹四边形 $ACDE$，折四边形 $BCFE$，四个三角形 $\triangle ACF$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$、$\triangle ABE$．

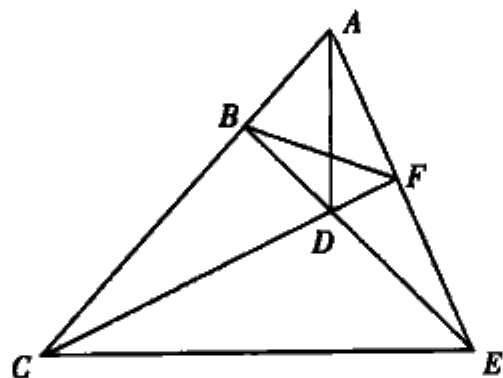


图 9－1

在完全四边形 $ABCDEF$ 中，对四个三角可以写出梅涅劳斯定理的 4 个式子（见图 1－1 后说明）；若直线 AD 交 BF 于 H，交 CE 于 G，则可以写出塞瓦定理的 7 个式子（见图 2－3）；完全四边形的四个三角形的外接圆共点（即完全四边形的密克尔点及西姆松线（见图 6－7）等．这是我们已介绍的完全四边形的性质．完全四边形还有一系列有趣的性质，下面我们介绍其中的几条：

性质 1　完全四边形 $ABCDEF$ 的三条对角线 AD、BF、CE 的中点 M、N、P 共线（即牛顿线）．

证明　如图 9－2，分别取 CD、BD、BC 的中点 Q、R、S，于是，在 $\triangle ACD$ 中，M、R、Q 三点共线；在 $\triangle BCF$ 中，S、R、N 三点共线；在 $\triangle BCE$ 中，S、Q、P 三点共线．

由平行线性质，有 $\dfrac{MQ}{MR}=\dfrac{AC}{AB}$，$\dfrac{NR}{NS}=\dfrac{FD}{FC}$，$\dfrac{PS}{PQ}=\dfrac{EB}{ED}$．

对 $\triangle BCD$ 及截线 AFE 应用梅涅劳斯定理，有

$\dfrac{CA}{AB}\cdot\dfrac{BE}{ED}\cdot\dfrac{DF}{FC}=1$，即有 $\dfrac{QM}{MR}\cdot\dfrac{RN}{NS}\cdot\dfrac{SP}{PQ}=1$．

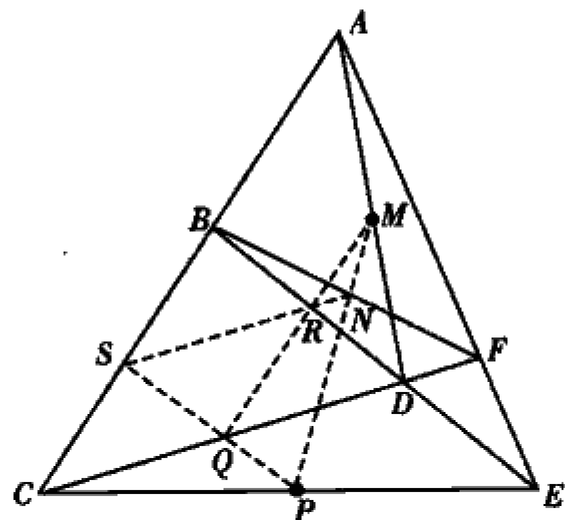


图 9－2

再对 $\triangle QRS$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理，知 M、N、P 三点共线．

注　此性质中的线称为牛顿线，其证明还有 10 多种，可参见笔者新著《走进教育

数学》§5.4,科学出版社,2009年5月出版.

性质2 完全四边形的一条对角线被其他两条对角线调和分割(两点内分与外分同一线段成同一比值,称这两点调和分割这一线段).

证明 如图9-3(a)、(b),在完全四边形$ABCDEF$中,对角线AD所在直线交BF于M,交CE于N,需证$\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$(此式表明点$M$、$N$调和分割$AD$).

若$BF // CE$,如图9-3(a),则由$\frac{AM}{AN}=\frac{BF}{CE}=\frac{MD}{ND}$,即证.

若$BF \neq CE$,可设直线BF与CE交于点P.

对$\triangle ADF$及点B应用塞瓦定理,有$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FE}{EA}=1$.

对$\triangle ADF$及截线CNE应用梅涅劳斯定理,有$\frac{AN}{ND}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FE}{EA}=1$.

上述两式相除,即得$\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$.

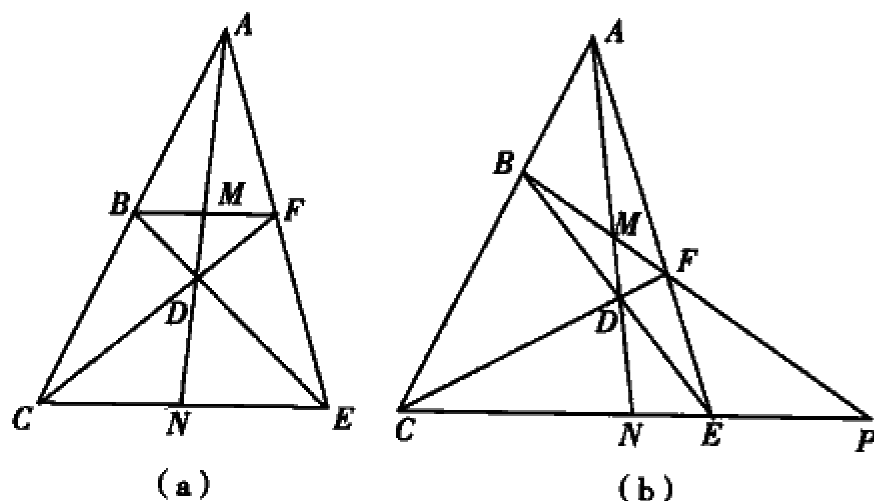


图9-3

对于图9-3(b),类似地可证明有$\frac{BM}{BP}=\frac{MF}{NF}$($M$、$P$调和分割$BF$),$\frac{CN}{CP}=\frac{NE}{PE}$($N$、$P$调和分割$CE$);对于图9-3(a),也可看作直线$BF$、$CE$相交于无穷远点,也有这两式.

性质3 完全四边形的三条对角线为直线的圆共轴,且完全四边形的四个三角形的垂心在这条轴上(此线称为完全四边形的垂足线).

证明 如图9-4,在完全四边形$ABCDEF$中,分别以对角线AD、BF、CE为直径作圆,这三个圆的圆心就是三条对角线的中点M、N、P.

设H_1、H_2、H_3、H_4分别为$\triangle DEF$、$\triangle ACF$、$\triangle ABE$、$\triangle BCD$的垂心,注意到三角形垂心的性质:三角形的垂心是所有过任一条高的两个端点的圆的根心(见根轴的性质3及垂心的性质4).

在完全四边形$ABCDEF$中,显然H_1、H_2、H_3、H_4不重心,由于$\triangle DEF$的垂心H_1是

三个圆的根心，而对于$\triangle DEF$，在它的边所在直线上的高C、B、A，点H_1关于以CE、BF、AD为直径的圆的幂相等，即点H_1在这三个圆两两的根轴上.

同样，对于$\triangle ACF$，在它的边所在直线上的点B、D、E，其垂心H_2关于以CE、BF、AD为直径的圆的幂相等，以及点H_3、H_4均关于以CE、BF、AD为直径的圆的幂相等.

故H_1、H_2、H_3、H_4均在这三个圆的两两的根轴上，即这三个圆两两的根轴重合，亦即共轴，且四个三角形的垂心在这条根轴上.

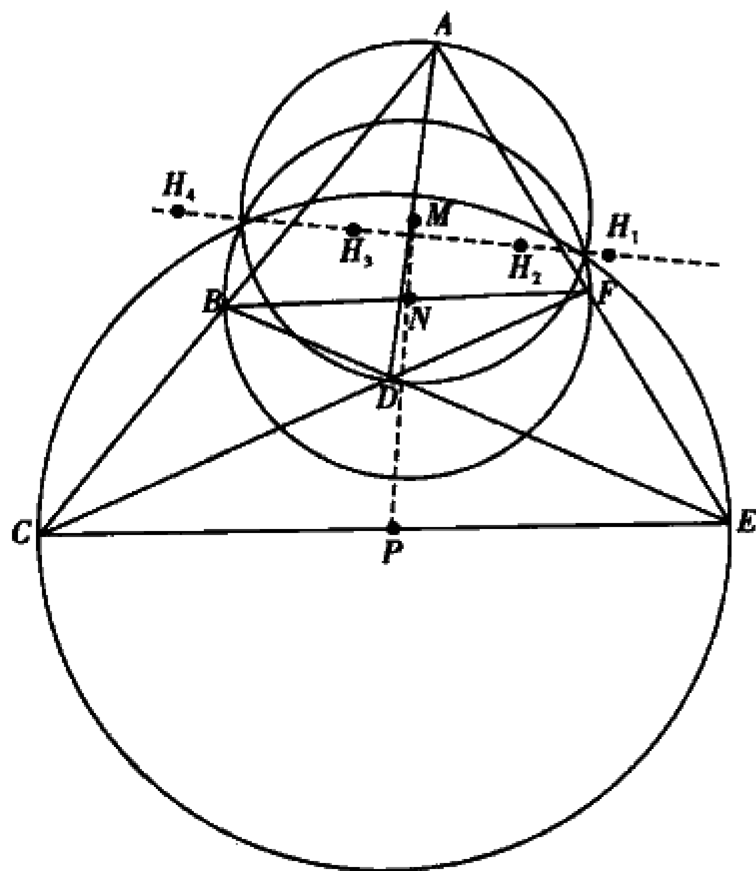


图 9－4

注 证明H_1、H_2、H_3、H_4四点共线，也可以这样证：由于完全四边形$ABCDEF$的四个$\triangle DEF$、$\triangle ACF$、$\triangle ABE$、$\triangle BCD$的外接圆交于一点M，且点M关于这四个三角形的西姆松线为同一条直线l，根据西姆松线的性质：点P的西姆松线平分点P与三角形垂心的连线(西姆松定理及应用中例5)，则知l过MH_1、MH_2、MH_3、MH_4的中点，从而点H_1、H_2、H_3、H_4共线.

推论 完全四边形的垂足线与牛顿线垂直(两圆连心线垂直于公共弦).

性质4 完全四边形的四个三角形的外接圆圆心共圆，这四个圆心每三个构成的三角形的垂心分别在构成完全四边形的四条直线上，且这四个垂心为顶点构成的四边形与四个圆心为顶点构成的四边形全等.

上述性质即指在完全四边形$ABCDEF$中，O_1、O_2、O_3、O_4分别为$\triangle ACF$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$、$\triangle ABE$的外心，H_1、H_2、H_3、H_4分别为$\triangle O_4O_2O_3$、$\triangle O_4O_1O_3$、$\triangle O_2O_4O_1$、$\triangle O_1O_2O_3$的垂心，则

(1)O_1、O_2、O_3、O_4四点共圆(斯坦纳圆)；

(2)$\triangle O_4O_2O_3\backsim\triangle ACF$，$\triangle O_1O_2O_3\backsim\triangle ABE$，$\triangle O_2O_4O_1\backsim\triangle DEF$，$\triangle O_4O_1O_3\backsim\triangle BCD$；

(3)H_1、H_2、H_3、H_4分别在BE、AE、AC、CF上，且四边形$H_1H_2H_3H_4\cong$四边形$O_2O_1O_4O_3$.

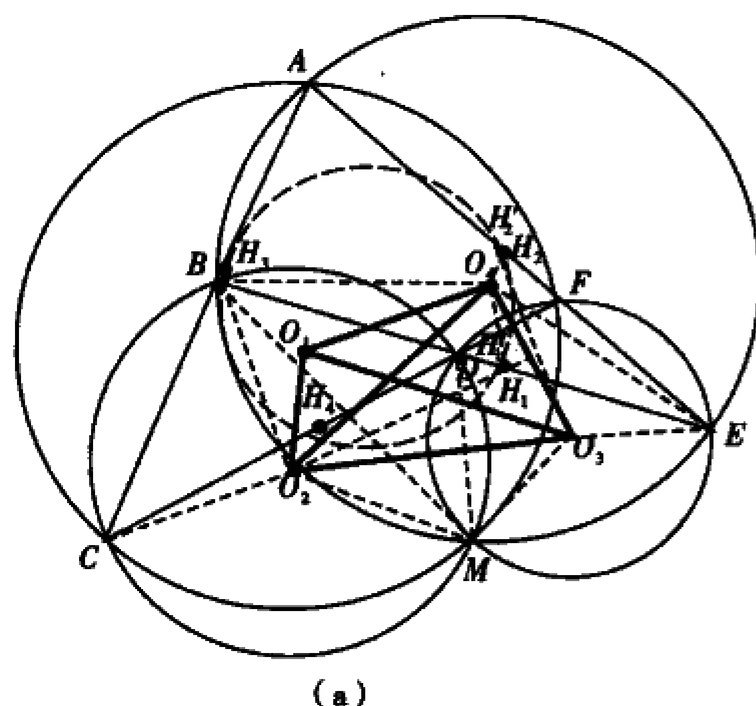
证明 设M为完全四边形$ABCDEF$的密克尔点，连接BM、CO_2、O_2M、MO_3、DM，则

(1)$\angle O_1O_2M=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle CO_2M=180^\circ-\angle CDM$.

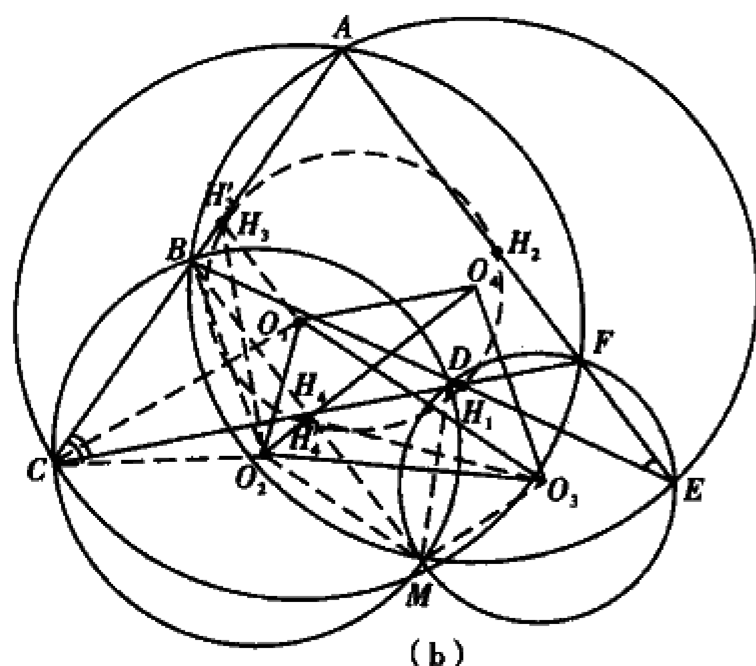
同理，$\angle O_1O_3M=180°-\angle FDM$.

从而$\angle O_1O_2M+\angle O_1O_3M=360°-(\angle CDM+\angle FDM)=180°$. 因此，$O_1$、$O_2$、$O_3$、$M$ 四点共圆．同理，O_3、O_4、O_2、M 四点共圆.

故 O_1、O_2、O_3、O_4 四点共圆.



(a)



(b)

图 9-5

(2)由 BM 为$\odot O_2$ 与$\odot O_4$ 的公共弦，则知 $O_2O_4\perp BM$.同理 $O_2O_3\perp DM$.

于是$\angle O_4O_2O_3=\angle BMD=\angle BCD=\angle ACF$.

同理，$\angle O_2O_4O_3=180°-\angle O_2MO_3=\angle BAF=\angle CAF$，故$\triangle O_4O_2O_3\backsim\triangle ACF$.

同理，$\triangle O_1O_2O_3\backsim\triangle ABE$.

于是$\angle O_2O_4O_1=\angle BEA=\angle DEF$.

又$\angle O_2O_1O_4=\angle O_2O_1O_3+\angle O_3O_1O_4=\angle O_2O_1O_3+\angle O_3O_2O_4$

$=\angle CAF+\angle ACF=\angle DFE$.

从而$\triangle O_2O_4O_1\backsim\triangle DEF$.

同理，$\triangle O_4O_1O_3\backsim\triangle BCD$.

(3)自 O_2 作 O_3O_4 的垂线交 BE 于H'_1 点，连 BO_4、BO_2、$O_4H'_1$，由 O_4 为$\triangle ABE$ 的外心，有$\angle H'_1BO_4=90°-\angle BAE$ 及$\angle H'_1O_2O_4=90°-\angle O_2O_4O_3=90°-\angle BAE$，知$\angle H'_1BO_4=\angle H'_1O_2O_4$，从而 H'_1、O_2、B、O_4 四点共圆，于是$\angle H'_1O_4O_2=\angle H'_1BO_2$.

又 O_2 为$\triangle BCD$ 的外心，知$\angle H'_1BO_2=\angle O_2BE=90°-\angle BCD$.

于是$\angle H'_1O_4O_2=90°-\angle BCD=90°-\angle O_4O_2O_3$，即

$\angle H'_1O_4O_2+\angle O_4O_2O_3=90°$.

这表明 $O_4H'_1$ 也垂直于 O_2O_3，即知 H'_1 为$\triangle O_4O_2O_3$ 的垂心，故 H'_1 与 H_1 重合.

过 O_3 过 O_1O_4 的垂线交 AE 于 H'_2，连 O_4E、O_3E、$O_4H'_2$，则 $\angle O_4EH'_2=90°-\angle ABE$，$\angle O_4O_3H'_2=90°-(180°-\angle O_1O_4O_3)=\angle O_1O_4O_3-90°=\angle CBD-90°=180°-\angle ABE-90°=90°-\angle ABE$，从而 H'_2、O_4、O_3、E 四点共圆，则有 $\angle O_4H'_2O_3=\angle O_4EO_3$.

又 $\angle O_1O_3H'_2=\angle O_1O_3O_4+\angle O_4O_3H'_2=\angle BDC+\angle O_4EH'_2=\angle BDC+90°-\angle ABE=90°-\angle ACF$，

$\angle O_4H'_2O_3=\angle O_4EO_3=\angle DEO_3+\angle DEO_4=(\angle DFE-90°)+(\angle DEF-\angle O_4EH'_2)=\angle DFE-90°+\angle DEF-(90°-\angle ABE)=\angle ABE+(180°-\angle EDF)-180°=\angle ACF$，即 $\angle O_1O_3H'_2+\angle O_4H'_2O_3=90°$，这说明 H'_2 为 $\triangle O_1O_3O_4$ 的垂心，故 H'_2 与 H_2 重合.

过点 O_2 作 O_1O_4 的垂线交 AC 与点 H'_3，连 CO_1、CO_2、H'_3O_1，则 $\angle H'_3O_2O_1+(180°-\angle O_2O_1O_4)=\angle H'_3O_2O_1+180°-\angle DFE=\angle H'_3O_2O_1+\angle AFC=90°$，$\angle H'_3CO_1=90°-\angle AFC$.

于是 $\angle H'_3O_2O_1=\angle H'_3CO_1$，即知 H'_3、C、O_2、O_1 四点共圆，有 $\angle O_2H'_3O_1=\angle O_2CO_1$.

又 $\angle H'_3O_2O_4=\angle H'_3O_2O_1+\angle O_1O_2O_4=\angle H'_3CO_1+\angle O_1O_2O_4=90°-\angle AFC-\angle FDE=90°-(\angle FDE+FED)+\angle FDE=90°-\angle FED$，

$\angle O_2H'_3O_1=\angle O_1CO_2=\angle ACF-\angle ACO_1+\angle FCO_2=\angle ACF-(91°-\angle AFC)+(\angle CBD-90°)=180°-\angle CAF+\angle CBD-180°=\angle CAF+\angle FED-\angle CAF=\angle FED$.

即 $\angle H'_3O_2O_4+\angle O_2H'_3O_1=90°$，由此知 H'_3 为 $\triangle O_1O_2O_4$ 的垂心，故 H'_3 与 H_3 重合.

过点 O_3 作 O_1O_2 的垂线交 CF 于点 H'_4，连 O_1F、$O_1H'_4$、O_3F，由 O_1 为 $\triangle ACF$ 的外心，有 $\angle H'_4FO_1=90°-\angle FAC$ 及 $\angle H'_4O_3O_1=90°-\angle O_2O_1O_3=90°-\angle FAC$，知 $\angle H'_4FO_1=\angle H'_4O_3O_1$，从而 H'_4、O_3、F、O_1 四点共圆，于是 $\angle H'_4O_1O_3=\angle H'_4FO_3$.

又 O_3 为 $\triangle DEF$ 的外心，知 $\angle H'_4FO_3=\angle DFO_3=90°-\angle FED$.

于是 $\angle H'_4O_1O_3=90°-\angle FED=90°-\angle O_1O_3O_2$，即

$\angle H'_4O_1O_3+\angle O_1O_3O_2=90°$.

这表明 $O_1H'_4$ 也垂直于 O_2O_3，即知 H'_4 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 的垂心，故 H'_4 与 H_4 重合.

综上可知，H_1、H_2、H_3、H_4 分别在 BE、AE、AC、CF 上.

下面，我们证明四边形 $H_1H_2H_3H_4\cong$ 四边形 $O_2O_1O_4O_3$.

由于 O_1、O_2、O_3、O_4 共圆，设该圆圆心为 O，设 M 为 O_2O_3 的中点 .

由垂心的性质(即 Servois 定理):三角形任一顶点至该三角形垂心的距离,等于外心至其对边的距离的两倍.于是 $O_4H_1=2OM$ 且 $O_4H_1 /\!/ OM$,$O_1H_4=2OM$ 且 $O_1H_4 /\!/ OM$,故 $O_1H_4 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} O_4H_1$,即 $O_1H_4H_1O_4$ 为平行四边形,从而有 $H_4H_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} O_1O_4$.

同理 $H_1H_2 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} O_2O_1$,$H_2H_3 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} O_3O_2$,$H_3H_4 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} O_4O_3$.

从而四边形 $H_1H_2H_3H_4 \cong O_2O_1O_4O_3$.

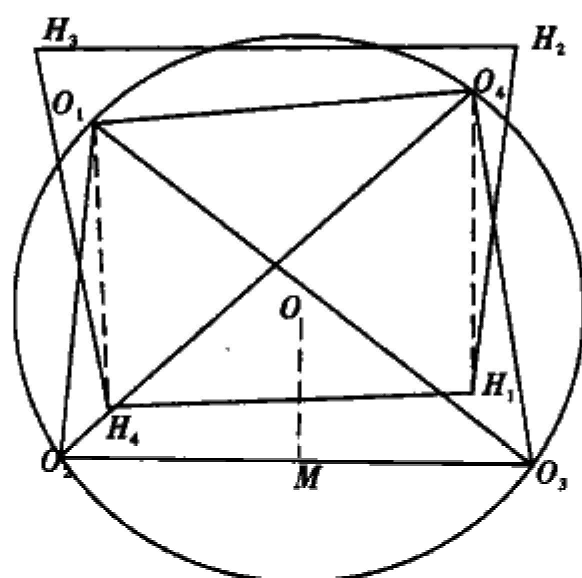


图 9-6

性质 5 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,点 G 是对角线 AD 所在直线上异于点 A 的任意一点,则

$$\cot\angle AGC+\cot\angle AGF=\cot\angle AGB+\cot\angle AGE$$

证明 如图 9-7,点 G 可以在对角线 AD 上或其延长线上.连 CE 与直线 AD 相交于点 K.在 $\triangle ACE$ 及点 D 应用塞瓦定理,有 $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CK}{KE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$. ①

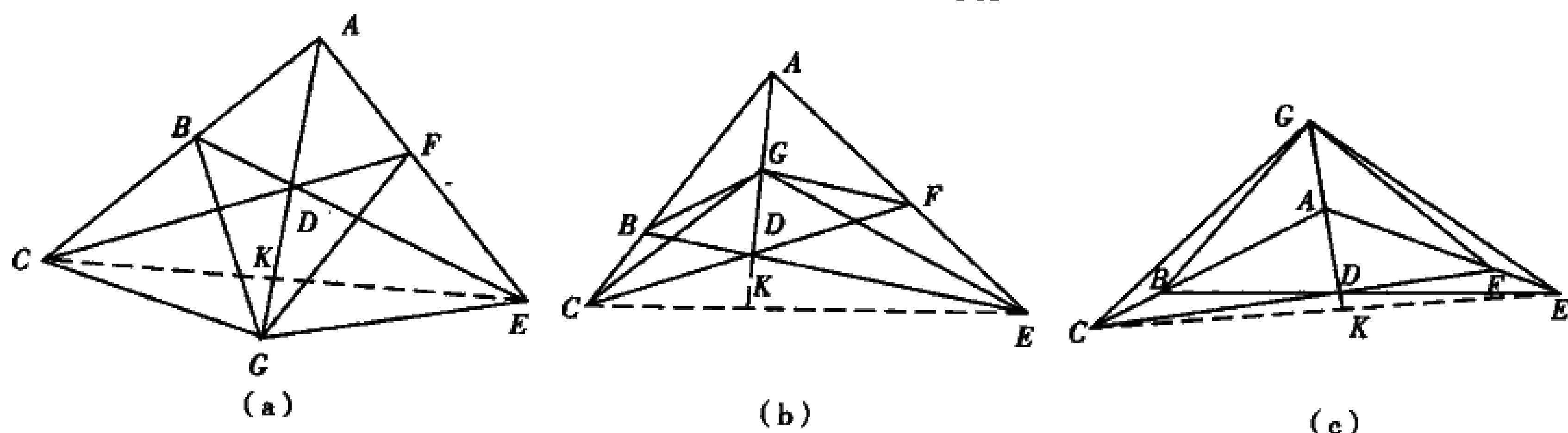


图 9-7

注意到 $\frac{AB}{BC}=\frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle GBC}}=\frac{AG\cdot\sin\angle AGB}{CG\cdot\sin\angle BGC}$,

$\frac{CK}{KE}=\frac{S_{\triangle GCK}}{S_{\triangle GKE}}=\frac{CG\cdot\sin\angle AGC}{EG\cdot\sin\angle AGE}$,

$\frac{EF}{FA}=\frac{S_{\triangle GEF}}{S_{\triangle GFA}}=\frac{EG\cdot\sin\angle EGA}{AG\cdot\sin\angle AGF}$.

将上述三式代入①式,得

$$\frac{\sin\angle BGC}{\sin\angle AGC\cdot\sin\angle AGB}=\frac{\sin\angle EGF}{\sin\angle AGE\cdot\sin\angle AGF}. \quad ②$$

而 $\sin\angle BGC=\sin(\angle AGC-\angle AGB)=\sin\angle AGC\cdot\cos\angle AGB-\cos\angle AGC\cdot\sin\angle AGB$,

$\sin\angle EGF=\sin(\angle AGE-\cos\angle AGF)=\sin\angle AGE\cdot\cos\angle AGF-\cos\angle AGE\cdot\sin\angle AGF$.

将上述两式代入②式,得 $\cot\angle AGB-\cot\angle AGC=\cot\angle AGF-\cot\angle AGE$.

故 $\cot\angle AGC+\cot\angle AGF=\cot\angle AGB+\cot\angle AGE$.

性质6 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,过 B、F 作与对角线 AD 平行的直线分别交对角线 CE 于 G、H,连结 BH、FG 相交于点 P,则点 P 在直线 AD 上.

证明 延长 AD 交 CE 于点 Q. 对 $\triangle ACE$ 及点 D 应用塞瓦定理,有

$$\frac{CQ}{QE}\cdot\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AB}{BC}=1. \qquad (*)$$

由 $BG/\!/AD/\!/FH$,有

$$\frac{AB}{BC}=\frac{GQ}{CG},\ CQ=\frac{AQ}{BG}\cdot CG,\ EF=\frac{FH}{AQ}\cdot EA.$$

将上述三式代入(*)式得 $\dfrac{GQ}{QE}\cdot\dfrac{EA}{AF}\cdot\dfrac{FH}{BG}=1$.

又由 $BG/\!/FH$,有$\dfrac{FH}{BG}=\dfrac{FP}{PG}$. 于是上式变为

$$\frac{GQ}{QE}\cdot\frac{EA}{AF}\cdot\frac{FP}{PG}=1.$$

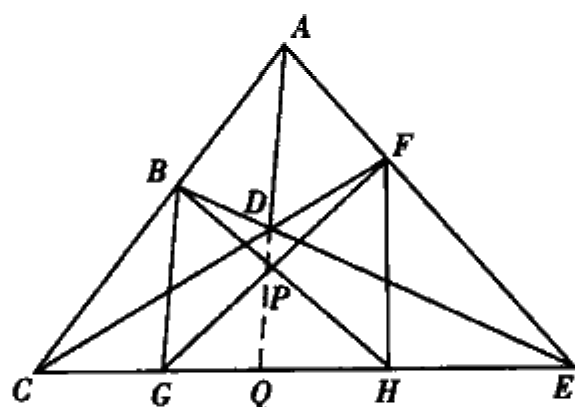


图 9-8

对 $\triangle EFG$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理,知 A、P、Q 共线,故点 P 在直线 AD 上.

性质7 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,四边形 $ABDF$ 有内切圆的充分必要条件是下述两条件之一:(1) $BC+BE=FC+FE$;(2) $AC+DE=AE+CD$.

证明 (1)充分性:如图 9-9,在 CF 上截取 $CG=CB$,在 EA 上截取 $EH=EB$,连 BG、GH、BH,则 $FH=EH-EF=EB=EF$.

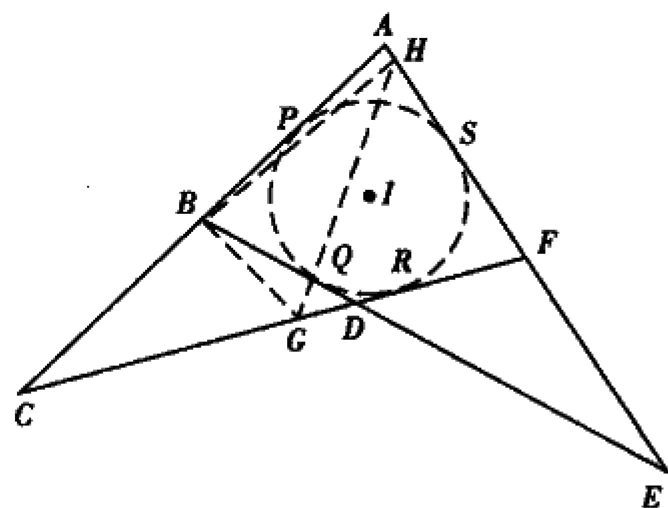


图 9-9

又 $BC+BE=FC+FE$,则 $BE-FE=FC-BC$,故 $FH=FC-BC=FC-CG=GF$.

分别作$\angle BCG$、$\angle BEH$、$\angle GFH$ 的平分线.

由 $CB=CG$、$EB=EH$、$FG=FH$,知上述三个角的平分线所在直线是$\triangle BGH$ 三边的垂直平分线,从而这三个角平分线交于一点. 设该点为 I,由角平分线的性质,知 I 到 CB 与 CF、到 EB 与 EF,到 FC 与 FA 的距离均相等,即 I 到四边形 $ABDF$ 四边的距离相等. 所以,四边形 $ABDF$ 有内切圆.

必要性:设内切圆分别交 AB、BD、DF、FA 于点 P、Q、R、S,则 $CP=CR$、$BP=BQ$,$EQ=ES$,$RF=FS$. 于是 $BC+BE=(CP-BP)+(BQ+QE)=CP+QE=CR+ES=CR+RF-FS+ES=(CR+RF)+(ES-FS)=FC+FE$.

(2)充分性:在 AC 上截取 $CM=CD$,在 AE 上截取 $EN=ED$,则 $AM=AC-CM=AC-CD=AE-DE$(已知条件)$=AE-EN=AN$,则$\angle DCM$、$\angle DEN$、$\angle MAN$ 的平分线

就是$\triangle MDN$的三边的中垂线，由此即知四边形$ABDF$有内切圆.

必要性：同(1)可证(略).

性质8 在完全四边形$ABCDEF$中，四边形$ABDF$(在$\angle BAF$内)有旁切圆(或折四边形$BCFE$有下切圆)的充分必要条件是下述两条件之一：

(1)$AB+BD=AF+FD$；(2)$AC+CD=AE+ED$.

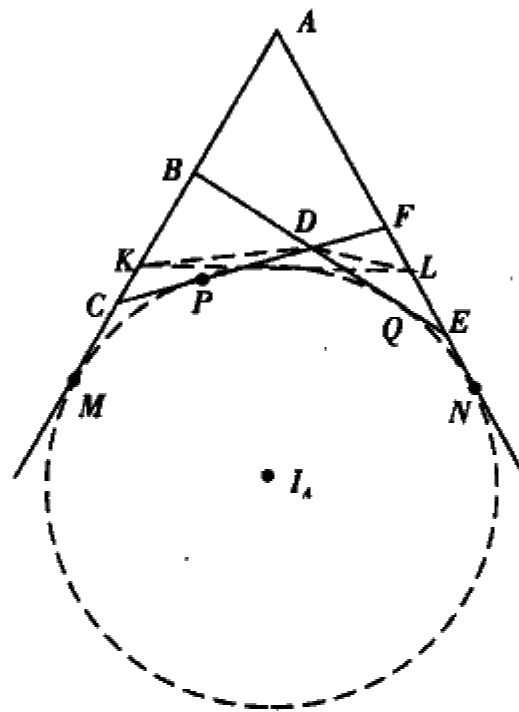


图9-10

证明 (1)充分性：在射线AB上取点K，使$BK=BD$，在射线AF上取点L，使得$FL=FD$，连DK、DL、KL. 由$AB+BK=AB+BD=AF+FD=AF+FL=AL$，知$\triangle BDK$、$\triangle FDL$、$\triangle DLK$均为等腰三角形. 设点$I_A$为$\triangle DKL$的外心，易知$I_AB$、$I_AF$、$I_AA$分别为$\triangle DKL$的三边$DK$、$DL$、$KL$的中垂线，即它们分别是$\angle DBC$、$\angle DFE$、$\angle EAC$的平分线，则点$I_A$到四边形$ABDF$各边的距离相等，即知四边形$ABDF$(在$\angle BAF$内)有旁切圆，圆心即为$I_A$.

必要性：(略).

(2)必要性：设旁切圆与四边形分别相切于点M、P、Q、N，则$AM=AN$、$CP=CM$、$EQ=EN$、$DP=DQ$，从而$AC+CD=AC+CP+PD=AM+PD=AN+DQ=AE+EN+DQ=AE+EQ+QD=AE+ED$.

充分性：(略).

【典型例题与基本方法】

例1 在凸四边形$ABCD$中，对角线AC平分$\angle BAD$，E是CD边上一点，BE交AC于G，DG交BC于F. 求证：$\angle FAC=\angle EAC$.　　(1999年全国高中联赛题)

证明 如图9-11，在完全四边形$CFBGDE$中，点A为对角线CG所在直线上一点，由题设知$\angle BAC=\angle CAD$.

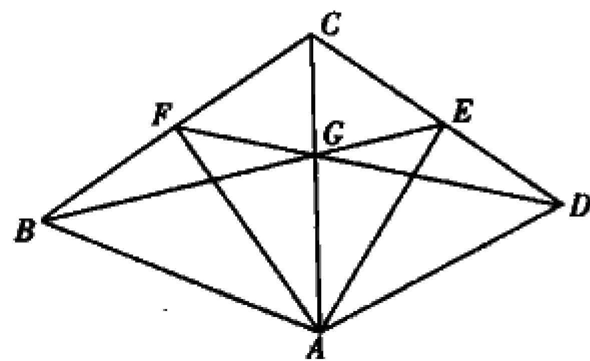


图9-11

由性质5，即知$\angle FAC=\angle EAC$.

例2 已知圆S_1与圆S_2交于P、Q两点，A_1、B_1为圆S_1上不同于P、Q的两个点，直线A_1P、B_1P分别交圆S_2于A_2、B_2，直线A_1B_1和A_2B_2交于点C. 证明：当点A_1和B_1变化时，$\triangle A_1A_2C$的外心总在一个定圆上.

(IMO-43预选题，2003年国家队集训测试题)

证明 如图9-12，当点A_1和B_1变化时，点C、B_1、A_1、P、B_2、A_2组成完全四边形

的六个顶点,由性质 4 知点 Q 恰为全四边形的密克尔点,由此即知$\triangle A_1A_2C$ 的外心 O 在完全四边形四个三角形的外接圆圆心所在的圆(即斯坦纳圆)上.

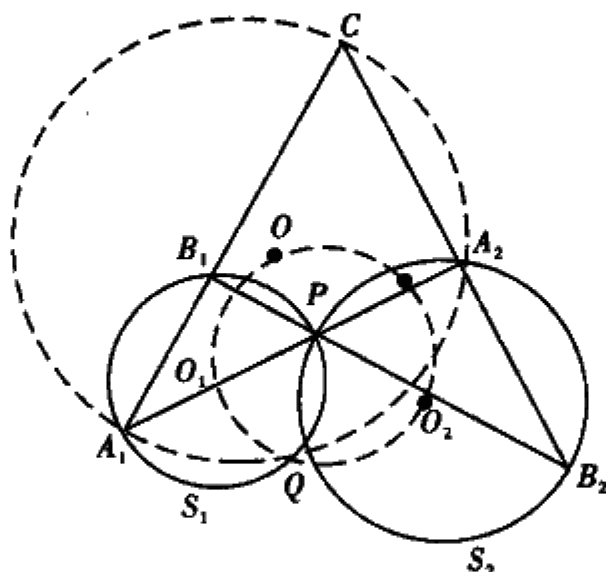


图 9-12

例 3 如图 9-13,四边形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O,两组对边的延长线分别相交于 E、F,过 O 作 EF 的平行线交 BC、AD 于 I、J.求证:$OI=OJ$.

(《数学教学》2006 年第 10 期问题 681 号)

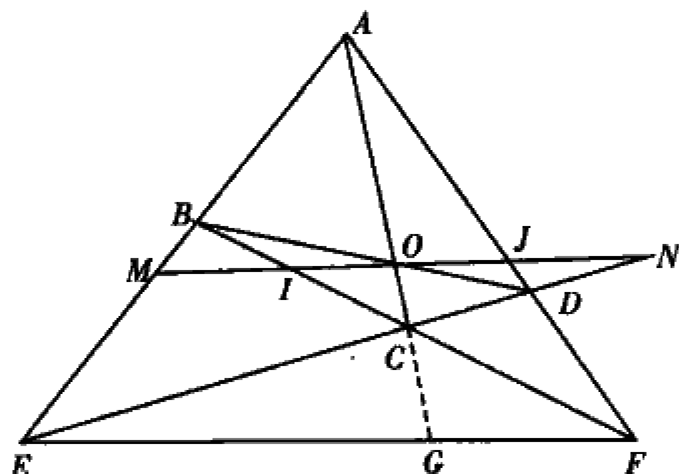


图 9-13

证明 延长 AC 交 EF 于点 G,在完全四边形 $ABECFD$ 中,由性质 2,有$\frac{AO}{AG}=\frac{OC}{GC}$.

又 $IJ\parallel EF$,则$\frac{OI}{GF}=\frac{OC}{GC}=\frac{AO}{AG}=\frac{OJ}{GF}$.

故 $OI=OJ$.

注 类似地,在完全四边形 $ABECFD$ 中,直线 IJ 交 AE 于 M,交直线 ED 于 N,则有$\frac{ON}{EG}=\frac{OC}{GC}=\frac{AO}{AG}=\frac{OM}{EG}$,故 $OM=ON$.

由此,我们可推证得:过完全四边形对角线的交点作另一条对角线的平行线,所作直线与平行对角线的同一端点所在边(或延长线)相交,所得线段被对角线交点平分.

【解题思维策略分析】

1. 灵活应用完全四边形的优美性质解题

例 4 以$\triangle ABC$ 的边 BC 为直径作半圆,与 AB、AC 分别交于点 D、E. 过 D、E 作 BC 的垂线,垂足分别是 F、G.线段 DE、EF 交于点 M.求证:$AM\perp BC$.

(1996 年第 37 届 IMO 中国国家队选拔赛试题)

证明 如图 9-14,连结 BE 与 CD,设它们相交于点 O,因

$BE \perp AC, CD \perp AB$,

则 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心,于是 $AO \perp BC$.

又 $DF \perp BC, EG \perp BC$,则

$DF // AO // EG$.

由性质 6,得点 M 在 AO 上,于是 $AM \perp BC$.

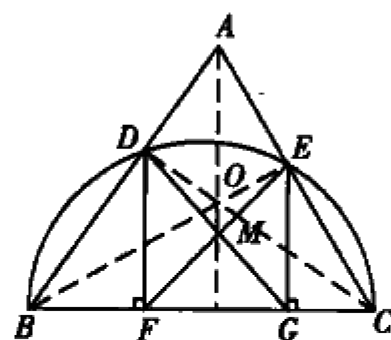


图 9-14

例 5 如图 9-15,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC = 90°$,G 为 AB 上给定的一点(G 不是线段 AB 的中点),设 D 为直线 CG 上与 C、G 都不相同的任意一点,并且直线 AD、BC 交于 E,直线 BD、AC 交于 F,直线 EF、AB 交于 H. 试证明交点 H 与 D 在直线 CG 上的位置无关.

(1990 年苏州市高中竞赛题)

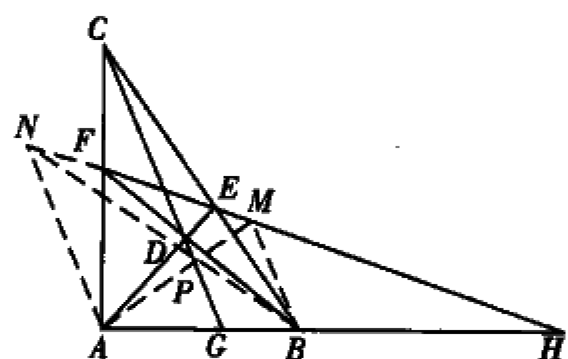


图 9-15

证明 作 $BM // CG // AN$,点 M、N 均在直线 EF 上. 连结 AM、BN. 对 $\triangle CEF$,由性质 6,知 AM 与 BN 的交点 P 在 CG 上. 则

$$\frac{HB}{HA} = \frac{BM}{AN} = \frac{PB}{PN} = \frac{GB}{GA}.$$

这说明点 H 由 G 唯一确定. 即点 H 与 D 在直线 CG 上的位置无关.

注 例 5 中条件 $\angle BAC = 90°$ 是多余的.

例 6 如图 9-16,任意五角星形 $A_1A_2A_3A_4A_5C_1C_2C_3C_4C_5$ 的五个小三角形的外接圆分别交于星形外的五个点 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5. 求证:B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 五点共圆.

证明 由于五角星可看做是由五个完全四边形所组成,由密克尔性质知每一个完全四边形有一个密克尔点,此题即证五个密克尔点 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 共圆.

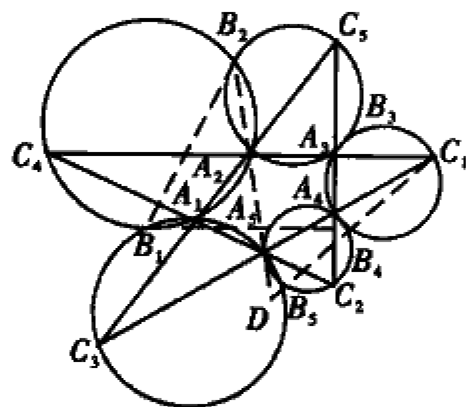


图 9-16

设 B_2A_2 的延长线与 C_1B_4 的延长线交于点 D,令 $\angle B_1B_4D = \angle 1$,$\angle B_1C_4A_3 = \angle 2$,$\angle B_1B_2A_5 = \angle 3$,$\angle D = \angle 4$,$\angle B_2B_3A_3 = \angle 5$,$\angle A_3B_3B_4 = \angle 6$,$\angle A_5A_2A_3 = \angle 7$,$\angle A_3C_1B_4 = \angle 8$.

注意到对完全四边形 $C_1A_2C_4A_1C_3A_5$ 及完全四边形 $C_4A_5C_2A_4C_1A_3$ 分别应用密克尔点性质知 $\triangle A_5C_1C_4$ 的外接圆要过 B_1 及 B_4,因此 B_1、B_4、C_1、C_4 四点共圆.

又 A_2、B_2、C_4、B_1 共圆,则 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$,从而 B_1、B_2、B_4、D 共圆.

再由 A_2、B_2、A_3、B_3 共圆,知 $\angle 5 = \angle 7$. 又由 A_3、B_3、C_1、B_4 共圆,知 $\angle 6 = \angle 8$. 因此

$\angle D+\angle B_3=\angle 4+\angle 5+\angle 6=\angle 4+\angle 7+\angle 8=180°$，故 B_2、B_3、B_4、D 共圆，即 B_1、B_2、B_3、B_4、D 五点共圆.

同样可证 B_2、B_3、B_4、B_5 共圆.故五个密克尔点共圆.

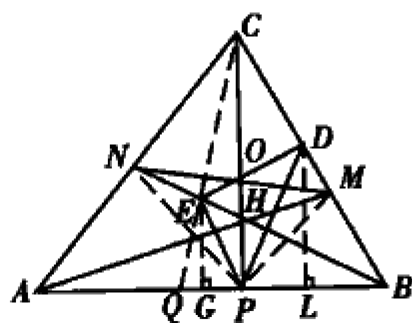


图 9－17

例 7 如图 9－17，设 H 是锐角$\triangle ABC$ 的高线 CP 上的任一点，直线 AH、BH 分别交 BC、AC 于点 M、N，MN 与 CP 交点 O，过 O 的直线交 CM 于 D，交 NH 于点 E. 求证：$\angle EPC=\angle DPC$.

（2003 年保加利亚奥林匹克试题）

证明 如图 9－17，连结 PM、PN，则由完全四边形的性质 5，知$\angle MPC=NPC$，并令其大小为 φ，再令$\angle EPC=x$，$\angle DPC=y$.

欲证 $x=y$，只须证明

$\cot x=\cot y\Leftrightarrow \cos x\sin y=\sin x\cos y\Leftrightarrow \sin\varphi\cos x\sin y=\sin\varphi\sin x\cos y\Leftrightarrow$

$\sin\varphi\cos x\sin y-\cos\varphi\sin x\sin y=\sin\varphi\sin x\cos y-\cos\varphi\sin x\sin y\Leftrightarrow\dfrac{\sin(\varphi-x)}{\sin x}=\dfrac{\sin(\varphi-y)}{\sin y}$.

由$\dfrac{NE}{EH}=\dfrac{S_{\triangle NEP}}{S_{\triangle EHP}}=\dfrac{NP\sin(\varphi-x)}{PH\sin x}$，

有$\dfrac{\sin(\varphi-x)}{\sin x}=\dfrac{NE}{EH}\cdot\dfrac{PH}{NP}$.

同理$\dfrac{\sin(\varphi-y)}{\sin y}=\dfrac{DM}{CD}\cdot\dfrac{CP}{PM}$.

注意到$\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{MO}{NO}$，只须证$\dfrac{NE}{EH}\cdot\dfrac{CD}{DM}\cdot\dfrac{PH}{CP}\cdot\dfrac{MO}{NO}=1$.

设$\angle MOD=\delta$，$\angle EOP=\psi$，又因

$\dfrac{NE}{EH}=\dfrac{S_{\triangle NEO}}{S_{\triangle EHO}}=\dfrac{NO\sin\delta}{OH\sin\psi}$，$\dfrac{CD}{DM}=\dfrac{S_{\triangle CDO}}{S_{\triangle DMO}}=\dfrac{CO\sin\psi}{OM\sin\delta}$.

于是，又只须证$\dfrac{OC}{OH}\cdot\dfrac{PH}{PC}=1$，

即$\dfrac{OC}{OH}=\dfrac{PC}{PH}$.

而此式，由完全四边形 $CNAHBM$ 应用其对角线调和分割性质即证，故$\angle EPC=\angle DPC$.

2. 发掘有约束条件的完全四边形问题制作竞赛题的背景

例 8 如图 9－18，在完全四边形 $ABCDEF$ 中，$AB=AE$.

(1)若 $BC=EF$，则 $CD=DF$，反之若 $CD=DF$，则 $BC=EF$.

(2)若 $BC=EF$(或 $CD=DF$)，M 为完全四边形的密克尔点，则$MD\perp CF$或$\triangle ACF$

的外心 O_1 在直线 MD 上.

(3)若 $BC=EF$(或 $CD=DF$),点 A 在 CF 上的射影为 H,$\triangle ABE$ 的外心为 O_2,则 O_2 为 AM 的中点,且 $O_2D=O_2H$.

(4)若 $BC=EF$(或 $CD=DF$),M 为完全四边形的密克尔点,则 $MB=ME$,且 $MB\perp AC$,$ME\perp AE$.

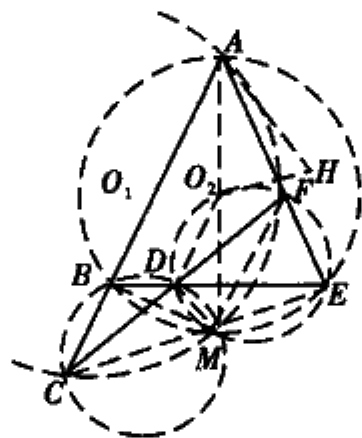


图 9-18

证明 (1)可由完全四边形中含有的比例乘积式(或对$\triangle ACF$及截线 BDE 应用梅涅劳斯定理)有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DF}\cdot\frac{FE}{EA}=1,$$

因 $AB=AE$,则由上式,知 $CD=DF\Leftrightarrow BC=EF$.

(2)由(1)知,$\triangle BCD$ 和$\triangle DEF$ 的外接圆是等圆(或由正弦定理计算推证得).又由 A、B、M、E 四点共圆,有$\angle CBM=\angle AEM=\angle FEM$,从而 $CM=MF$,于是$\triangle DCM\cong\triangle DFM$,有$\angle CDM=\angle FDM$.故 $MD\perp CF$.

由于 DM 是 CF 的中垂线,而 O_1 在 CF 的中垂线上,故$\triangle ACF$ 的外心 O_1 在直线 MD 上.

(3)由(2)知,$\triangle BCD$ 和$\triangle DEF$ 外接圆是等圆,从而$\triangle BCM\cong\triangle EFM$,即有 $BM=EM$,即知点 M 在$\angle BAE$ 的平分线上,亦即 A、O_2、M 共线,从而知 O_2 为 AM 的中点.

或者直接计算得 O_2 为 AM 的中点,在$\triangle ABE$ 中,由正弦定理,知

$$2\cdot AO_2=\frac{AB}{\sin\angle AEB}=\frac{2AB}{2\sin(90^\circ-\frac{1}{2}A)}=\frac{AC+AE}{2\cos\frac{1}{2}A}.$$

设圆 O_1 的半径为 R_1,流意到 O_1、D、M 共线,则

$$AM=2R_1\cos\angle O_1MA=2R_1\sin\angle MCA=2R_1\sin(C+\frac{A}{2}).$$

$$\text{于是}\frac{AM}{2\cdot AO_2}=\frac{2R_1\cos\left(C+\frac{A}{2}\right)}{\dfrac{AC+AE}{2\cos\frac{A}{2}}}=\frac{2\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)\cos\frac{A}{2}}{\sin\angle AFC+\sin C}.$$

而 $2\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)\cos\frac{A}{2}=2\left(\sin C\cos\frac{A}{2}+\cos C\sin\frac{A}{2}\right)\cos\frac{A}{2}=\sin C\cdot 2\cos^2\frac{A}{2}+\cos C\sin A=\sin C(1+\cos A)+\cos C\sin A=\sin C+\sin C\cos A+\cos C\sin A=\sin C+\sin\angle AFC$.

故 $AM=2AO_2$,即 O_2 为 AM 的中点.

注意到 $MD\perp CF$,$AH\perp CF$,所以 O_2 在线段 DH 的中垂线上,故 $O_2D=O_2H$.

(4)由(3)知,$BE=EM$.又 O_2 为 AM 的中点,而 O_2 为圆心即 AM 为直径,则 $MB\perp$

AC，$ME \perp AE$. 或注意到 $AB = AE$，从而 $MB = ME$.

以例 8 为背景，则可得到如下竞赛题.

试题 1 已知锐角△ABC，CD 是过点 C 的高线，M 是边 AB 的中点，过 M 的直线分别交射线 CA、CB 于点 K、L，且 $CK = CL$. 若△CKL 的外心为 S. 证明：$SD = SM$.

（2003 年第 54 届波兰奥林匹克题）

证明 事实上，如图 9 - 19，此题即为在完全四边形 $CKAMLB$ 中，$\angle C$ 为锐角，顶点在边 AB 上的射影为 D，且 $CK = CL$，$AM = MB$，S 为△CKL 的外心，此即为例 8 中的(3)，过 M 与 AB 垂直的线与 CS 延长线交为 M.

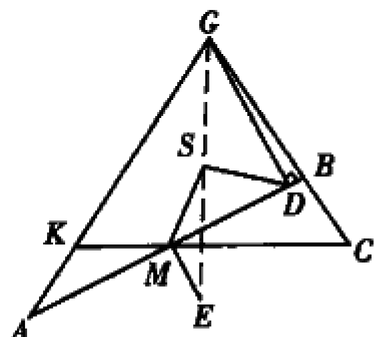


图 9 - 19

试题 2 设 AM、AN 分别是△ABC 的中线和内角平分线，过点 N 作 AN 的垂线分别交 AM、AB 于点 Q、P，过 P 作 AB 的垂线交 AN 于 O. 求证：$QO \perp BC$.

（2000 年亚太地区奥林匹克题）

证明 事实上，如图 9 - 20，过 M 作 PQ 的平行线交 AB 于 P'，交 AN 于 N'，过 P' 与 AB 垂直的直线交直线 AN 于 O'，则由 Rt△$P'O'N'$ 与 Rt△PON 是以 A 为位似中心的位似形，知 $MO' \parallel QO$.

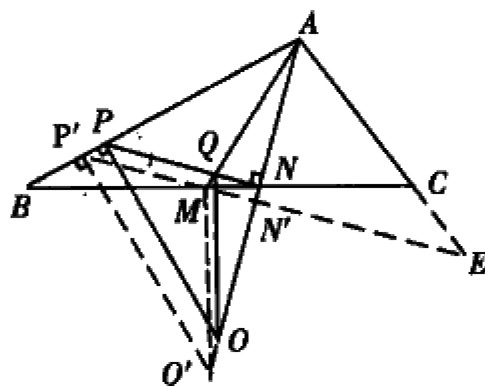


图 9 - 20

设 $P'N'$ 的延长线与 AC 的延长线交于点 E，则为完全四边形 $AP'BMEC$ 的密克尔点，于是由例 8 中的(2)，知 $O'M \perp BC$. 从而 $OQ \perp BC$.

以具有相等的边(含边上的线段)的完全四边形为背景的竞赛题还有如下的 2003 年日本奥林匹克题.

试题 3 P 是△ABC 内的一点，直线 AC、BP 相交于 Q，直线 AB、CP 相交于 R，已知 $AR = RB = CP$，$CQ = PQ$. 求 $\angle BRC$.

事实上，可在 CR 上取点 S，使 $RS = CP$，则由 $\angle ACS = \angle QPC = \angle BPR$，可推证得 $SC = RP$.

由完全四边形中的比例乘积式(即对△ABQ 及截线 RPC 应用梅涅劳斯定理)知 $AC = BP$.

又由△$ACS \cong$△BRP，得 $AD = BR$. 由此推得 $AS = AR = RS$，即 $\angle ARS = 60°$，从而 $\angle BRC = 120°$.

例 9 如图 9 - 21，完全四边形 $ABCDEF$ 中，$AC \perp BE$，$AE \perp CF$.

(1)若顶点 C、E 在对角线 BF 所在直线上的射影分别为 G、H，则 $GB = FH$.

(2)若对角线 AD 的延长线交对角线 CE 于 P，△BPF 的外接圆交 AD 于 A_1，交 CD

于C_1，交DE于E_1，则$S_{\triangle ACE}=2S_{A_1BC_1PE_1F}$，且$S_{\triangle ACE}\geqslant 4S_{\triangle BPF}$.

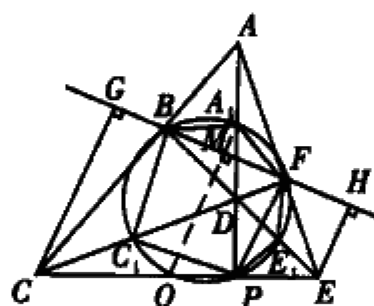


图 9-21

证明 (1)由题设知C、E、F、B、四点共圆，且CE的中点为其圆心，过O作$OM\perp BF$于M，则由弦心距性质知$BM=MF$.又$CG/\!/OM/\!/EH$，$CO=OE$，从而$GM=MH$.故

$GB=GM-BM=MH-MF=FH$.

(2)在$\triangle ACE$中，由题设知$\triangle BPF$的外接圆为$\triangle ACE$的九点圆，从而知A_1、C_1、E_1分别为AD、CD、ED的中点.于是

$$S_{\triangle BCC_1}+S_{\triangle PCC_1}=\frac{1}{2}S_{BCPD},$$

$$S_{\triangle PEE_1}+S_{\triangle FEE_1}=\frac{1}{2}S_{DPEF},$$

$$S_{\triangle BAA_1}+S_{\triangle FAA_1}=\frac{1}{2}S_{ABDF},$$

从而$S_{\triangle ACE}=2S_{A_1BC_1PE_1F}$.

由完全四边形的性质，即知$S_{\triangle ACE}\geqslant 4S_{\triangle BPF}$.

以例9为背景，则可得到如下竞赛题.

试题4 锐角$\triangle ABC$中，BD和CE是其相应边上的高.分别过顶点B和C引直线ED的垂线BF和CG，垂足为F、G.求证：$EF=DG$.

(1998年第22届独联体奥林匹克题)

试题5 锐角$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线与三角形外接圆交于另一点A_1.点B_1、C_1与此类似.直线AA_1与$\angle B$、$\angle C$两角的外角平分线相交于点A_0，点B_0、C_0与此类似，求证：

(1)$\triangle A_0B_0C_0$的面积是六边形$AC_1BA_1CB_1$面积的两倍.

(2)$\triangle A_0B_0C_0$的面积至少是$\triangle ABC$面积的四倍. (1989年第30届IMO试题)

试题6 已知圆O_1与圆O_2交于A、B两点，过点A作O_1O_2的平行线，分别与圆O_1、圆O_2交于C、D两点，以CD为直径的圆O_3分别与圆O_1、圆O_2交于P、Q两点.证明：CP、DQ、AB三线共点. (2004年第54届白俄罗斯奥林匹克题)

事实上，由$CD/\!/O_1O_2$，且$AB\perp O_1O_2$，知$CD\perp AB$.又可推得CP、DQ、AB是$\triangle BCD$的三条高线，故共点.

例10 在完全四边形$ABCDEF$中，顶点A、B、D、F四点共圆O，其对角线AD与BF交于点G.

(1)若顶点角$\angle C$、$\angle E$的平分线相交于点K，则$CK\perp EK$.

(2)$\angle BGD$的角平分线与CK平行，$\angle DGF$的角平分线与EK平行.

(3)从 C、E 分别引圆 O 的切线，若记切点分别为 P、Q.则 $CE^2=CP^2+EQ^2$；此题设条件下的完全四边形 $ABCDEF$ 的密克尔点在对角线 CE 上；若分别以 C、E 为圆心，以 CP、EQ 为半径作圆弧交于点 T，则 $CT\perp ET$.

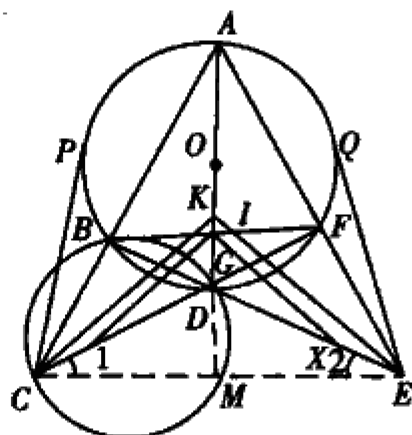


图 9－22

(4)若从 C(或 E)引圆 O 的两条切线，切点为 R、Q，则 E(或 C)、R、G、Q 四点共圆.

(5)过 C、E、G 三点中任意两点的直线，分别是另一点关于圆 O 的极线.

(6)点 O 是$\triangle GCE$ 的垂心.

(7)过对角线 BF(或 $BF\not\parallel CE$ 时的 AD)两端点处的圆 O 的切线的交点在对角线 CE 所在直线上.

(8)设 O_1、O_2 分别是$\triangle ACF$、$\triangle ABE$ 的外心，则$\triangle OO_1O_2\backsim\triangle DCE$.

(9)设点 M 是完全四边形 $ABCDEF$ 的密克尔点，则 $OM\perp CE$，且 O、G、M 共线，OM 平分$\angle AMD$，OM 平分$\angle BMF$.

(10)过点 E(或 C)的圆的割线交圆 O 于 R、P，直线 PC(或 PE)交圆 O 于点 S，则 R、G、S 三点共线.

(11)设对角线 AD 的延长线交对角线 CE 于 W，则 $WC=WE$ 的充要条件是 $WA\cdot WD=WC^2$.

(12)设对角线 CE 的中点为 Z，连结 AZ 交圆 O 于 N，则 C、D、N、E 四点共圆.

证明 (1)如图 9－22，连结 CE，令$\angle DEC=\angle 1$，$\angle DCE=\angle 2$，则

$(\angle BCD+\angle 1+\angle 2)+(\angle DEF+\angle 2+\angle 1)=\angle ABD+\angle AFD=180^\circ$，

即知$\frac{1}{2}(\angle BCD+\angle DEF)+\angle 1+\angle 2=90^\circ$，

从而$\angle CKE=180^\circ-[\frac{1}{2}(\angle BCD+\angle DEF)+\angle 1+\angle 2]=90^\circ$，

故 $CK\perp EK$.

(2)设$\angle DGF$ 的平分线交 DE 于 X，KE 交 GF 于 I，则

$\angle FGX=\frac{1}{2}\angle DGF=\frac{1}{2}(\angle GFA+\angle GAF)$，

$\angle FIE=\angle GFA-\frac{1}{2}\angle AED=\angle GFA-\frac{1}{2}(\angle ADB-\angle GAF=\frac{1}{2}(\angle GFA+\angle GAF)$.

故 $CX\parallel KE$.

同理，$\angle BGD$ 的平分线与 CK 平行.

(3)设过点 B、C、D 的圆交 CE 于点 M，连结 DM，则$\angle AFD=\angle CBD=\angle DME$，从

而 D、M、E、F 四点共圆，于是 $CM \cdot CE = CD \cdot CF$，$EM \cdot EC = ED \cdot EB$，

此两式相加，得 $CE^2 = CD \cdot CF + ED \cdot EB$.

又 CP、EQ 分别是圆 O 的切线，有 $CD \cdot CF = CP^2$，$ED \cdot EB = EQ^2$.

故 $CE^2 = CP^2 + EQ^2$.

显然，M 是圆 BCD 与圆 DEF 的另一个交点，此即为密克尔点，即题设条件下的完全四边形的密克尔点在 CE 上.

由于 $CT = CP$，$ET = EQ$，故 $CT^2 + ET^2 = CE^2$，即 $CT \perp ET$.

(4)如图 9－23，连结 CQ 交圆 O 于 R'，过 E 作 $EH \perp CQ$ 于 H，过点 C 作圆的切线 CP，切点为 P，则

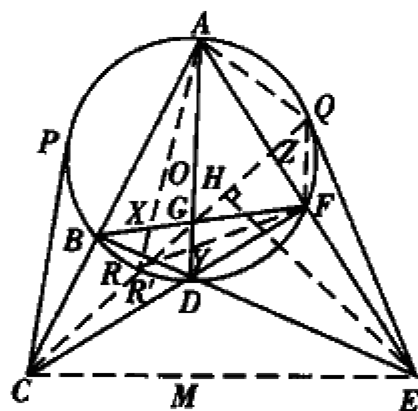


图 9－23

$$CE^2 - EQ^2 = CP^2 = CR'CQ = (CH - HR')CQ.$$

又
$$\begin{aligned} CE^2 - EQ^2 &= (CH^2 + HE^2) - (HE^2 + HQ^2) \\ &= CH^2 - HQ^2 = (CH - HQ)(CH + QH) \\ &= (CH - HQ)CQ. \end{aligned}$$

从而 $HR' = HQ$，由此即可证

$\mathrm{Rt}\triangle EHR' \cong \mathrm{Rt}\triangle EHQ$.

于是 $EQ = ER'$，而 $EQ = ER$，则 $ER' = ER$.

又 R'、R 均在圆 O 上，故 R' 与 R 重合，即 C、R、Q 三点共线.

或者，设 CE 上的点 M 是密克尔点，则 $EQ^2 = ED \cdot EB \cdot = EM \cdot EC$.

从而
$$\begin{aligned} CE^2 - EQ^2 &= CE^2 - EM \cdot EC = CE \cdot CM = CD \cdot CF \\ &= (CO - OQ)(CO + OQ) = CO^2 - OQ^2. \end{aligned}$$

由此，知 $CQ \perp OE$. 而 $RQ \perp OE$，故 C、R、Q 三点共线.

为证 R、G、Q 共线，连结 AR 交 BF 于点 X，连结 RF 交 AD 于点 Y，设 RQ 与 AF 交于点 Z，连结 AQ、QF. 于是

$$\frac{AZ}{ZF} = \frac{S_{\triangle QAZ}}{S_{\triangle QZF}} = \frac{QA \sin\angle AQZ}{QF \sin\angle ZQF}.$$

同理 $\dfrac{FY}{YR} = \dfrac{DF \sin\angle FDY}{DR \sin\angle YDR}$，$\dfrac{RX}{XA} = \dfrac{BR \sin\angle RBX}{BA \sin\angle XBA}$.

由 $\triangle EAQ \backsim \triangle EQF$，有 $\dfrac{QA}{QF} = \dfrac{EQ}{EF}$.

同理，有 $\dfrac{DF}{DR} = \dfrac{ED}{EB}$，$\dfrac{RX}{XA} = \dfrac{EB}{ER}$.

而 $\angle AQZ = \angle YDR$，$\angle ZQF = \angle RBX$，$\angle FDY = \angle XBA$，$EQ = ER$.

于是 $\dfrac{AZ}{ZF} \cdot \dfrac{FY}{YR} \cdot \dfrac{RX}{XA} = 1$.

对$\triangle ARF$应用塞瓦定理的逆定理，知AY、FX、RZ共点于G，故R、G、Q共线.

综上可知，C、R、G、Q四点共线.

(5)由(4)即证.

(6)由于$OE\perp RQ$，即$OE\perp CG$. 同样$OC\perp EG$. 由此即知，O为$\triangle GCE$的垂心，亦可知$OG\perp CE$.

(7)由(5)知，直线CE是点G关于圆O的极线，从而过点G的弦的两端点处的切线的交点在直线CE上.

(8)若点O在AD上，则O_1、O_2分别为AC、AE的中点，此时，显然$\triangle OO_1O_2\backsim\triangle DCE$.

若点O不在AD上，如图9-24所示，则O_1、O_2不在AC、AE上. 连结AO_1、CO_1、AD、AO、OD、AO_2、O_2E、BF.

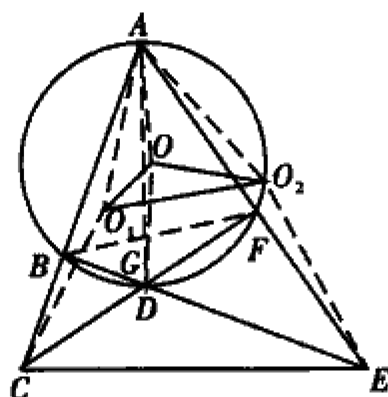


图9-24

由$\angle AO_2E=2(180^\circ-\angle ABE)=2\angle AFD=\angle AOD$，

及$O_2A=O_2E$，$OA=OD$，

知$\triangle AO_2E\backsim\triangle AOD$.

即有$\dfrac{AO_2}{AO}=\dfrac{AE}{AD}$.

又$\angle O_2AE=\angle OAD$，

则$\triangle AOO_2\backsim\triangle ADE$.

同理$\triangle AO_1C\backsim\triangle AOD$，$\triangle AOO_1\backsim\triangle ACD$.

于是$\dfrac{O_1O}{CD}=\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{OO_2}{DE}$.

由$\triangle AO_1C\backsim\triangle AO_2E$，知$\dfrac{O_1O_2}{CE}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AO}{AD}$，

从而$\triangle OO_1O_2\backsim\triangle DCE$.

(9)如图9-25，过点D和M作圆O的割线MD交圆O于点T，连结AM、AO、TO. 由A、B、D、F及A、B、M、E分别共圆，知

$\angle EFD=\angle ABE=\angle AME$.

又由D、F、A、T共圆，知$\angle EFD=\angle ATD=\angle ATM$，因$AE$、$TM$是过两相交圆交点$F$、$D$的割线，从而$EM/\!/AT$. 于是$\angle TAM=\angle AME=\angle ATM$，即知$MA=MT$. 又$OA=OT$，从而$MO\perp AT$，故$OM\perp ME$.

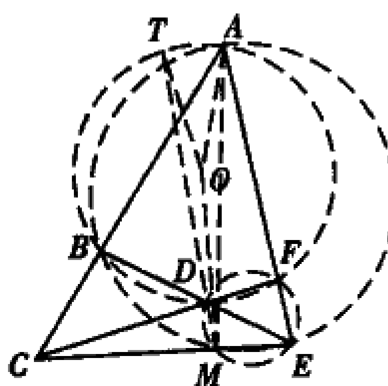


图9-25

而M在CE上，故$OM\perp CE$，又由(6)知，$OG\perp CM$，

故O、G、M三点共线.

（此题为 2002 年中国国家队选拔赛题的特殊情形，故 OM 平分 $\angle AMD$，OM 平分 $\angle BMF$）

（10）如图 9－26，连结 PA、PB、SD、DR、RF、PF.

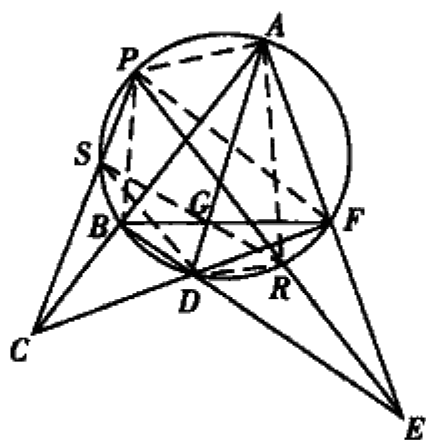


图 9－26

由 $\triangle EFR \backsim \triangle FPA$，$\triangle CPA \backsim \triangle CSB$，有

$$\frac{FR}{PA}=\frac{FE}{PE},\frac{AP}{SB}=\frac{CP}{CB}.$$

从而 $\frac{FR}{SB}=\frac{FE}{PE}\cdot\frac{CP}{CB}$.

由 $\triangle ERD \backsim \triangle EBP$，$\triangle CBP \backsim \triangle CSA$，亦有

$$\frac{RD}{AS}=\frac{ED}{EP}\cdot\frac{CP}{CA}.$$

由上述两式相除，得

$$\frac{FR}{SB}\cdot\frac{AS}{RD}=\frac{FE}{ED}\cdot\frac{CA}{CB}.$$

用 $\frac{BD}{AF}$ 乘上式两边，应用完全四边形性质 1 中式①（即对 $\triangle ABE$ 及截线 CDF 应用梅涅劳斯定理）. 知 $\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DE}=1$.

从而 $\frac{FR}{RD}\cdot\frac{DB}{BS}\cdot\frac{SA}{AF}=1$.

对上式应用塞瓦定理角元形式的推论（或同（4）的证明中证 R、G、Q 共线的方法）即证得 SR、BF、AD 三线共点.

故 S、G、R 三点共线.

（11）如图 9－27，由完全四边形中比例乘积式（即对 $\triangle ACE$ 及点 D 应用塞瓦定理）. 有

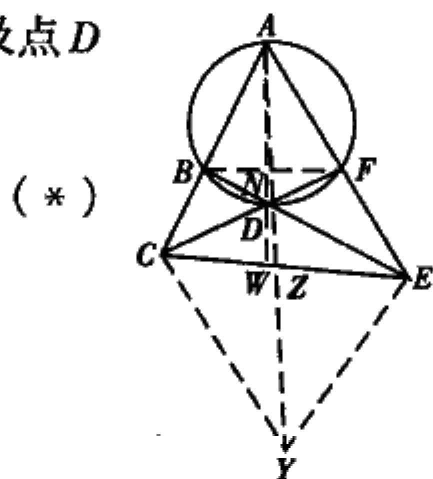


图 9－27

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CW}{WE}\cdot\frac{EF}{FA}=1. \quad (*)$$

$$WA\cdot WD=WC^2\Leftrightarrow\frac{WC}{WD}=\frac{WA}{WC}\Leftrightarrow\triangle DWC\backsim\triangle CWA$$

$$\Leftrightarrow\angle DCW=\angle CAW=\angle BFD\Leftrightarrow BF/\!/CE\Leftrightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{FE}$$

$$\Leftrightarrow\frac{AB}{BC}\cdot\frac{EF}{FA}=1\overset{\text{式}(*)}{\Leftrightarrow}WC=WE.$$

（12）设 AZ 不过点 D（否则 D 与 N 重合，$\triangle DCE$ 的外接圆即为所求），如图 9－27 所示，延长 AZ 到 Y，使 $ZY=AZ$，则 $ACYE$ 为平行四边形. 注意到

$$\angle CDE=\angle BDF=180^\circ-\angle BAF=180^\circ-\angle CYF.$$

从而，C、Y、E、D 四点共圆.

又$\angle AND=\angle AFD=180^\circ-\angle ABD=180^\circ-\angle YEB$，

则$\angle YND=180^\circ-\angle AND=\angle ABD=\angle YED$.

于是 D、N、E、Y 四点共圆.

故 C、Y、E、N、D 五点共圆，即知 C、D、N、E 四点共圆.

以例 10 为背景，可得到如下竞赛题.

试题 7 四边形 $ABCD$ 内接于圆，直线 AB、DC 交于点 E，直线 AD、BC 交于点 F，$\angle AEC$ 的平分线交于 BC 于点 M，交 AD 于点 N，$\angle BFD$ 的平分线交 AB 于 P，交 CD 于点 Q.求证：四边形 $MPNQ$ 是菱形.(事实上由例 10 中(1)即得)

(1950 年波兰奥林匹克题，2004 年斯洛文尼亚国家队选拔赛题)

试题 8 四边形 $ABCD$ 内接于圆，其边 AB 与 DC 的延长线交于点 M，边 AD 与 BC 的延长线交于点 N.由 N 作该圆的两条切线 NQ 和 NR，切点分别为 O、R.求证：M、Q、R 三点共线.(事实上，由例 10 中(4)即得)

(1997 年中国奥林匹克题)

试题 9 $\triangle ABC$ 中，一个以 O 为圆心的圆经过顶点 A 及 C，又和线段 AB 及线段 BC 分别交于点 K 及 N，K 与 N 不同.$\triangle ABC$ 和$\triangle BNK$ 的外接圆恰相交于 B 和另一点 M.求证：$\angle BMO=90^\circ$.(事实上，由例 10 中(9)即得)

(1985 年第 26 届 IMO 试题)

试题 10 一个圆通过$\triangle ABC$ 的顶点 A、B，分别交线段 AC、BC 于点 D、E，直线 BA 和 ED 交于点 F，直线 BD 和 CF 交于点 M.证明：$MF=MC$ 的充要条件为 $MB\cdot MD=MC^2$.(事实上，由例 10 中(11)即得)

(2003 年第 32 届美国奥林匹克题)

例 11 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，顶点 B、C、E、F 四点共圆于圆 O，点 M 为完全四边形的密克尔点.

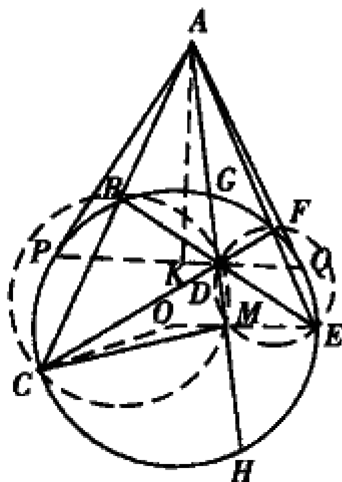


图 9－28

(1)从点 A 向圆 O 引切线 AP、AQ，切点为 P、Q，则 P、D、Q 三点共线.

(2)圆 O 的两段弧调和分割对角线 AD 所在直线(参见第十一章性质 8).

(3)点 M 在对角线 AD 所在直线上.

(4)AM 平分$\angle CME$，AM 平分$\angle BMF$，且 C、O、M、E 共圆，B、O、M、F 共圆.

(5)$OM\perp AD$.

(6)A、P、O、M、Q 五点共圆.

(7)直线 QM、BF、CE 三线共点或相互平行.

证明 (1)如图 9-28,证 R、G、Q 三点共线而证得 P、D、Q 共线.

或者由点 M 的性质有 $AD\cdot AM=AB\cdot AC=AP^2$,知$\triangle APD\backsim\triangle AMP$,有$\angle ADP=\angle APM$.

同理$\angle ADQ=\angle AQM$,而$\angle APM+\angle AQM=180°$,

则$\angle ADP+\angle ADQ=180°$.

故 P、D、Q 共线.

(2)设直线 AD 交圆于 G、H,如图 9-28 所示.

过 A 作 $AK\perp PQ$ 于 K,则

$PK=KQ$.

由 $AP^2=AG\cdot AH=AK^2+PK^2$,$AD^2=AK^2+KD^2$.

两式相减有

$$\begin{aligned}AG\cdot AH-AD^2&=PK^2-KD^2=(PK+KD)(PK-KD)=PD\cdot DQ\\&=DG\cdot DH=(AD-AG)(AH-AD)\\&=AD\cdot AH-AD^2+AD\cdot AG-AH\cdot AG.\end{aligned}$$

于是 $2AG\cdot AH=AD(AH+AG)$

即$\dfrac{AD}{AG}+\dfrac{AD}{AH}=2=\dfrac{AG}{AG}+\dfrac{AH}{AH}$.

从而$\dfrac{AD-AG}{AG}=\dfrac{AH-AD}{AH}$,

故$\dfrac{DG}{AG}=\dfrac{DH}{AH}$.

此式表明圆 O 的两段弧调和分割 AD 所在直线.

(3)在直线 AD 上取点 M',使 $AD\cdot AM'=AP^2=AB\cdot AC=AF\cdot AE$,

则 B、C、M'、D 四点共圆,E、F、D、M' 四点共圆,即 M' 为圆 BCD 与圆 DEF 的交点,从而 M' 为完全四边形 $ABCDEF$ 的密克尔点,即 M' 与 M 重合,故点 M 在直线 AD 上.

(4)连结 CM、EM,则$\angle CMH=\angle CBD=\angle EFD=\angle EMH$.故

$\angle CME=2\angle CBE=\angle COE$.

从而,AM 平分$\angle CME$,且 C、O、M、E 四点共圆.

同理,AM 平分$\angle BMF$,且 B、O、M、F 四点共圆.

(5)连结 OC、OE,由 C、O、M、E 共圆,则

$$\angle OMC=\angle OEC=\angle OCE=\frac{1}{2}(180°-\angle COE)=90°-\frac{1}{2}\angle COE$$

$= 90° - \angle CBE = 90° - \angle CMH$,

即$\angle OMC + \angle CMH = 90°$.

故 $OM \perp AM$,

即 $OM \perp AD$.

(6)由$\angle APO = \angle AMO = \angle AQO = 90°$,知 A、P、O、M、Q 五点共圆.

(7)对圆 $OMFB$、圆 $CEMO$、圆 O 用根轴定理,即知直线 OM、BF、CE 三线共点或平行.

注 由(5)$OM \perp AD$,知 A、P、O、M、Q 五点共圆.又 $AD \cdot AM = AB \cdot AC = AP$,即有$\triangle APD \backsim \triangle AMP$,亦有$\angle ADP = \angle APM$.同理$\angle ADQ = \angle AQM$.而$\angle APM + \angle AQM = 180°$,故$\angle ADP + \angle ADQ = 180°$.得(1)中 P、D、Q 共线.

以例 11 题设为背景也可以编写如下竞赛题.

试题 11 已知圆 O 的半径为 r,A 为圆外一点,过点 A 作直线 l(与 AO 不同),交圆 O 于点 B、C,且 B 在 A、C 之间,作直线 l 关于 AO 的对称直线交圆 O 于点 D、E,且 E 在 A、D 之间.证明:四边形 $BCDE$ 两条对角线的交点为定点,即该点不依赖于直线 l 的位置.(2004 年第 21 届希腊奥林匹克题)

事实上,可推证得 O、D、E、P 共圆,$AP = \dfrac{AO^2 - r^2}{AO}$为定值.

【模拟实战】

习题 A

1. 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$BC = EF$.点 G 是点A 关于 CE 中点的中心对称点,则 DG 是$\angle CGE$ 的平分线.
2. 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$BE \perp AB$,$CF \perp AE$,以 AC 为直径的圆交 BE 于P,交 EB 的延长线于Q,以 AE 为直径的圆交 CF 于M,交 CF 的延长线于N.求证:P、N、Q、M 四点共圆.
3. 如图 9-29,在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$\angle CAE = 90°$,$AB = AF$,且过 B、F 分别作AC、AE 的垂线的交点G 在CE 上.设 BG 交CF 于M,FG 交BE 于N.求证:

   (1)$FN = GM$;

   (2)$MN /\!/ CE$;

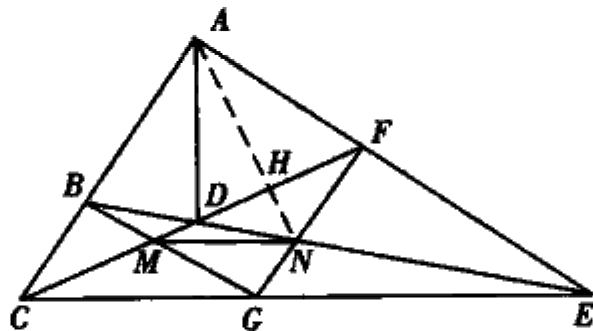


图 9-29

(3) $AD \perp CE$.

4. 如图 9－30，在完全四边形 $ABCDEF$ 中，$AC > AE$，$BE \perp AC$，$CF \perp AB$. 过 B 作 CE 的垂线交 CE 于 M，交 CD 于 H，与 EA 的延长线交于点 P，过 F 作 CE 的垂线交 CE 于 N，交 DE 于 G，与 CA 的延长线交于点 Q. 求证：四直线 PQ、BF、HG、MN 共点．

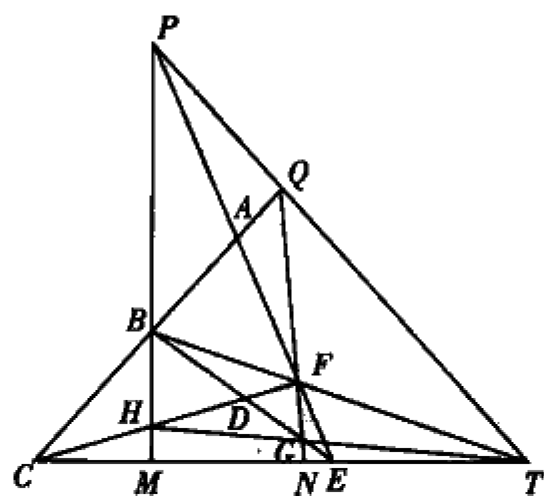


图 9－30

在上述习题中，由于 $AD \perp CE$，则知 $BM // AD // FN$，由此我们可得：

问题 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，$BF \not\parallel CE$，过 B 作 $BM // AD$ 交 CE 于 M，交 CD 于 H，与 EA 的延长线交于点 P，过 F 作 $FN // AD$ 交 CE 于 N，交 DE 于 G，与 CA 的延长线交于点 Q. 求证：四直线 PQ、BF、HG、MN 共点.

事实上，如图 9－31，由于 $BF \not\parallel CE$，设直线 BF 与 CE 交于点 T. 由 $BM // AD // FN$，令 AD 的延长线交 CE 于 R，则

$\frac{BH}{BM}=\frac{AD}{AR}=\frac{FG}{FN}$，得$\frac{BH}{FG}=\frac{BM}{FN}$.

由平行线 BM、FN 截共点线 TB、TM，有$\frac{BM}{FN}=\frac{TB}{TF}$，

从而$\frac{BH}{FG}=\frac{TB}{TF}$. （ * ）

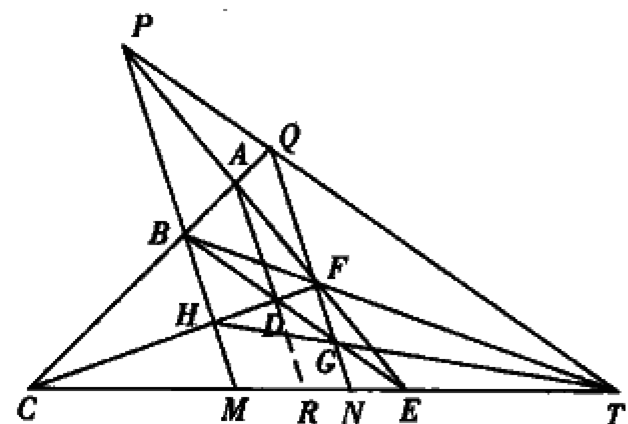


图 9－31

连 TG、TH，由 $BH // FG$，及（ * ）式得 TG、TH 重合，从而 H、G、T 三点共线.
同理，P、Q、T 三点共线．
故 PQ、BF、HG、MN 四直线共点.

第十章　根轴的性质及应用

【基础知识】

定义　从一点 A 作一圆周的任一割线，从 A 起到和圆周相交为止的两线段之积，称为 A 点对于此圆周的幂.

由相交弦定理及切割线定理，知点 A 的幂是定值：若这点在圆内，则这点的幂等于以该点为中点的弦的半弦长的平方；则若这点在圆外，则这点的幂等于从这点所引圆周切线长的平方；若这点在圆周上，则这点的幂等于 0.

由定义，幂有下列的结论：

结论 1　点 A 对于以 O 为圆心的圆周的幂，等于 OA 及其半径的平方差.

结论 2　对于两已知圆有等幂的点的轨迹，是一条垂直于连心线的直线.

事实上，如图 10－1，设点 A 到$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的幂相等，$\odot O_1$，$\odot O_2$ 的半径分别为 R_1 和 $R_2(R_1>R_2)$，则 $AO_1^2-R_1^2=AO_2^2-R_2^2$，即 $AO_1^2-AO_2^2=R_1^2-R_2^2=$常数.

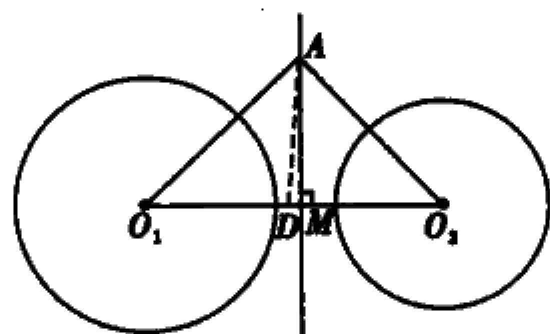


图 10－1

设 O_1O_2 的中点为 D，$AM\perp O_1O_2$ 于 M，则 $AO_1^2=AD^2+O_1D^2+2O_1D\cdot DM$，$AO_2^2=AD^2+DO_2^2-2DO_2\cdot DM$，即 $AO_1^2-AO_2^2=2DM\cdot(O_1D+DO_2)=2DM\cdot O_1O_2$，亦即 $DM=\dfrac{R_1^2-R_2^2}{2O_1O_2}=$常数. 所以，$M$ 点是一定点，过 M 点的垂线即是两圆等幂点的轨迹.

这条直线称为两圆的根轴或等幂轴.

特别地，若两圆同心，则 $O_1O_2=0$，从而同心圆的根轴不存在；若 $R_2=0$，$\odot O_2$ 变成一点 O_2，则 A 点在$\odot O_2$ 的幂是 AO_2^2. 此时，直线(轨迹)称为一圆与一定点的根轴.

根轴有如下性质：

性质 1　若两圆相交，其根轴就是公共弦所在的直线.

由于两圆的交点对于两圆的幂都是 0，所以，它们位于根轴上，而根轴是直线，所以，根轴是两交点的连线.

性质 2　若两圆相切，其根轴就是过两圆切点的公切线.

性质3 三个圆，其两两的根轴或相交于一点，或互相平行.

事实上，若三条根轴中有两条相交，则这一交点对于三个圆的幂均相等，所以必在第三条根轴上.这一点，称为三圆的根心.例如，三角形的垂心是所有过任一条高的两个端点的圆的根心.

显然，当三个圆的圆心在一直线上时，三条根轴互相平行；当三个圆的圆心不共线时，根心存在.

性质4 若两圆相离，则两圆的四条公切线的中点在根轴上.

【典型例题与基本方法】

1.注意点对圆周的幂的结论的应用

例1 如图10－2，从半圆上的一点 C 向直径 AB 引垂线，设垂足为 D，作 $\odot O_1$ 切 $\overset{\frown}{BC}$，CD，DB 分别于 E，F，G.求证：$AC=AG$.

证明 设半圆的圆心为 O，则 O，O_1，E 共线.连 O_1F，知 $O_1F\perp CD$，得 $O_1F/\!/AB$.连 EF，AE，由 $\angle FEO_1=\frac{1}{2}\angle FO_1O=\frac{1}{2}\angle EOB=\angle OEA$，知 E，F，A 三点共线.

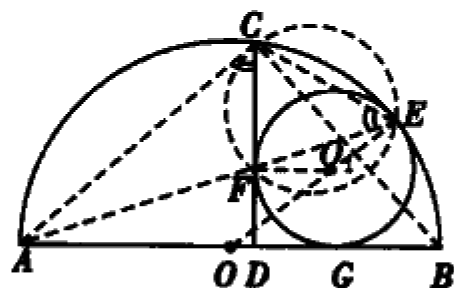


图10－2

又因 $\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，有 $\angle ACF=\angle ABC=\angle AEC$，从而 AC 是 $\odot CEF$ 的切线，故点 A 对 $\odot CEF$ 的幂 AC^2 等于点 A 对 $\odot O_1$ 的幂 AG^2，即有 $AC=AG$.

例2 如图10－3，设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，过 I 作 AI 的垂线，分别交边 AB，AC 于 P，Q.求证：分别与 AB 及 AC 相切于 P 及 Q 的圆 L 必与 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 相切.

（1992年台北市奥林匹克题）

证明 延长 AI 交 $\odot O$ 于 M，设 $\odot O$ 的半径为 R，则点 L 对 $\odot O$ 的幂为 $R^2-LO^2=LA\cdot LM$，于是

$$\begin{aligned}LO^2&=R^2-LA\cdot LM=R^2-LA\cdot(IM-LI)\\&=R^2-LA\cdot IM+LA\cdot LI\\&=R^2-LA\cdot IM+LP^2.\end{aligned}$$

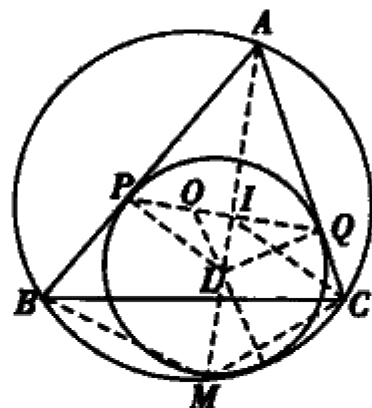


图10－3

由 $\angle MIC=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=\angle BCM+\frac{1}{2}\angle C=\angle MCI$，知

$MI=MC=2R\cdot\sin\frac{1}{2}\angle A=2R\cdot\frac{PL}{AL}$.

从而，$LO^2=R^2-LA\cdot2R\cdot\frac{PL}{AL}+LP^2=(R-PL)^2$.

由此,即知⊙L与⊙O相切.

2. 注意根轴性质的灵活运用

例3 如图10-4,设⊙O_1与⊙O_2相离,引它们的一条外公切线切⊙O_1于A,切⊙O_2于C,又引它们的一条内公切线切⊙O_1于B,切⊙O_2于D.求证:直线AB和CD的交点在两圆的连心线上.

证明 设直线AB和CD的交点为K,直线AC与BD的交点为E,连O_1E,O_2E,则

$AB\perp O_1E$,$CD\perp O_2E$.

由O_1E平分$\angle AEB$,O_2E平分$\angle CED$,知$O_1E\perp O_2E$,由此推知$AB\perp CD$,即K是分别以AC和BD为直径的两圆Γ_1和Γ_2的交点,从而K在圆Γ_1和圆Γ_2的根轴上.

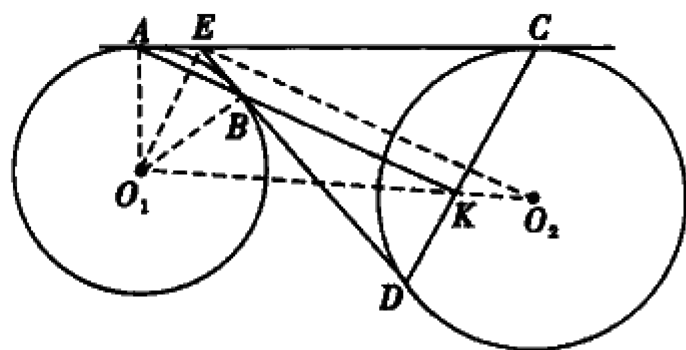


图10-4

连O_1A,O_1B,又由$O_1A\perp AC$,知O_1A是圆Γ_1的切线,O_1关于圆Γ_1的幂是O_1A^2.

同理,O_1B是圆Γ_2的切线,O_1关于Γ_2的幂是O_1B^2.由于$O_1A^2=O_1B^2$,所以O_1是关于圆Γ_1和Γ_2的等幂点.

同样,O_2是关于圆Γ_1和圆Γ_2的等幂点.所以O_1O_2是圆Γ_1和Γ_2的根轴.于是,K在连心线O_1O_2上.

例4 如图10-5,已知两个半径不相等的圆⊙O_1与⊙O_2相交于M,N两点,且⊙O_1,⊙O_2分别与⊙O内切于S,T两点.求证:$OM\perp MN$的充分必要条件是S,N,T三点共线.　　(1997年全国高中联赛题)

证明 连OS,OT,ST,作公切线SP,TP相交于P,则得$PS=PT$,由此即知自P点向⊙O_1和⊙O_2所作切线长相等,故点P在这两圆⊙O_1和⊙O_2的根轴上,且有$PS^2=PN\cdot PM$.

连OP交ST于点Q,则$OP\perp ST$,且$PQ\cdot PO=PS^2=PN\cdot PM$,故$O$,$Q$,$N$,$M$四点共圆.

由此,即有$OM\perp MN\Leftrightarrow OQ\perp QN\Leftrightarrow N$在直线$ST$上$\Leftrightarrow S$,$N$,$T$三点共线.

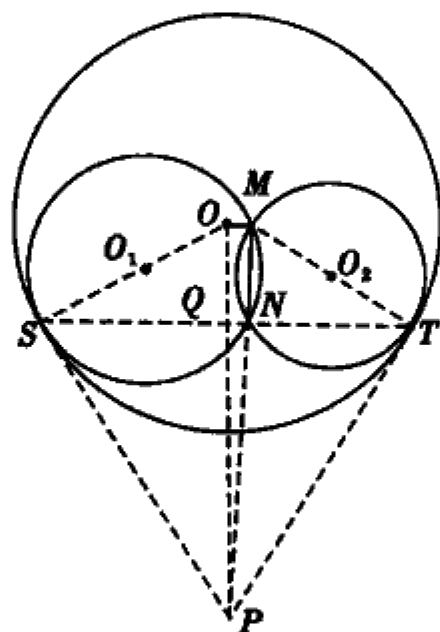


图10-5

例5 如图10-6,$\triangle ABC$中,O为外心,三条高AD,BE,CF相交于点H,直线ED和AB交于点M,FD和AC交于点N.求证:(Ⅰ)$OB\perp DF$,$OC\perp DE$;(Ⅱ)$OH\perp MN$.

(2001年全国高中联赛题)

证明 (Ⅰ)过 B 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 BT,则由 A,F,D,C 四点共圆,知 $\angle TBA=\angle ACB=\angle BFD$,有 $DF/\!/BT$,而 $OB\perp BT$.故 $OB\perp DF$.同理 $OC\perp DE$.

(Ⅱ)取 OH 的中点 V,下证 V 为 $\triangle DEF$ 的外心.设 A',B',C' 分别为 BC,CA,AB 的中点.由 A,B,D,E 四点共圆,有 $\angle BED=\angle BAD=90°-\angle B$.同理,$\angle BEF=\angle BCF=90°-\angle B$.从而 $\angle DEF=\angle BED+\angle BEF=180°-2\angle B$.

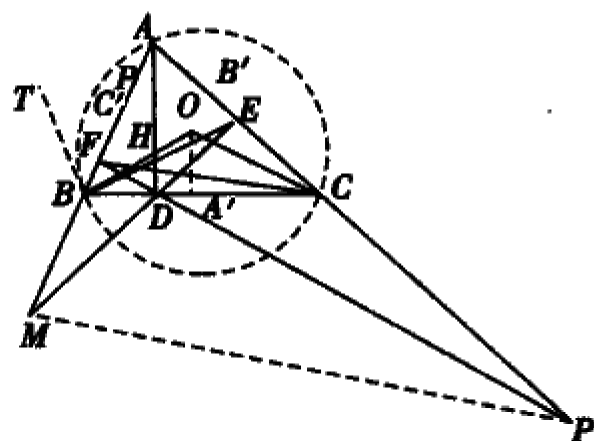


图 10-6

又因为 A' 为 $\mathrm{Rt}\triangle BFC$ 的斜边 BC 上的中点,知 $\angle FA'B=2\angle FCB=180°-2\angle B$,从而知 F,A',D,E 四点共圆.

同理,D,F,B',E 及 C',F,D,E 分别四点共圆,由此即知 A',B',C',D,E,F 六点共圆.

又因为 $OA'\perp BC,DH\perp BC,V$ 为 OH 的中点,即知 V 在 $A'D$ 的垂直平分线上.

同理,V 在 $B'E,FC'$ 的垂直平分线上,故 V 是 $\triangle DEF$ 的外接圆的圆心.

再由 D,E,A,B 及 D,F,A,C 分别四点共圆,有 $MD\cdot ME=MB\cdot MA,ND\cdot NF=NC\cdot NA$.由此即知 M,N 对 $\triangle ABC$ 的外接圆与 $\triangle DEF$ 的外接圆的幂相等,从而 M,N 在这两个外接圆的根轴上,即有 $MN\perp OV$,故 $MN\perp OH$.

【解题思维策略分析】

1. 根轴与点对圆的幂是密切相关的

例 6 如图 10-7,$\odot O$ 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A,C,且与 AB,BC 交于 K,N(K 与 N 不同),$\triangle ABC$ 的外接圆和 $\triangle BKN$ 的外接圆相交于 B 和 M.求证:$\angle BMO=90°$.

(IMO-26 试题)

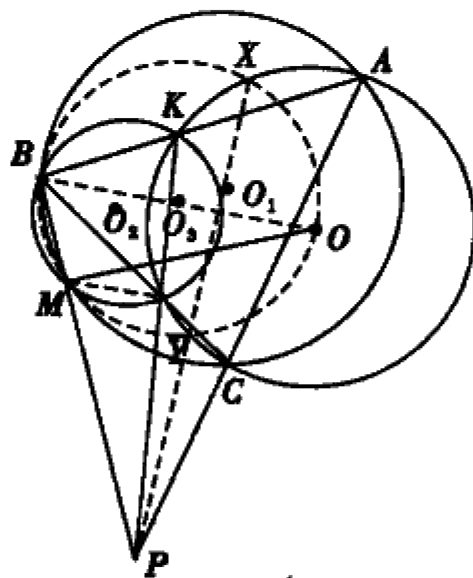


图 10-7

证明 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BKN$ 的外接圆圆心分别为 O_1,O_2,由题设,推知 O,O_1,O_2 三点不共线(否则 B 和 M 重合),而直线 AC,KN,BM 分别为这三个圆中两两圆的根轴,故它们必相交于一点,不妨设交于点 P.

由 $\angle PMN=\angle BKN=\angle NCA$,知 P,M,N,C 四点共圆,则 B 点对此圆 $\odot PMNC$ 的幂等于 B 点对 $\odot O$ 的幂,即有(设 R 为 $\odot O$ 的半径)$BM\cdot BP=BN\cdot BC=BO^2-R^2$.

又点 P 对 $\odot O_2$ 的幂等于点 P 对 $\odot O$ 的幂,即有 $PM\cdot PB=PN\cdot PK=PO^2-R^2$.

由上述两式相减,得 $PO^2-BO^2=BP(PM-BM)=(PM+BM)(PM-BM)=$

PM^2-BM^2，由此有 $OM\perp BP$，故 $\angle OMB=90°$.

例7 如图 10－8，设四边形 $ABCD$ 内接于圆，其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P，AD 与 BC 的延长线交于点 Q，由 Q 作该圆的两条切线 QE 和 QF，切点分别为 E,F，则 P,E,F 三点共线．（1997 年 CMO 试题）

证明 连 PQ，并在 PQ 上取一点 M，使得 B,C,M,P 四点共圆，则 Q 为⊙$ABCD$和⊙$BCMP$两圆根轴上的点，则

$$QE^2=QC\cdot QB=QM\cdot PQ. \quad ①$$

此时 $\angle PMC=\angle ABC=\angle PDQ$，从而 C,D,Q,M 四点共圆，即知 P 对此圆⊙$CDQM$的幂为

$$PC\cdot PD=PM\cdot PQ. \quad ②$$

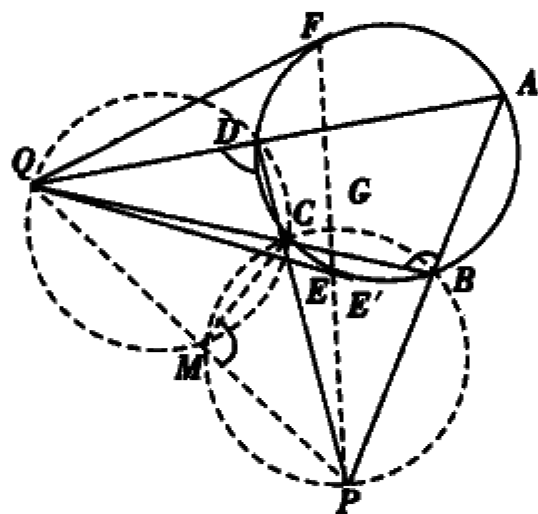


图 10－8

连 PF 交⊙$ABCD$于 E'，作 $QG\perp PF$ 于 G，则 P,Q 对⊙$ABCD$的幂分别为 $PC\cdot PD=PE'\cdot PF$，③

及 $QC\cdot QB=QF^2$. ④

由①＋②并注意③，④式，有

$$QM\cdot PQ+PM\cdot PQ=PQ^2=QC\cdot QB+PC\cdot PD=QF^2+PE'\cdot PF,$$

即 $$PQ^2-QF^2=PE'\cdot PF=(PG-GE')\cdot PF. \quad ⑤$$

又 $$PQ^2-QF^2=(PG^2+QG^2)-(QG^2+GF^2)=PG^2-GF^2$$
$$=(PG-GF)(PG+GF)=(PG-GE)\cdot PF. \quad ⑥$$

比较⑤与⑥式，得 $PE'=PG-GE'=PG-GE$，即 E' 与 E 重合，故 P,E,F 三点共线．

注 在此，需要指出：对于例 6 与例 7 应用根轴的概念来处理，可以发现它们的等价性．如图 10－7，设以 BO 为直径的圆为⊙O_3，且⊙O_3 与⊙O 交于 X,Y 两点，则 $BY\perp OY$，即 BY 为⊙O 的一条切线．

同理，BX 也为⊙O 的切线．若例 7 结论成立，则知 KN,XY,AC 三条根轴交于一点 P．

又直线 BM,KN,AC 分别为⊙O_1 与⊙O_2，⊙O_2 与⊙O，⊙O_1 与⊙O 的根轴，则 BM,KN,AC 交于一点，故 BM 过 P 点．

由于 XY 是⊙O_3 与⊙O 的根轴，则⊙O_1 与⊙O_3 的一个交点为 B 时，另一个交点在 BM 直线上，且为 M 点，即⊙O_3 过点 M．又由于 BO 为直径，有 $\angle BMO=90°$.

反之，若例 6 结论成立也可推得例 7 结论成立，例 7 即图 10－8 中的圆内接四边形 $ABCD$ 也一一对应于例 6 即图 10－7 中的四边形 $ACNK$．

例8 如图 10－9，某圆分别与凸四边形 $ABCD$ 的 AB,BC 两边相切于 G,H 两点，与对角线 AC 相交于 E,F 两点．问 $ABCD$ 应满足怎样的充要条件，使得存在另一圆过

E,F 两点,且分别与 DA,DC 的延长线相切?证明你的结论.

(第40届IMO中国国家队选拔考试题)

分析 所求的充分必要条件是 $AB+AD=CB+CD$.

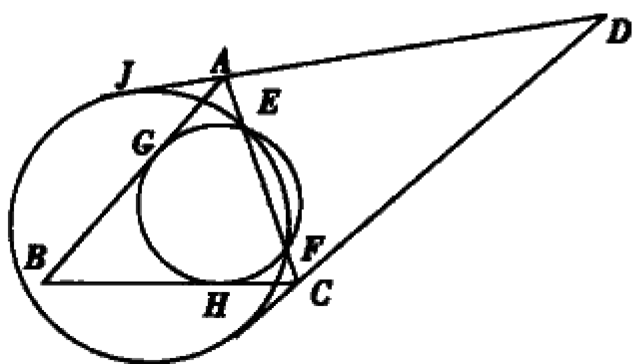


图10-9

证明 必要性:设过 E,F 两点的另一圆分别与 DA 的延长线和 DC 的延长线相切于 J 和 K 两点.注意到点 A 对这两个圆幂相等,即 $AG^2=AE\cdot AF=AJ^2$,同样有 $CH^2=CK^2$,则有 $AB+AD=BG+GA+AD=BG+JA+AD=BG+JD=BH+KD=BH+KC+CD=BH+HC+CD=BC+CD$

充分性:设凸四边形 $ABCD$ 满足条件 $AB+AD=CB+CD$.

在 DA 的延长线和 DC 的延长线上分别取 J 点和 K 点,使 $AJ=AG$,$CK=CH$.于是,$DJ=JA+AD=AG+AD=AB+AD-BG=CB+CD-BH=CH+CD=DK$.

过 J 点和 K 点分别作 DJ 和 DK 的垂线,以两垂线交点为圆心作通过 J 点和 K 点的圆,由 $AJ=AG$,$CK=CH$,则 A 点和 C 点关于原有圆的幂分别等于这两点关于所作圆的幂.而直线 AC 与原有圆相交于 E 和 F 两点,且 AC 是这两圆的根轴,所以 EF 是这两圆的公共弦.至此,便证明了所作的与 DA 延长线和 DC 延长线相切的圆通过 E,F 两点.

2. 根轴是联系圆与圆关系的一座桥梁

例9 设圆 O 的内接凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 的交点为 P,过 P、B 两点的圆 O_1 与过 P、A 两点的圆 O_2 相交于两点 P 和 Q,且圆 O_1、圆 O_2 分别与圆 O 相交于另一点 E、F.求证:直线 PQ、CE、DF 或者共点或者互相平行.

(2005年国家队队员选拔赛题)

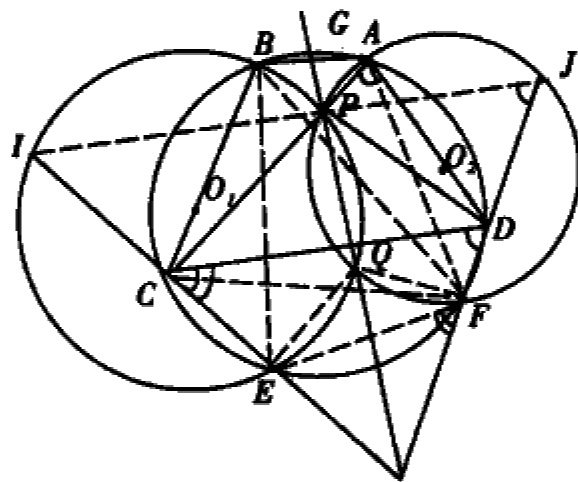


图10-10

证明 如图10-10,设直线 EC 交 $\odot O_1$ 于 I,直线 FD 交 $\odot O_2$ 于 J.因为 $\angle PJF=\angle PAF=\angle CAF=\angle CDF$,故 $PJ/\!/CD$.

同理,$IP/\!/CD$.从而 I、P、J 三点共线.

又 $\angle EFD=180°-\angle ECD=180°-\angle EIJ$,

故 E、F、J、I 四点共圆.

因此,由根轴定理可知,四边形 $IEFJ$ 的外接圆、圆 O_1、圆 O_2 两两的公共弦 IE、PQ、JF(所在的直线)或者共点或者互相平行,即直线 PQ、CE、DF 或者共点或者互相

平行.

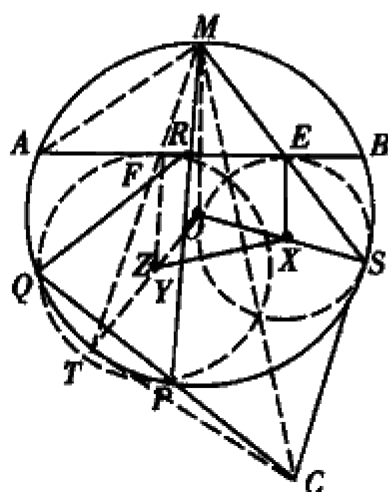


图 10-11

例 10 已知 AB 是⊙O 的弦,M 是弧$\overset{\frown}{AB}$的中点,C 是⊙O 外任一点,过点 C 作⊙O 的切线 CS、CT,连结 MS、MT,分别交 AB 于点 E、F.过点 E、F 作 AB 的垂线,分别交 OS、OT 于点 X、Y.再过点 C 任作⊙O 的割线,交⊙O 于点 P、Q,连结 MP 交 AB 于点 R,设 Z 是△PQR 的外心.求证:X、Y、Z 三点共线.

(2007 年国家队队员选拔赛题)

证明 如图 10-11,先连结 OM,由垂径定理,易说明△XES 与△OMS 位似,于是△XES 是等腰三角形;故可以 X 为圆心,XE 和 XS 为半径作圆,该圆同时与弦 AB 及直线 CS 相切.

再作△PQR 的外接圆,并连结 MA、MC.

易证明 $MR\cdot MP=MA^2=ME\cdot MS$; ①

又由切割线定理 $CQ\cdot CP=CS^2$. ②

①、②表明点 M 和点 C 关于⊙Z 和⊙X 的幂都相等,于是 MC 就是上述两圆的根轴,因此 $ZX\perp MC$. ③

同理可证 $ZY\perp MC$. ④

由③、④即知 X、Y、Z 三点共线 . 证毕.

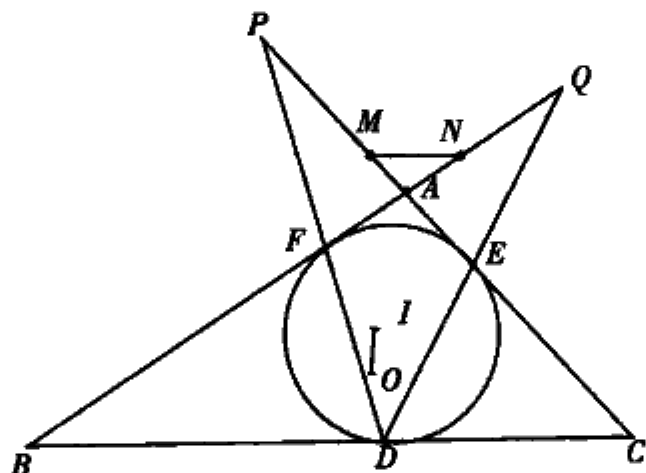


图 10-12

例 11 设 O 和 I 分别为△ABC 的外心和内心,△ABC 的内切圆与边 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F,直线 FD 与 CA 相交于点 P,直线 DE 与 AB 相交于点 Q,点 M、N 分别为线段 PE、QF 的中点,求证:$OI\perp MN$.

(2007 年第 22 届 CMO 试题)

证明 如图 10-12,考虑△ABC 与截线 PFD,由 *Menelaus* 定理,有

$$\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=1,$$

所以$\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AF}{DC}=\dfrac{p-a}{p-c}$,

于是$\dfrac{PA}{CA}=\dfrac{p-a}{a-c}$,

因此 $PA=\dfrac{b(p-a)}{a-c}$,

这样 $PE = PA + AE = \dfrac{b(p-a)}{a-c} + p - a$

$$= \frac{2(p-c)(p-a)}{a-c},$$

$$ME = \frac{1}{2}PE = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c},$$

$$MA = ME - AE = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c} - (p-a) = \frac{(p-a)^2}{a-c},$$

$$MC = ME + EC = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c} + (p-c) = \frac{(p-c)^2}{a-c}.$$

于是 $MA \cdot MC = ME^2$.

因为 ME 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的内切圆的切线长,所以 ME^2 是点 M 到内切圆的幂,而 $MA \cdot MC$ 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆的幂. 等式 $MA \cdot MC = ME^2$ 表明点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的幂相等,因而点 M 在 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的根轴上.

同理,点 N 也在 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的根轴上.

故 $OI \perp MN$.

例 12 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O, A' 是边 BC 的中点, AA' 与外接圆交于点 A'', $A'Q_a \perp AO$,点 Q_a 在 AO 上,过点 A'' 的外接圆的切线与 $A'Q_a$ 相交于点 P_a.用同样的方式,可以构造点 P_b 和 P_c. 证明: P_a、P_b、P_c 三点共线.

(2004~2005 年第 22 届伊朗奥林匹克题)

证明 可以证明它们都在 $\odot O$ 与九点圆的根轴上.

如图 10-13,把 $\triangle ABC$ 位似变换到 $\triangle A'B'C'$, $\triangle ABC$ 的重心 G 为位似中心,位似比为 $-\dfrac{1}{2}$.

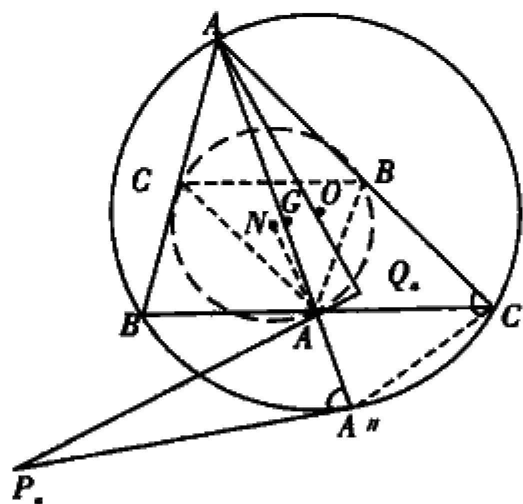


图 10-13

在这种变换下, AO 变成了 $A'N$,其中 N 为九点圆的圆心,所以 $A'N /\!/ AO$, $A'P_a \perp A'N$.

故 $A'P_a$ 是九点圆的切线.

易知 $\angle OAB + \angle C = 90°$,则 $\angle BAA' + \angle A'AO + \angle C = 90°$(不妨设 $AB \leqslant AC$).

又 $\angle P_aA''A' = \angle BAA' + \angle C$, $\angle P_aA'A'' = 90° - \angle A'AO$,

所以 $\angle P_aA''A' = \angle P_aA'A$,故 $A'P_a = A''P_a$.

所以, P_a 在 $\odot O$ 与九点圆的根轴上. 同理, P_b、P_c 也在 $\odot O$ 与九点圆的根轴上.

例 13 凸四边形 $ABCD$ 的外接圆的圆心为 O,已知 $AC \neq BD$, AC 与 BD 交于点 E,若 P 为四边形 $ABCD$ 内部一点,使得 $\angle PAB + \angle PCB = \angle PBC + \angle PDC = 90°$. 求证: O、

P、E 三点共线.

(2006 年第 9 届中国香港奥林匹克题)

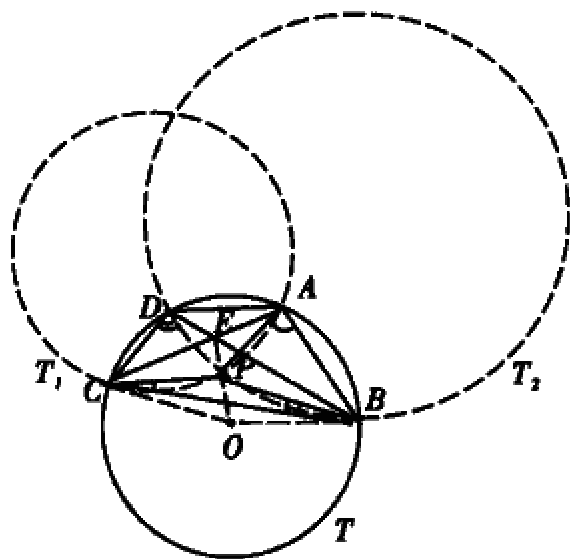


图 10－14

证明 如图 10－14,记四边形 $ABCD$ 的外接圆为圆 T,$\triangle APC$ 的外接圆为圆 T_1,$\triangle BPD$ 的外接圆为圆 T_2.

易知,圆 T 和 T_1 的根轴是直线 AC,圆 T 和 T_2 的根轴是直线 BD.

由于 P 是圆 T_1 和 T_2 的公共点,因此,P 在圆 T_1 和 T_2 的根轴上.

又 E 是 AC 与 BD 的交点,则 E 是圆 T、T_1、T_2 的根心.从而,直线 PE 是圆 T_1 和 T_2 的根轴.

为证明 O、P、E 三点共线,只需证明 O 对圆 T_1 和 T_2 的幂相等,即 O 也在这两个圆的根轴上.

由外角的性质知

$$\angle APC=\angle PAB+\angle ABC+\angle PCB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle AOC.$$

$$\text{而}\angle ACO=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOC)=180^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle AOC\right)$$

$$=180^\circ-\angle APC.$$

这表明,OC 与圆 T_1 切于点 C.

同理,OB 与圆 T_2 切于点 B.

由 $OC=OB$ 知,点 O 对圆 T_1 和 T_2 的幂相等.从而,O、P、E 三点共线.

例 14 已知圆 T_1、T_2 交于点 Q、R,且内切于圆 T,切点分别为 A_1、A_2,P 为圆 T 上的任意一点,线段 PA_1、PA_2 分别与圆 T_1、T_2 交于 B_1,B_2.证明:

(1)与圆 T_1 切于点 B_1 的直线和与圆 T_2 切于点 B_2 的直线平行;

(2)B_1B_2 是圆 T_1 与圆 T_2 的公切线的充分必要条件是 P 在直线 QR 上. (2006 年意大利国家队选拔考试题)

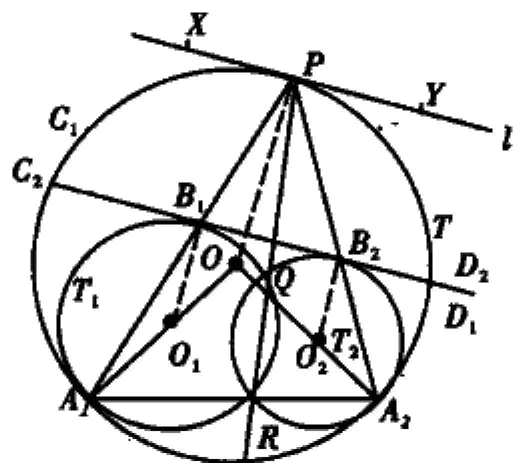


图 10－15

证法 1 (1)设圆 T_1、T_2、T 的圆心分别为 O_1、O_2、O,则 $O_1B_1/\!/OP/\!/O_2B_2$.从而,与圆 T_1 切于点 B_1 的直线和与圆 T_2 切于点 B_2 的直线平行,且和与圆 T 切于点 P 的直线平行.

(2)设与圆 T_1 切于点 B_1 的直线与圆 T 交于点 C_1、D_1,则 P 是$\overset{\frown}{C_1D_1}$的中点,且有

$PC_1^{\ 2} = PA_1 \cdot PB_1$.

同理,设与圆 T_2 切于点 B_2 的直线与圆 T 交于点 C_2、D_2,则 P 是$\overset{\frown}{C_2D_2}$的中点,且有

$PC_2^{\ 2} = PA_2 \cdot PB_2$.

于是,这两条切线重合为 B_1B_2,等价于 $PC_1^2 = PC_2^2$,从而,等价于点 P 关于圆 T_1、圆 T_2 等幂,即等价于点 P 在圆 T_1、圆 T_2 的根轴 OR 上.

证法 2 (1)如图 10-15,作直线 l 与⊙O 切于点 P,设与圆 T_1 切于点 B_1 的直线为 l_1 与圆 T_2 切于点 B_2 的直线为 l_2.

由位似变换知 $l /\!/ l_1$,$l /\!/ l_2$,所以,$l_1 /\!/ l_2$.

(2)若 B_1B_2 是⊙O_1、⊙O_2 的公切线,则由(1)知 $B_1B_2 /\!/ l$,从而,

$\angle B_1B_2P = \angle B_2PY = \angle PA_1A_2$.

所以,A_1、B_1、B_2、A_2 四点共圆.

因此,$PB_1 \cdot PA_1 = PB_2 \cdot PA_2$.

故点 P 到⊙O_1、⊙O_2 的圆幂相等,即 P、Q、R 三点共线.

若点 P 在 OR 上,由同一法知 $B_1B_2 /\!/ l$,得证.

例 15 已知非等腰锐角△ABC,AA_1、BB_1 是它的两条高,又线段 A_1B_1 与平行于 AB 的中位线相交于点 C'.证明:经过△ABC 的外心和垂心的直线与直线 CC' 垂直.

(2005 年第 31 届俄罗斯奥林匹克十一年级题)

证明 如图 10-16,在△ABC 中,分别将边 BC、CA 的中点记作 A_0、B_0,将三角形的垂心记作 H,外心记作 O.

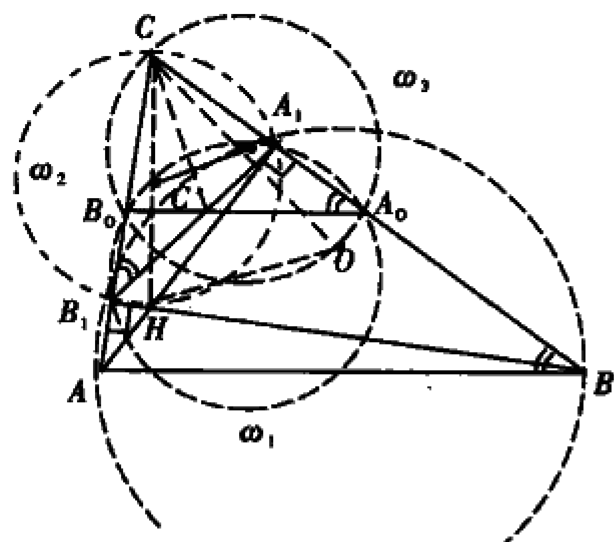


图 10-16

因为点 A、B、A_1、B_1 位于同一圆周上(AB 为其直径),所以,$\angle CB_1A_1 = \angle CBA = \angle CA_0B_0$.

故点 A_0、B_0、A_1、B_1 位于同一圆周 ω_1 上.

将以 CH 为直径的圆周记作 ω_2,将以 CO 为直径的圆周记作 ω_3.易知,点 A_1、B_1 位于圆周 ω_2 上,而点 A_0、B_0 位于圆周 ω_3 上.

因此,点 C' 关于圆 ω_1 和圆 ω_2 有相同的幂,关于圆 ω_1 和圆 ω_3 也有相同的幂.

从而,点 C' 关于圆 ω_2 和 ω_3 有相同的幂,即位于它们的根轴之上.

所以,直线 CC' 就是圆 ω_2 和圆 ω_3 的根轴.

故 CC' 垂直于这两个圆的圆心连线.

又圆 ω_2 和圆 ω_3 的圆心分别为线段 CH 和 CO 的中点,它们的连线平行于直线 OH,则 $OH\perp CC'$.

例 16 已知圆 W 是等边$\triangle ABC$ 的外接圆,设圆 W 与圆 W_1 外切且切点异于点 A、B、C,点 A_1、B_1、C_1 在圆 W_1 上,且使得 AA_1、BB_1、CC_1 与圆 W_1 相切.证明:线段 AA_1、BB_1、CC_1 中的一线段的长度等于另两线段长度之和.

(2004 年泰国奥林匹克题)

证明 如图 10-17 设圆 W 和圆 W_1 相切点 X,且 X 位于劣弧$\overset{\frown}{AB}$上.设直线 AX、BX、CX 分别交圆 W_1 于点 A'、B'、C',设圆 W、圆 W_1 的半径为 r、r_1.

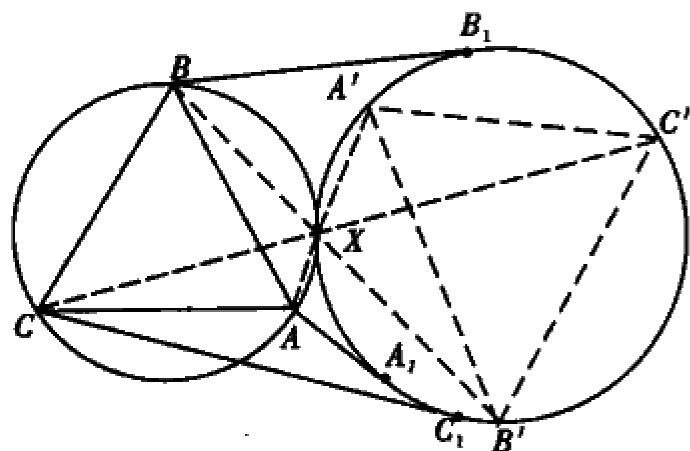


图 10-17

注意到,以 X 为中心、$-\frac{r_1}{r}$为位似比的位似变换将$\triangle ABC$ 映射到$\triangle A'B'C'$,所以,$\triangle A'B'C'$是等边三角形.

由托勒密定理有

$AC\cdot BX+AX\cdot BC=AB\cdot CX$.

因为$\triangle ABC$ 是等边三角形,所以,$AX+BX=CX$.

令 $m=\frac{r_1+r}{r}$,根据相似形的性质有 $AA'=m\cdot AX$,$BB'=m\cdot BX$,$CC'=m\cdot CX$.

于是,$AX+BX=CX$ 意味着$\sqrt{AX\cdot(m\cdot AX)}+\sqrt{BX\cdot(m\cdot BX)}=\sqrt{CX\cdot(m\cdot CX)}$.

即 $\sqrt{AX\cdot AA'}+\sqrt{BX\cdot BB'}=\sqrt{CX\cdot CC'}$.

由点 A、B、C 关于圆 $_1$ 的幂,得 $AA_1+BB_1=CC_1$.

【模拟实战】

习题 A

1. 在线段 AB 的同一侧作出三个相似的三角形 PAB,AQB,ABR,关于 AB 的中垂线对称地作出三个相似三角形 $P'AB$,$AQ'B$,ABR'.求证:P,Q,R,P',Q',R'六点在同一个圆上.
2. 设$\triangle ABC$ 的 AB 上有点 D,AC 上有点 E,且 $DE//BC$,分别以 BE,CD 为直径作$\odot O_1$,

$\odot O_2$.求证:这两圆的根轴恒为$\triangle ABC$的过点A的高所在直线.

3. 设D,E是$\triangle ABC$中AB,AC上的点.求证:以BE和CD为直径的两圆的根轴必通过$\triangle ABC$的垂心.
4. 在$\triangle ABC$的边BC上任取一点A',线段$A'B$的中垂线交边AB于M点,线段$A'C$的中垂线交边AC于N点.求证:点A'关于直线MN的对称点在$\triangle ABC$的外接圆上.
5. 证明:圆外切六边形$ABCDEF$的对角线AD,BE,CF共点.
6. 设D,D'是$\triangle ABC$的BC边上两点,E,E'是CA边上两点,F,F'是AB边上的两点,且D,D',E,E'共圆,E,E',F,F'共圆,F,F',D,D'共圆.证明:D,D',E,E',F,F'六点共圆.
7. 已知$\triangle ABC$的内心为I,$\odot O_1$,$\odot O_2$,$\odot O_3$分别为过B,C;A,C和A,B且与$\odot I$直交,$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于另一点C'.同理可得点B'和A'.证明:$\triangle A'B'C'$的外接圆半径等于$\odot I$半径的$\frac{1}{2}$.

习题 B

1. 设A是$\odot O$的直径BB'上或其延长线上任一定点,过A引$\odot O$的割线MAM'或AMM',过A作BB'的垂线交BM的延长线于N,交BM'的延长线于N'.求证:$AN\cdot AN'$是定值.
2. 设A,B,C,D是一条直线上依次排列的四个不同的点,分别以AC,BD为直径的圆交于X和Y,直线XY交BC于Z.若P为直线XY上异于Z的一点,直线CP与以AC为直径的圆交于C及M,直线BP与以BD为直径的圆交于B及N,试证:AM,DN和XY共点.
(IMO-36 试题)
3. 已知圆O切于两条平行线l_1和l_2;第二个圆O_1切l_1于A,切外切圆O于C;第三个圆O_2切l_2于B,切外切圆O于D,切外切圆O_1于E,AD交BC于Q.求证:Q是$\triangle CDE$的外心.
(IMO-35 预选题)
4. 两个大圆$\odot A$,$\odot B$相等且相交,两个小圆$\odot C$和$\odot D$不等亦相交,且交点为P,Q.若$\odot C$,$\odot D$既同时与$\odot A$内切,又同时与$\odot B$外切,求证:直线PQ平分线段AB.

第十一章 线段调和分割的性质及应用

【基础知识】

设两点 C、D 内分与外分同一线段 AB 成同一比例，即$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$，则称点 C 和 D 调和分割线段 AB，或称 A、B、C、D 为调和点列．若从直线外一点 P 引射线 PA、PC、PB、PD，则称该线束为调和线束，且 PA 与 PB 共轭，或 PC 与 PD 共轭．

性质1 如图11－1，设 A、C、B、D 是共线四点，点 M 为 AB 的中点，则 C、D 调和分割线段 AB 的充要条件是满足下述六个条件之一：



图11－1

(1)点 A、B 调和分割 CD；

(2)$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$；

(3)$AB\cdot CD=2AD\cdot BC=2AC\cdot DB$；

(4)$CA\cdot CB=CM\cdot CD$；

(5)$DA\cdot DB=DM\cdot DC$；

(6)$MA^2=MB^2=MC\cdot MD$.

证明 (1)由$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}\Leftrightarrow\frac{CA}{AD}=\frac{CB}{BD}\Leftrightarrow A$、$B$ 调和分割 CD.

(2)$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}\Leftrightarrow\frac{AC}{AB-AC}=\frac{AD}{AD-AB}\Leftrightarrow\frac{AB-AC}{AC}=\frac{AD-AB}{AD}\Leftrightarrow\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

(3)$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}\Leftrightarrow AC\cdot DB=BC\cdot AD=BC\cdot(AC+CB+BD)\Leftrightarrow 2AC\cdot DB=AC\cdot DB+BC\cdot AC+BC^2+BC\cdot BD=(AC+CB)\cdot(BD+BC)=AB\cdot CD\Leftrightarrow AB\cdot CD=2AC\cdot DB=2BC\cdot AD$.

(4)$AB\cdot CD=2BC\cdot AD\Leftrightarrow\frac{AD}{CD}=\frac{\frac{1}{2}AB}{BC}=\frac{MB}{BC}\Leftrightarrow\frac{AC+CD}{CD}=\frac{MC+CB}{CB}\Leftrightarrow\frac{AC}{CD}=\frac{MC}{CB}\Leftrightarrow CA\cdot CB=CM\cdot CD$.

(5)$AB\cdot CD=2AC\cdot BD\Leftrightarrow\frac{AC}{CD}=\frac{\frac{1}{2}AB}{BD}=\frac{MB}{BD}\Leftrightarrow\frac{AC+CD}{CD}=\frac{MB+DB}{DB}\Leftrightarrow\frac{AD}{CD}=\frac{MD}{BD}\Leftrightarrow$

$DA \cdot DB = DM \cdot DC$.

(6) $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB} \Leftrightarrow \frac{AM+MC}{BM-MC}=\frac{MD+AM}{MD-BM} \Leftrightarrow \frac{AM+MC}{AM-MC}=\frac{MD+AM}{MD-AM} \Leftrightarrow \frac{2AM}{2MC}=\frac{2MD}{2AM} \Leftrightarrow MC \cdot MD = MA^2 = MB^2$.

性质2 设 A、C、B、D 是共线四点，过共点直线外一点 P 引射线 PA、PC、PB、PD，则 C、D 调和分割线段 AB 的充要条件是满足下述两个条件之一：

(1)其中一射线的任一平行线被其他三条射线截成相等的两线段；

(2)另一直线 l 分别交射线 PA、PC、PB、PD 于点 A'，B'，C'，D' 时，点 C'，D' 调和分割线段 $A'B'$.

证明 (1)如图 11-2，不失一般性，设过点 B 作 $GH /\!/ AP$ 交射线 PB 于 G，交射线 PD 于 H.

$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB} \Leftrightarrow$ 注意 $GH /\!/ AP$，有 $\frac{AP}{GB}=\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}=\frac{AP}{BH} \Leftrightarrow GB = BH$.

(2)不失一般性，过点 B' 作 $G'H' /\!/ GH$ 交射线 PB 于 G'，交射线 PD 于 H'.

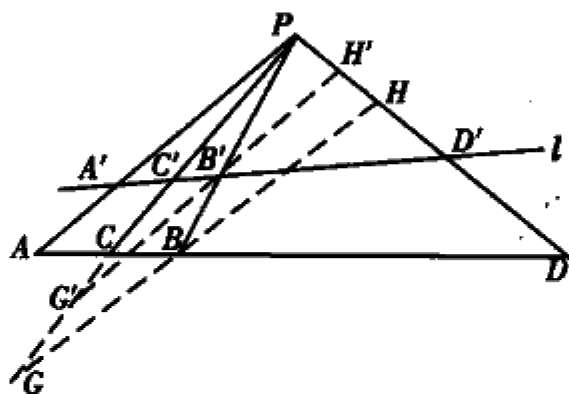


图 11-2

$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB} \Leftrightarrow B$ 为 GH 的中点 $\Leftrightarrow$ 注意 $G'H' /\!/ GH$，知 B' 为 $G'H$ 的中点 $\Leftrightarrow \frac{A'C'}{C'B'}=\frac{A'D'}{D'B'} \Leftrightarrow C'$，$D'$ 调和分割线段 $A'B'$.

性质3 如图 11-3，对线段 AB 的内分点 C 和外分点 D，以及直线 AB 外一点 P，给出如下四个论断：

①PC 是 $\angle APB$ 的平分线；②PD 是 $\angle APB$ 的外角平分线；

③C、D 调和分割线段 AB；④$PC \perp PB$.

以上四个论断中，任意选取两个作题设，另两个作结论组成的六个命题均为真命题.

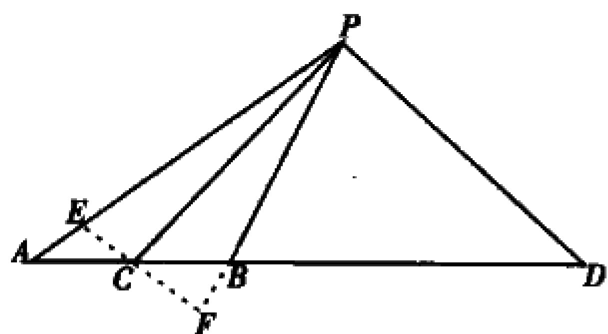


图 11-3

证明 (1)由①、②推出③、④. 此时，有 $\frac{AC}{CB}=\frac{PA}{PB}=\frac{AD}{DB}$，显然 $PC \perp PB$.

(2)由①、③推出②、④. 此时，可过点 C 作 $EF /\!/ PD$，交射线 PA 于点 E，交射线于点 F，则由性质 2(1)知 $EC = CF$，从而知 $PC \perp EF$，亦知 $PC \perp PD$，亦即有 PD 平分 $\angle APB$ 的外角.

(3)由①、④推出②、③. 此时，推知 PD 是 $\angle APB$ 的外角平分线，由此即知 C、D 调和分割线段 AB.

(4)由②、③推出①、④. 此时，结论是显然成立，

(5)由②、④推出①、③.此时,结论亦显然成立.

(6)由③、④推出①、②.此时,不妨设$\angle APC=\alpha$,$\angle BPC=\beta$,由$PC\perp PD$,知$\angle APD=90^\circ+\alpha$,$\angle BPD=90^\circ-\beta$.由正弦定理或共角比例定理,有

$$\frac{PA\cdot\sin\alpha}{PB\cdot\sin\beta}=\frac{PA\cdot\sin\angle APC}{PB\cdot\sin\angle BPC}=\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}=\frac{PA\cdot\sin\angle APD}{PB\cdot\sin\angle BPD}=\frac{PA\cdot\cos\alpha}{PB\cdot\cos\beta},$$

亦即有$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\Leftrightarrow\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=0\Leftrightarrow\sin(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

从而知PC平分$\angle APB$.由此亦可推知PD是$\angle APB$的外角平分线.

推论1 三角形的角平分线被其内心和相应的旁心调和分割.

推论2 不相等且外离的两圆圆心连线被两圆的外公切线交点和内公切线交点调和分割.

推论3 若C、D两点调和分割圆的直径A、B,则圆周上任一点到C、D两点的距离之比是常数.

推论4 从圆周上一点作两割线,将它们与圆相交的非公共的两点连线,垂直于这条连线的直径所在的直线与两割线相交,则这条直径被这两割线调和分割.

证明 如图11-4,直径$AB\perp$弦QR,有$\overset{\frown}{QB}=\overset{\frown}{BR}$,从而知$PB$平分$\angle CPD$.又$\angle ADP=90^\circ$,由此,即知$CD$被$A$、$B$调和分割,故$AB$被$C$、$D$调和分割.

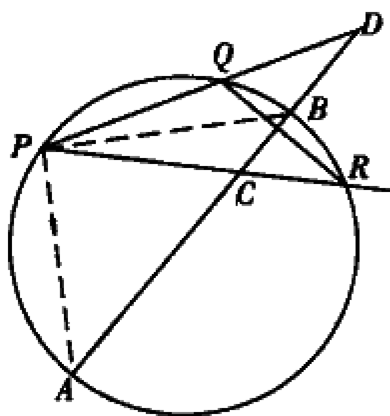


图11-4

推论5 一圆的直径被另一圆周调和分割的充要条件是,已知直径的圆周与过两分割点的圆周正交(即交点处的切线互相垂直).

证明 如图11-5,$\odot O$与$\odot O_1$相交于点F,$\odot O$过点A、B,CD为$\odot O$直径,且A、C、B、D共线.

A、B调和分割$CD\Leftrightarrow OC^2\Leftrightarrow OA\cdot OB\Leftrightarrow AF\perp FO$.

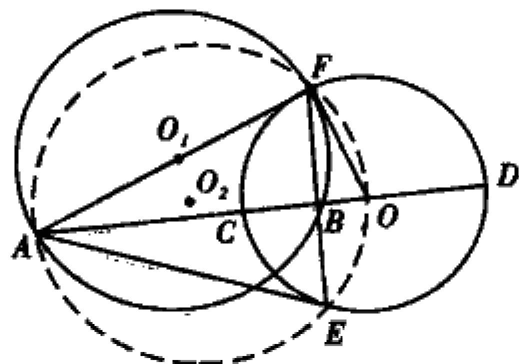


图11-5

推论6 设点C是$\triangle AEF$的内心,角平分线AC交边EF于点B,射线AB交$\triangle AEF$的外接圆$\odot O_2$于点O,则射线AB上的点D为$\triangle AEF$的旁心的充要条件是$\frac{AC}{CB}=\frac{DO}{OB}$.

证明 由题设有$OC=OE=OF$,即O为$\odot ECF$的圆心,则D为$\triangle AEF$的旁心(在$\angle EAF$内的)$\Leftrightarrow D$在$\odot ECF$上,且$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}\Leftrightarrow\frac{OA-OC}{OC-OB}=\frac{AC}{CB}$且$\frac{AD}{DB}=\frac{OA+OC}{OC+OB}\xleftarrow{\text{用同一法}}$

$$\frac{AC}{CB}=\frac{2OC}{2OB}=\frac{OC}{OB}=\frac{OD}{OB}.$$

推论 7 设$\triangle AEF$的内角平分线AB交EF于B,交$\triangle AEF$的外接圆于O,则$OE^2=OF^2=OA\cdot OB$.

性质 4 从圆外一点引$\odot O$的割线交$\odot O$于C,D,若割线ACD与点A的切点弦交于点B,则弦CD被A、B调和分割.

证明 如图 11-6,过A作$\odot O$的切线AP,AQ,切点为P,Q,则PQ为点A的切点弦.连AO交PQ于点L,连PC、LD、OC、OD,则由$AC\cdot AD=AQ^2=AL\cdot AO$,知$C,L,O,D$四点共圆.从而$\angle ALC=\angle CDO=\angle OCD=\angle OLD$,即知$AL$为$\triangle LCD$的内角$\angle CLD$的平分线.又$PQ\perp AL$,则由性质 3 知,$CD$被$A$、$B$调和分割.

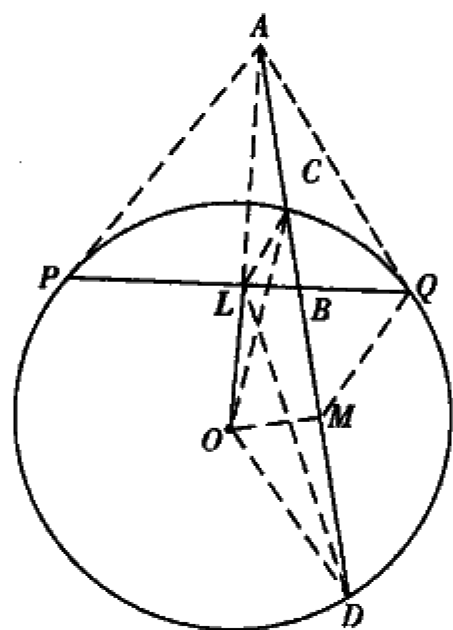


图 11-6

注 也可这样证:过O作$OM\perp CD$于M,则M为CD中点,由A、P、O、M、Q共圆,知$\triangle ABQ\backsim\triangle AQM$,从而$AQ^2=AB\cdot AM=AC\cdot AD$,由性质 1(4)即知$A$、$B$调和分割$CD$.

推论 从$\odot O$外一点A引圆的两条割线交圆于四点,以这四点为顶点的四边形的对角线相交于点B,设直线AB交$\odot O$于C,D,则A,B调和分割CD.

证明 可证点B在点A的切点弦上,参见图 11-6,即证P、B、Q共线则结论获证.

作$OM\perp$直线AB于M,则知A、P、O、M、Q五点共圆.

由$AC\cdot AD=AQ^2=AB\cdot AM$,知$\triangle APB\backsim\triangle AMP$,有$\angle ABP=\angle APM$.

同理$\angle ABQ=\angle AQM$.

而$\angle APM+\angle AQM=180°$,则$\angle ABP+\angle ABQ=180°$,即$P,B,Q$共线.

性质 5 三角形的一边被其边上的内(旁)切圆的切点和另一点调和分割的充要条件是,另一点与其余的两个切点三点共线.

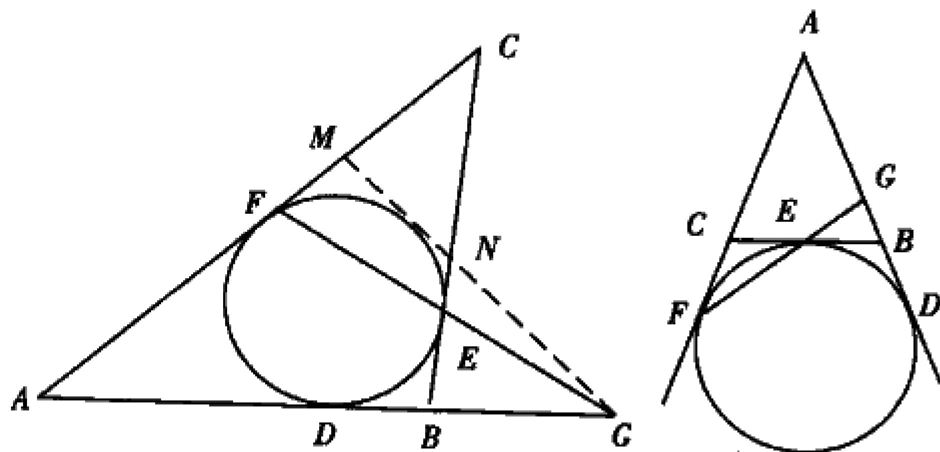


图 11-7

证明 如图 11-7,设D、E、F分别是$\triangle ABC$的内(旁)切圆切AB、BC、CA所在直

线的切点.对△ABC而言,F、E、G共线$\Leftrightarrow\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1\Leftrightarrow\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BE}{FA}=1\Leftrightarrow\frac{AG}{GB}\cdot\frac{DB}{AD}=1$
$\Leftrightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AG}{GB}\Leftrightarrow D$,$G$调和分割$AB$.

同理可证D、E与另一点,或D、F与另一点的情形.

注 在此还须指出的是,若过两切点的直线与另一切点所在边平行,则可视为交于无穷远点.此时,结论仍然成立.

推论 若凸四边形有内切圆,则一组对边上的两切点分别关于所在边的调和共轭点重合,则另一组边上的两切点分别关于所在边的调和共轭点也重合(C、D调和分割AB也称C是D关于AB的调和共轭点).

性质6 梯形的两腰延长线的交点,两对角线的交点,调和分割两底中点的连线段.

证明 参见图11-8,当$BF/\!/CE$时,$CEFB$为梯形,则$\frac{AM}{AN}=\frac{BF}{CE}=\frac{MD}{ND}$,即$A$、$D$调和分割$MN$.

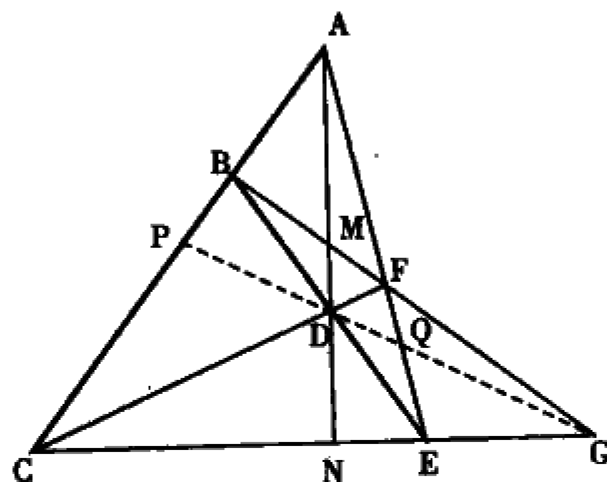


图11-8

性质7 完全四边形的一条对角线被其他两条对角线调和分割.

证明 如图11-8,AD、BF、CE为完全四边形$ABCDEF$的三角线,设直线AD交BF、CE分别于M、N.

若$BF/\!/CE$,则由性质6知,AD被M,N调和分割.

下设$BF\not\parallel CE$,设直线BF与CE相交于点G.

对△ACD及截线BMF,△ADF及截线CNE,△ACF及截线BDE分别应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DM}{MA}=1, \quad ①$$

$$\frac{AN}{ND}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FE}{EA}=1, \quad ②$$

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DF}\cdot\frac{FE}{EA}=1. \quad ③$$

由①×②÷③,得$\frac{AM}{AN}=\frac{DM}{DN}$,故$AD$被$M$,$N$调和分割.

连结DG交EF于点Q,并延长交AC于点P,则在完全四边形$GFBDCE$中,Q、P调和分割DG.连AG,则由性质2(2)知,M、G调和分割BF,N、G调和分割CE.

注 (1)如图11-9,分别对△ACE及截线BFG,及点D应用梅涅劳斯定理、塞瓦

定理，可证得 N、G 调和分割 CE；分别对△ABF 及截线 CEG，及点 D 应用梅涅劳斯定理、塞瓦定理，可证得 M、G 调和分割 BF；分别对△ABD 及截线 CNE，及点 F 应用梅涅劳斯定理、塞瓦定理，可证得 M、N 调和分割 AD.

(2)若 $BF/\!/CE$，则可看作直线 BF 与 CE 相交于无穷远点 G.此时，亦有 M，G 调和分割 BF，N、G 调和分割 CE.

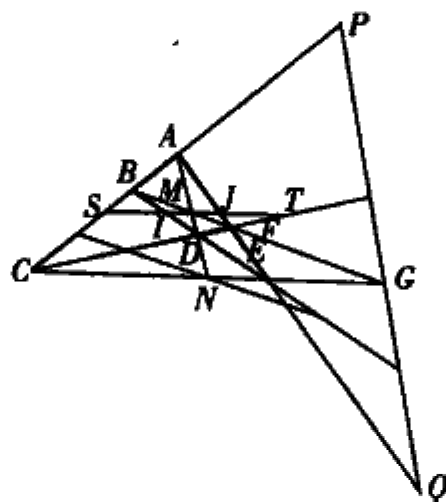


图 11－9

推论 过完全四边形对角线所在直线的交点作另一条对角线的平行线，所作直线与平行的对角线的同一端点所在的边(或其延长线)相交，所得线段被此对角线所在直线上的交点平分.

事实上，此结论可由性质 2 即得.此结论也可称为完全四边形的蝴蝶定理.

【典型例题与基本方法】

例 1 (1)已知圆 O 是△ABC 的内切圆，切点依次为 D、E、F，$DP\perp EF$ 于 P，如图 11－10.求证：$\angle FPB=\angle EPC$(即证$\angle BPD=\angle CPD$).（《数学教学》问题 481 号）

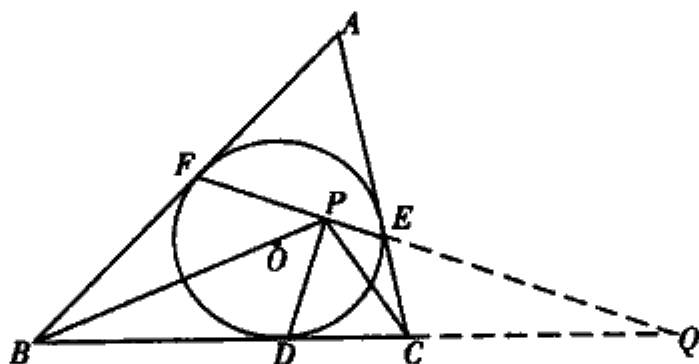


图 11－10

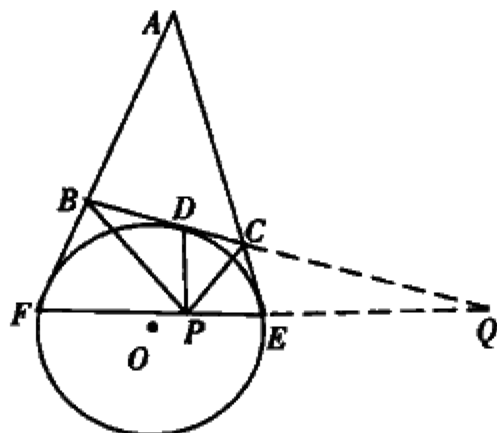


图 11－11

(2)如图 11－11，△ABC 的边 BC 外的旁切圆 O 分别切 BC、AB、AC 或其延长线于 D、E、F，$DP\perp EF$ 于 P.求证：$\angle BPD=\angle CPD$.（《数学教学》问题 402 号）

我们将上述两个命题统一证明如下：

证明 设直线 BC 与 FE 的延长线交于点 Q，则由性质 5 知，BC 被 D、Q 调和分割，即 PB、PC、PD、PQ 为调和线束.

而 $PD\perp PQ$，则 DP 平分$\angle BPC$，故$\angle BPD=\angle CPD$.

例 2 如图 11－12，凸四边形 $ABCD$ 中，边 AB、DC 的延长线交于点 E，边 BC、AD 的延长线交于点 F.若 $AB\perp BD$，求证：$\angle EGC=\angle FGC$.（《数学教学》问题 651 号）

证明 设直线 EG 交 BC 于 P，交 AD 于 Q.在完全四边形 $ECDGAB$ 中，EG 被 P、Q 调和分割，即 AB、AC、AP、AF 为调和线束，从而 BC 被 P、F 调和分割(也可直接在完全

四边形 $ECDGAB$ 中应用性质 7 即得)，即 GB、GC、GP、GF 为调和线束.

而 $BG\perp GC$，于是知 GC 平分$\angle PGF$，即$\angle EGC=\angle FGC$.

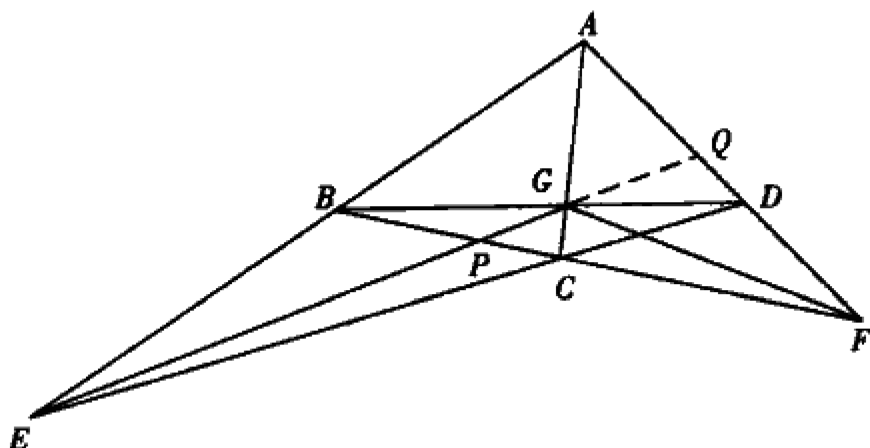


图 11－12

例 3 已知 A 为$\odot O$ 外一点，过 A 引$\odot O$ 的割线交$\odot O$ 于点 B，C，且点 B 在线段 AC 的内部．过点 A 引$\odot O$ 的两条切线，切点分别为 S，T．设 AC 与 ST 交于点 P．证明：$\dfrac{AP}{PC}=2\cdot\dfrac{AB}{BC}$.

(第 21 届北欧竞赛题)

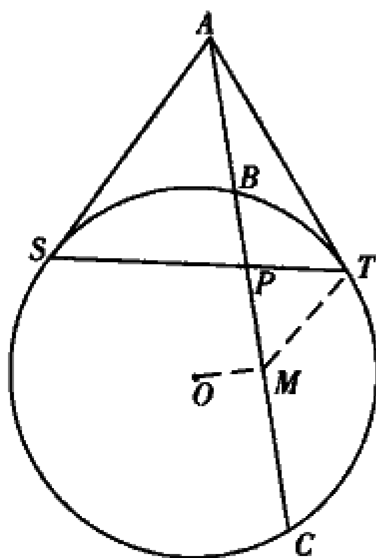


图 11－13

证法 1 如图 11－13，由性质 4 知 A、P 调和分割 BC．由性质 1(3)，即知有 $AP\cdot BC=2AB\cdot PC$.

故$\dfrac{AP}{PC}=2\cdot\dfrac{AB}{BC}$.

证法 2 过圆心 O 作 $OM\perp BC$ 于 M，则 M 为 BC 的中点，易证 A、S、O、M、T 五点共圆．则$\triangle APT\backsim\triangle ATM$，即有 $AT^2=AP\cdot AM=AB\cdot AC$，而 M 为 BC 中点，由性质 1(4)知 A、P 调和分割 BC，故 $AP\cdot BC=2AB\cdot PC$，即$\dfrac{AP}{PC}=2\cdot\dfrac{AB}{BC}$.

例 4 已知$\triangle ABC$ 的外心为 O，P 为 OA 延长线上一点，直线 l 与 PB 关于 BA 对称，直线 h 与 PC 关于 AC 对称，l 与 h 交于点 O．若 P 在 OA 的延长线上运动，求 Q 的轨迹.

(第 38 届奥地利奥林匹克题)

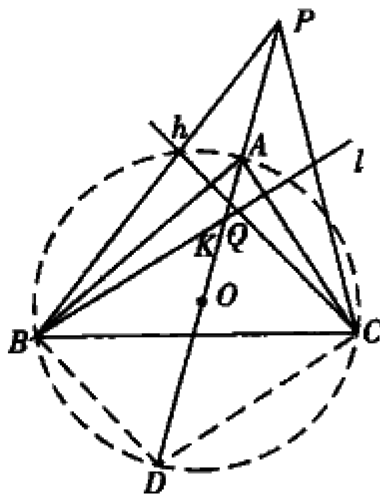


图 11－14

证明 如图 11－14，设 l 与 OA 交于点 K，OA 所在直线交$\odot O$ 于另一点 D，则$\angle ABD=90°$，于是 BA、BD 分别是$\angle PBK$ 的内、外角平分线．因此，PK 被 A、D 调和分割.

此时，$\angle ACD=90°$，AC 平分$\angle PCD$，设 CQ 交 AO 于点 Q'，则 PQ' 被 A、D 调和分割，从而 Q' 与 K 重合，即 Q'、K、Q 重合，故知 l 与 h 的交点 Q 的轨迹是线段 OA 内部的点.

例 5 过锐角$\triangle ABC$的顶点A、B、C的三条高分别交对边于点D、E、F，过点D平行于EF的直线分别交AC、AB于点Q、R，EF交BC于点P.证明：$\triangle PQR$的外接圆过BC的中点.

（IMO 38 预选题）

证明 如图 11－15，由性质 7，知D、P调和分割BC.

图 11－15

设M为BC中点，则由性质 1(4)，有

$DB\cdot DC=DM\cdot DP$.

又B、C、E、F四点共圆，及$RQ\parallel EF$，有$\angle RQC=\angle PEC=\angle RBC$，因此，$B$、$Q$、$C$、$R$四点共圆，即有$DR\cdot DQ=DB\cdot DC=DM\cdot DP$.

由相交弦定理的逆定理知，$\triangle PQR$的外接圆过BC的中点M.

例 6 在$\triangle ABC$中，经过点B、C的圆与边AC、AB的另一个交点分别为E、F，BE与CF交于点P，AP与BC交于点D，M是边BC的中点，D、M不重合.求证：D、M、E、F四点共圆.

证明 如图 11－16，易知EF与BC不平行，设它们的延长线交于点Q，则Q、D调和分割BC.又M为BC中点，则

$QM\cdot QD=QC\cdot QB$.

由割线定理，得$QC\cdot QB=QE\cdot QF$，则$QM\cdot QD=QE\cdot QF$，从而D、M、E、F四点共圆.

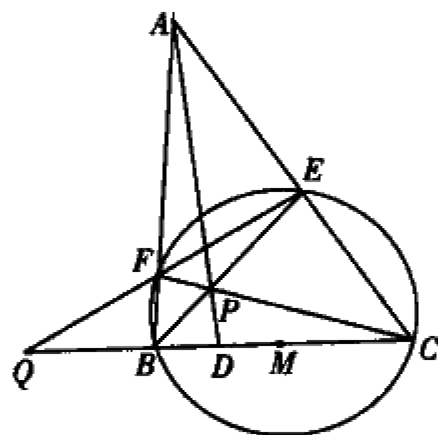


图 11－16

例 7 如图 11－17，在$\triangle ABC(AB>AC)$中，点D_1在边BC上，以AD_1为直径作圆，交AB于点M，交AC的延长线于点N，连结MN，作$AP\perp MN$于点P，交BC于点D_2，AE为$\triangle ABC$外角的平分线.求证：$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{1}{D_1E}+\frac{1}{D_2E}$.

（《中等数学》2008 第 7 期奥林匹克问题）

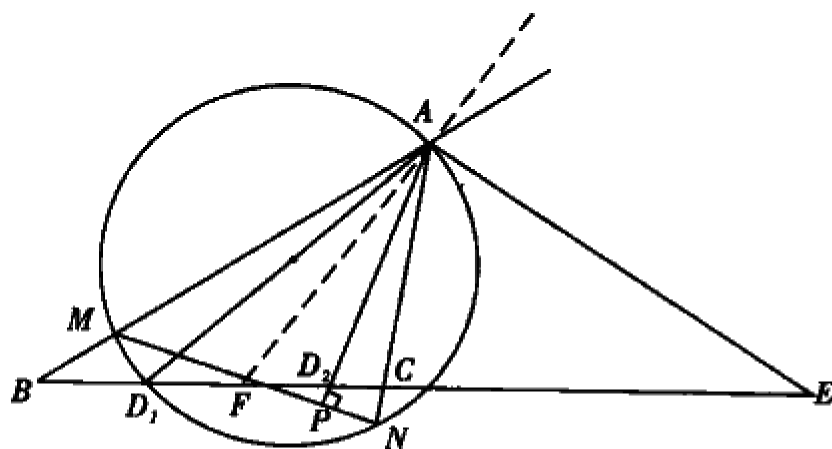


图 11－17

证明 连结 MD_1，在 Rt△AMD_1 与 Rt△APN 中，由 $\angle AD_1M=\angle ANM=\angle ANP$，知 $\angle BAD_1=\angle D_2AC$.

由 AE 平分△ABC 的 $\angle BAC$ 的外角，知 AE 平分△D_1AD_2 的 $\angle D_1AD_2$ 的外角.

作 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 F，则知 F、E 调和分割 D_1D_2，即有 $\frac{1}{D_1E}+\frac{1}{D_2E}=\frac{2}{FE}$.

显然，F、E 调和分割 BC，即有 $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{FE}$，

故 $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{1}{D_1E}+\frac{1}{D_2E}$.

例 8 如图 11－18，AD 为△ABC 的内角平分线，$\angle ADC=60°$，点 M 在 AD 上，满足 $DM=DB$，射线 BM、CM 交 AC、AB 于点 E、F. 证明：$DF\perp EF$.

（《中等数学》2008 年 4 期奥林匹克问题）

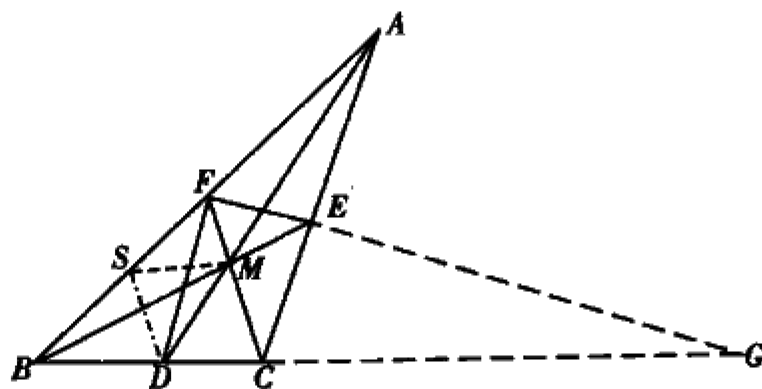


图 11－18

证明 在 AB 上取 $AS=AC$，连 SM，DS，则由 AD 平分 $\angle BAC$ 知，△ASD 与△ACD 关于 AD 对称，即有 $\angle MDS=\angle MDC=\angle ADC=60°$，亦即 $\angle BDS=60°$.

又由 $DM=DB$，知 $\angle DSB=\angle DSM=\angle DCM$.

于是，$\angle FCB+ACB=\angle DCM+\angle ACB=\angle DSB+\angle ASD=180°$，

从而，$\sin\angle FCB=\sin\angle ACB$.

由 $\frac{FB}{FC}=\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle FBC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，知 FD 平分 $\angle BFC$.

设直线 FE 与直线 BC 相交于点 G（因角平分线 AD 交 BC 成 60°角，必相交），则由完全四边形对角线调和分割的性质，知 D、G 调和分割 BC，即 B、C、D、G 为调和点列. 亦即 FB、FC、FD、FG 为调和线束．而 FD 平分 $\angle BFC$，则由性质 3 知 $DF\perp EF$.

例 9 如图 11－19，过完全四边形 $ABCDEF$ 的顶点 A 的直线交对角线 BF 于点 M，交对角线 CE 于点 N，交 BD 于点 G，交 CD 于点 H，则 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AG}+\frac{1}{AH}$.

证明 设两对角线 BF、CE 所在直线交于点 P（或无穷远点 P）. 连 AP，直线 DP 交 AC 于 K，交 GH 于 L，直线 AD 交 BF 于 M'，交 CE 于 N' .

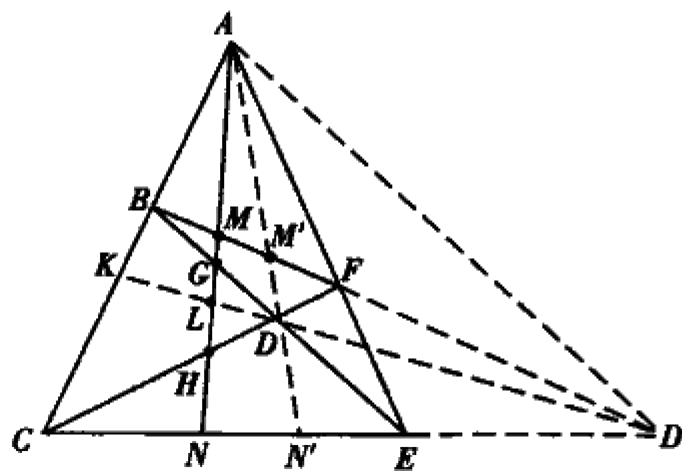


图 11－19

在完全四边形 $ABCDEF$ 中，知 AD 被 M' 和 N' 调和分割，即知 PA、PD、PM'、PN' 为调和线束．从而知 A、L、M、N 为调和点列，即有 $\frac{2}{AL}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$.

在完全四边形 $PECDBF$ 中，BC 被 K 和 A 调和分割．即知 DA、DK、DB、DC 为调和线束，从而 A、L、G、H 为调和点列，即有 $\frac{2}{AL}=\frac{1}{AG}+\frac{1}{AH}$.

故 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AG}+\frac{1}{AH}$.

例 10　如图 11－20，过圆外一点 A 引圆的三条割线 ABC、AMN、AFE，依次交圆于点 B、C、M、N、F、E；弦 BF、CE 分别交弦 MN 于 G、H；MN 交 CF 于 S，交 BE 于 T，则 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AG}+\frac{1}{AH}=\frac{1}{AS}+\frac{1}{AT}$.

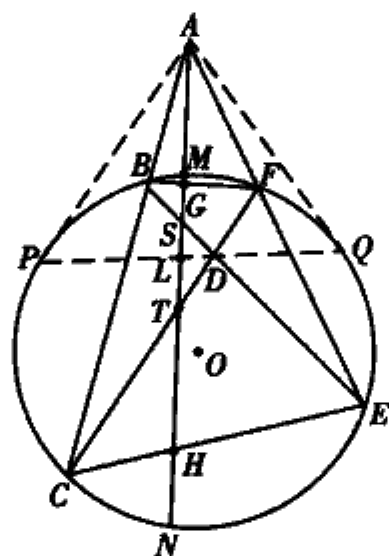


图 11－20

证明　过点 A 作圆的切线 AP、AQ，P、Q 为切点，则由性质 4 的推论的证明知 P、Q 与 BE、CF 的交点 D 共线．设直线 PQ 交 AN 于点 L，则知 AL 被 M、N 调和分割．即有 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AL}$.

由例 9 知，$\frac{1}{AG}+\frac{1}{AH}=\frac{2}{AL}$，$\frac{1}{AS}+\frac{1}{AT}=\frac{2}{AL}$，$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AG}+\frac{1}{AH}=\frac{1}{AS}+\frac{1}{AT}$.

例 11　如图 11－21，凸四边形 $ANHM$ 的两组对边的延长线分别交于点 B、C，对角线 AH 与 NM 交于点 O，过 O 的直线交 AM 于 D，交 NH 于 E，直线 AE 交 B、C 的边线于点 Q，则 D、H、Q 三点共线．

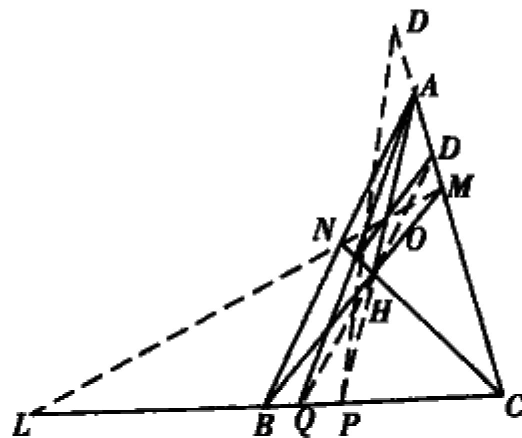


图 11－21

证明　延长 AH 交 BC 于 P．设直线 PE 与 CA 的延长线交于点 K，设直线 MN 与直线 BC 交于点 L（或无穷远点）．

在完全四边形 $ANBHCM$ 中，有 O、P 调和分割 AH，即知 EA、EH、EO、EP 为调和线束．亦知 EK、ED、EA、EC 为调和线束，即 C、A、D、K 为调和点列，有 $\frac{CD}{AD}=\frac{CK}{AK}$.

对△AQC及截线PEK应用梅涅劳斯定理,有$\frac{QP}{PC}\cdot\frac{CK}{KA}\cdot\frac{AE}{EQ}=1$.

于是,有$\frac{QP}{PC}\cdot\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AE}{EQ}=1$.

对△AQC应用塞瓦定理的逆定理即知点D、H、Q共线.

【解题思维策略与分析】

1. 根据题设条件,灵活运用性质

例 12　如图11-12,线段AP、AS与⊙O相切于点P、S,割线ACD不过圆心O,点C在A、D之间,经过点C的⊙O的切线交AP于点I,交AS于点J,G是线段CD上一点,且满足$\angle CGI=\angle CGJ$,又设PS与CD交于点H.求证:

(1)$GC=GD$;

(2)$\frac{AD}{AH}=\frac{AG}{AC}$.

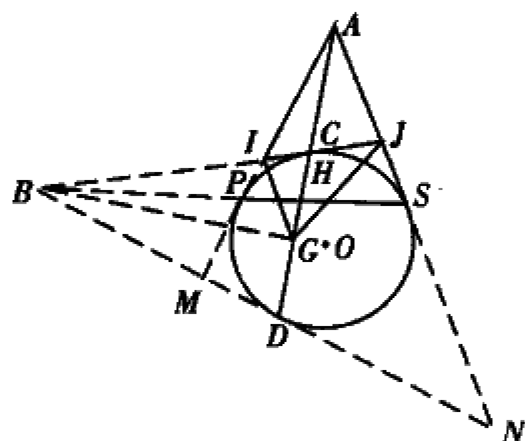


图11-22

证明　(1)由于割线ACD不过圆心O,则知直线IJ与直线PS必相交,设交点为B.

于是由性质5知,点C、B调和分割线段IJ.连BG,由$\angle CGI=\angle CGJ$,运用性质3,即知$CG\perp BG$,即$BG\perp CD$.

又由性质5的推论1,知过点D的⊙O的切线必过点B,从而有$BO\perp CD$,于是,BG和BO重合.即知G为CD中点,故$GC=GD$.

(2)由于点H在点A的弦点弦PS上,由性质4知,A、H调和分割CD.又G为CD的中点,则由性质1(5),即有$AD\cdot AC=AG\cdot AH$,故$\frac{AD}{AH}=\frac{AG}{AC}$.

注　对于图11-22,我们可作出⊙O的外切四边形$MNJI$,由于H为两双对边切点连线的交点,由牛顿定理可知,点H在对角线IN上,也在对角线MJ上.

这四线共点可这样证明:首先证明直线IN、CD、PS交于点,设CD、PS分别交直线IN于点H_1、H_2,则显然$\angle IPH_2=\angle JSH_2$.因此,易知$\frac{IH_2\cdot PH_2}{SH_2\cdot NH_2}=\frac{S_{\triangle IH_2P}}{S_{\triangle NH_2S}}=\frac{IP\cdot PH_2}{NS\cdot SH_2}$,即有$\frac{IH_2}{NH_2}=\frac{IP}{NS}$,同样可得$\frac{IH_1}{NH_1}=\frac{IC}{ND}$,但$IP=IC$,$ND=NS$.故$\frac{IH_1}{NH_1}=\frac{IP}{NS}=\frac{IH_2}{NH_2}$,从而$H_1$和$H_2$重合,即直线$CD$、$PS$、$IN$交于一点.

同理可证MJ、CD、PS交于一点.因此直线IN、MJ、CD、PS交于一点.

例 13　如图11-23,凸四边形$ABCD$内接于⊙O,延长AB、DC交于点E,延长

BC、AD 交于点 F，AC、BD 交于点 P，直线 OP 交 EF 于 G. 求证：$\angle AGB=\angle CGD$.

证明 在射线 EP 上取一点 K，使得 K、D、C、P 四点共圆，从而 E、D、K、B 四点共圆.

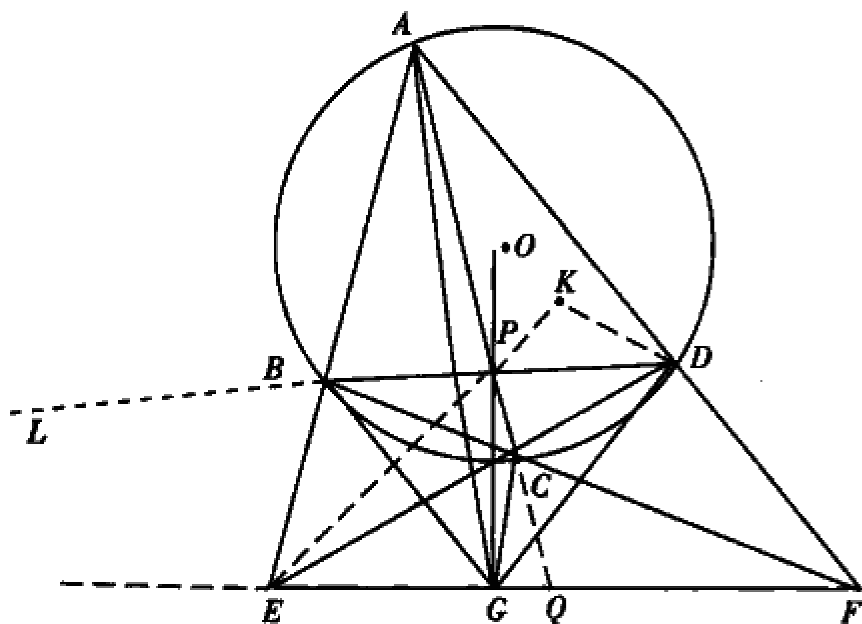


图 11－23

设⊙O 的半径为 R，从点 E 向⊙O 引的切线长为 l，则

$EP\cdot EK=EC\cdot ED=t^2=OE^2-R^2$,

$EP\cdot PK=BP\cdot PD=(R+OP)(R-OP)=R^2-OP^2$,

上述两式相减得 $EP^2=(OE^2-R^2)-(R^2-OP^2)=OE^2+OP^2-2R^2$.

所以，$OE^2-EP^2=2R^2-OP^2$.

同理，$OF^2-FP^2=2R^2-OP^2$，即有 $OE^2-EP^2=OF^2-FP^2$，故 $OP\perp EF$.

延长 AC 交 EF 于 Q，则在完全四边形 $ABECFD$ 中，P、Q 调和分割 AC，从而 GA、GC、GP、GD 为调和线束. 而 $GP\perp GQ$，于是 GP 平分 $\angle AGC$，即 $\angle AGP=\angle CGP$.

延长 DB 与直线 EF 交于 L（或无穷远点 L），则知 L、P 调和分割 BD. 同样可得 $\angle BGP=\angle DGP$，故 $\angle AGB=\angle CGD$.

例 14 如图 11－24，以锐角△PAB 的边 AB 为直径作半圆交 PA 于 E，交 PB 于点 D，直线 AB 与 ED 交于点 Q，AD 与 BE 交于点 C，直线 PC 交 AB 于 H，连 OE、OD、HE、HD. 求证：$\angle OEH=\angle ODH=\angle EQO$.

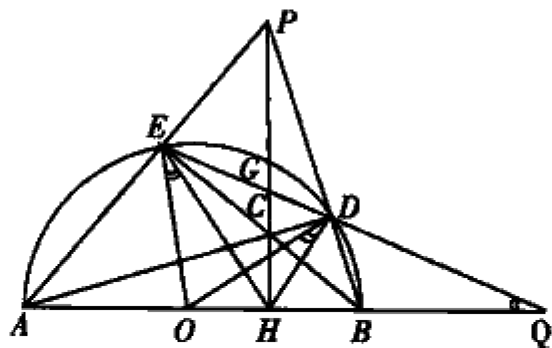


图 11－24

证明 由题设知点 C 为△PAB 的垂心，设 PC 交 ED 于 G，则在完全四边形 $PEACBD$ 中，ED 被 G、Q 调和分割，则 HE、HD、HG、HQ 为调和线束，而 $HG\perp HQ$，故 HG 平分 $\angle EHD$，即 $\angle EHC=\angle CHD$.

由 A、H、C、E 共圆，有 $\angle DHE=2\angle EAD=\angle EOD$，从而 O、H、D、E 四点共圆. 于是 $\angle AHE=\angle OQE+\angle QEH=\angle OQE+\angle DOH$.

又$\angle BHD=\angle DOH+\angle ODH$,所以$\angle OEH=\angle ODH=\angle EQO$.

例 15 如图 11－25,设凸四边形 $ABCD$ 的两组对边所在直线分别交于 E、F 两点,两对角线的交点为 P,过 P 作 $PO\perp EF$ 于 O.求证:$\angle BOC=\angle AOD$.

(2002 年国家队选拔赛题)

图 11－25

证明 延长 AC 交 EF 于点 Q,在完全四边形 $ABECFD$ 中,有 AC 被 P、Q 调和分割,即 OA、OC、OP、OE 为调和线束.而 $PO\perp OE$,则 OP 平分$\angle AOC$,即$\angle AOP=\angle COP$.

设直线 BD 与直线相交于点 K(或无穷远点 K),在完全四边形 $ABECFD$ 中,知 BD 被 P、K 调和分割,即 OK、OP、OB、OD 为调和线束.而 $PO\perp KO$,则 PO 平分$\angle BOD$,即$\angle BOP=\angle DOP$.

故$\angle BOC=\angle BOP-\angle COP=\angle DOP-\angle AOP=\angle AOD$.

例 16 如图 11－26,$\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC、CA、AB 于点 D、E、F,点 X 是$\triangle ABC$ 的一个内点,$\triangle XBC$ 的内切圆也在点 D 处与 BC 边相切并与 CX、XB 分别相切于点 Y、Z.证明:$EFZY$ 是圆内接四边形.

(IMO－36 预选题)

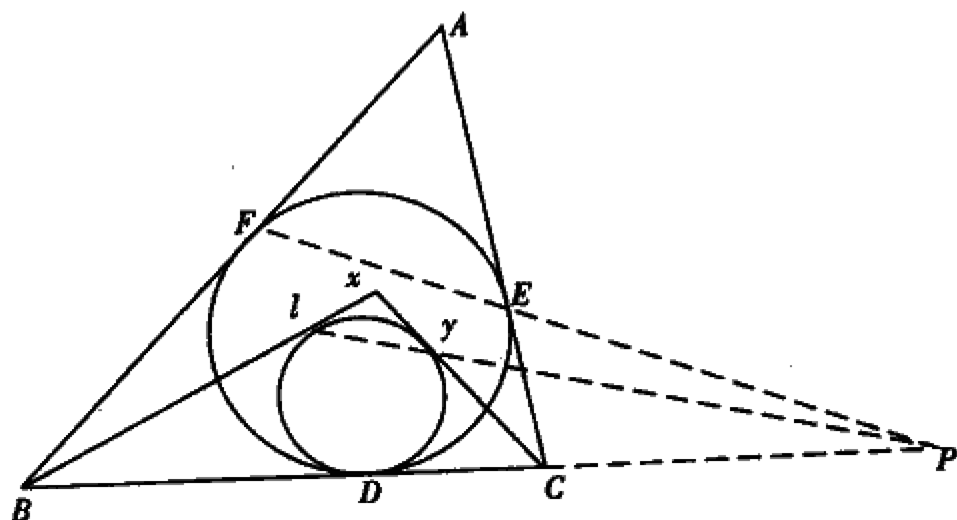


图 11－26

证明 当 FE 与 BC 平行时,可设两直线交于无穷远点 P.

当 FE 与 BC 不平行时,设两直线交于点 P,则由性质 7,知 BC 被点 D、P 调和分割.从而点 P 是 BC 延长线上的一个定点.

当 $FE\nparallel BC$ 时,有 $YZ\nparallel BC$.

同理,ZY 所在直线与直线 BC 的交点也是 P.从而由 $PE\cdot PF=PD^2=PY\cdot PZ$,故知四边形 $EFZY$ 是圆内接四边形.

例 17 在$\triangle ABC$ 中,$AB>AC$,它的内切圆切边 BC 于点 E,连结 AE 交内切圆于点

D(不同于点 E),在线段 AE 上取异于点 E 的一点 F,使得 $CE=CF$.连结 CF 并延长交 BD 于点 G.求证:$CF=FG$.

(2008 年国家队选拔赛题)

证明 如图 11-27,设内切圆切 AB 边于 P,切 AC 边于 Q.设直线 PQ 与直线 BC 交于点 K,则由性质 5 知 BC 被点 E 和 K 调和分割,且 K 为一定点.设过点 D 的内切圆的切线交 AB 于 M 点,交 AC 于 N 点,由对称性知点 K 必在直线 MN 上.

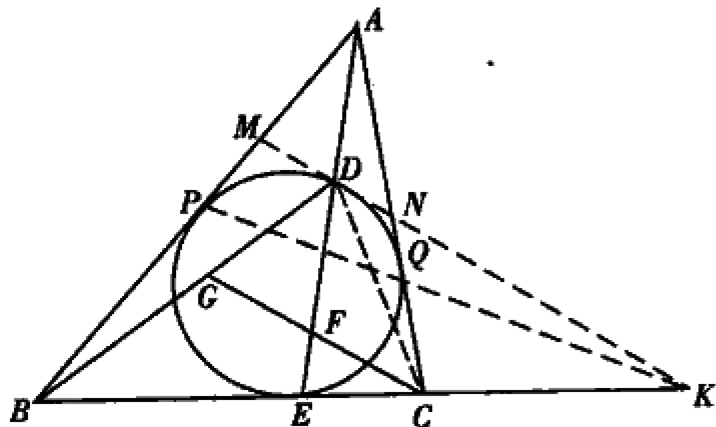


图 11-27

又由$\angle KDE=\angle AEK=\angle EFC$,知 $MK /\!/ CG$.

连结 DC,则知 DB、DC、DE、DK 为调和线束.

由性质 2(1)知,有 $CF=FG$.

2.创设条件,灵活运用性质

例 18 如图 11-28,O、I 分别是$\triangle ABC$ 的外心、内心,AD 是边 BC 上的高,I 在线段 OD 上,求证:$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于边 BC 上的旁切圆半径. (1998 年高中联赛题)

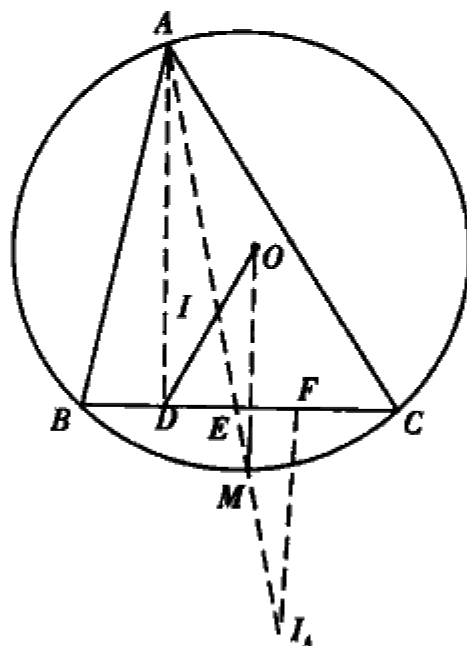


图 11-28

证明 设 I_A 为旁心,AI_A 交 BC 于点 E,交$\odot O$ 于点 M,则 M 为$\overset{\frown}{BC}$的中点.连 OM,则 $OM\perp BC$.作 $I_AF\perp BC$ 于 F,则由平行线性质,有$\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{OM}{MI}$, (*)

$\dfrac{AD}{I_AF}=\dfrac{AE}{I_AE}$.

由性质 3 的推论 6,有$\dfrac{AI}{IE}=\dfrac{I_AE}{ME}$,即有

$\dfrac{AI}{I_AM}=\dfrac{IE}{ME}=\dfrac{AI+IE}{I_AM+ME}=\dfrac{AE}{I_AE}$,从而$\dfrac{AD}{I_AF}=\dfrac{AI}{I_AM}$,

亦即$\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{I_AF}{I_AM}$.注意到(*)式及 $MI=I_AM$,

故 $OM=I_AF$,即$\triangle ABC$ 的外接圆半径 OM 等于边 BC 上旁切圆半径 I_AF.

例 19 如图 11－29，在$\triangle ABC$中，设$AB>AC$，过点A作$\triangle ABC$的外接圆的切线l，又以A为圆心，AC为半径作圆分别交线段AB于点D，交直线l于点E、F，证明：直线DE、DF分别通过$\triangle ABC$的内心与一个旁心．

（2005 年全国高中联赛题）

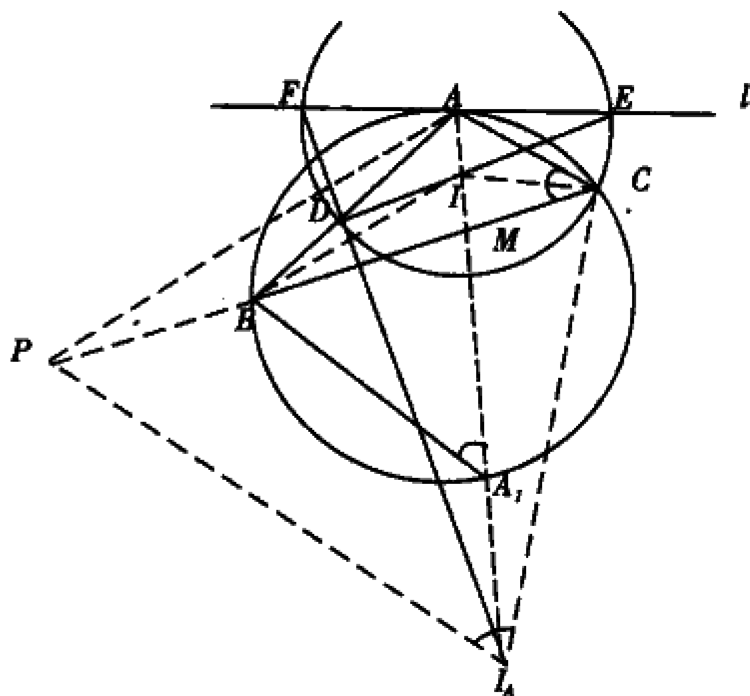


图 11－29

证明 作$\angle BAC$的平分线，交DE于I，易知$\triangle ADI\cong\triangle ACI$．所以

$$\angle ACI=\angle ADI=\angle AEI=\frac{1}{2}\angle FAB=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

从而I为$\triangle ABC$的内心．

设射线AI交BC于M，交$\triangle ABC$的外接圆于A_1，交直线FD于I_A，连CI_A，则知$\angle DI_AA=\angle AI_AC$．

延长CB到P，使$PB=BA$，则$\angle APC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle B$．

注意到$\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90^\circ=\angle FDA+\angle ADE=(\frac{1}{2}\angle A+\angle DI_AA)+\angle ICA$

$$=(\frac{1}{2}\angle A+\angle AI_AC)+\frac{1}{2}\angle C.$$

从而$\angle AI_AC=\frac{1}{2}\angle B=\angle APC$，于是，$A$、$P$、$I_A$、$C$四点共圆，有

$\angle AI_AP=\angle ACP=\angle AA_1B$，即有$BA_1/\!/PI_A$，亦即有$\frac{I_AA_1}{A_1M}=\frac{PB}{BM}=\frac{AB}{BM}=\frac{AI}{IM}$．

由性质 3 的推论 6，知I_A是边BC外的旁心．

例 20 如图 11－30，在四边形$ABCD$中，对角线AC平分$\angle BAD$．在CD上取一点

E，BE 交 AC 交于点 F，延长 DF 交 BC 于 G．求证：$\angle GAC=\angle EAC$．

（1999 年全国高中联赛题）

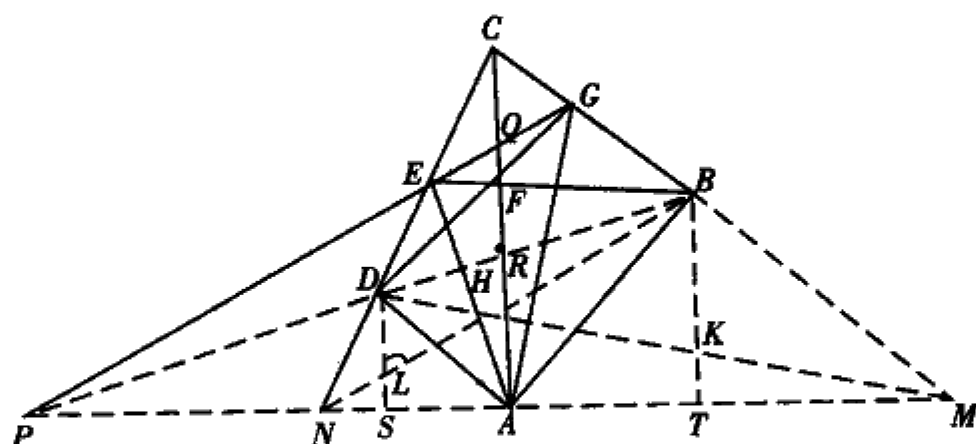


图 11－30

证法 1 当 $AB=AD$ 时，四边形 $ABCD$ 是筝形，结论成立．

当 $AB\neq AD$ 时，过 A 作 AC 的垂线与 CB、CD 的延长线分别交于点 M、N．

由 $\angle BAC=\angle DAC$，可证 BN、DM 的交点 H 在 AC 上．[注]

在 $\triangle BNE$ 与 $\triangle DMG$ 中，因 BN 与 DM 的交点为 H，BE 与 DG 的交点为 F，NE 与 MG 的交点为 C，且 C、F、H 共线，则由戴沙格定理的逆定理知 BD、MN、EG 三线共点，设该点为 P．

设 EG 与 FC 交于点 Q，在完全四边形 $CEDFBG$ 中，P、Q 调和分割 EG，从而 AP、AQ、AE、AG 为调和线束．而 $AP\perp AQ$，设 AQ 平分 $\angle EAG$．于是 $\angle GAC=\angle EAC$．

注 设 BN 与 AC 交于点 H，只要证 D、H、M 三点共线即可．

连 DH、HM，作 $BT\perp AM$ 于 M，交 HM 于 K，作 $DS\perp NA$ 于 S，交 NH 于 L．

由 $AC\perp MN$ 及 AC 平分 $\angle BAD$，易知 $\triangle ASD\backsim\triangle ATB$，有 $\dfrac{DS}{BT}=\dfrac{SA}{TA}$． ①

又由 $DS/\!/CA/\!/BT$，有 $\dfrac{DL}{DS}=\dfrac{CH}{CA}=\dfrac{BK}{BT}$． ②

而 $\dfrac{LH}{BH}=\dfrac{SA}{TA}$． ③

由①、②、③可得 $\dfrac{DL}{BK}=\dfrac{LH}{BH}$，而 $\angle HLD=\angle HBK$，则 $\triangle HLD\backsim\triangle HBK$．

从而 $\angle LHD=\angle BHK$，故 D、H、K 共线，即 D、H、M 共线．

证法 2 设直线 EG 与直线 DB 交于点 P（或无穷远点 P），分别与 AC 交于点 Q、R．则在完全四边形 $CEDFBG$ 中，知 P、R 调和分割 DB，P、Q 调和分割 EG．

由 AC 平分 $\angle BAD$，知 $AC\perp AP$，由此即知 $\angle GAC=\angle EAC$．

例 21 如图 11－31，圆 O_1 和圆 O_2 与 $\triangle ABC$ 的三边所在的三条直线都相切，E、F、G、H 为切点，并且 EG、FH 的延长线交于点 P．求证：直线 PA 与 BC 垂直．

（1996 年全国高中联赛题）

证明 设直线 PA 交 BC 于点 D. 对 $\triangle ABD$ 及截线 PHF，对 $\triangle ADC$ 及截线 PGE 分别应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DP}{PA}=1=\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}.$$

由切线性质，有 $BF=HB$，$CE=GC$，有

$$\frac{AH}{FD}=\frac{AG}{ED}，即\frac{ED}{DF}=\frac{AG}{AH}.$$

连结 O_1G，O_2H，由

$\text{Rt}\triangle AGO_1 \backsim \text{Rt}\triangle AHO_2$，知 $\frac{AG}{AH}=\frac{O_1G}{O_2H}$.

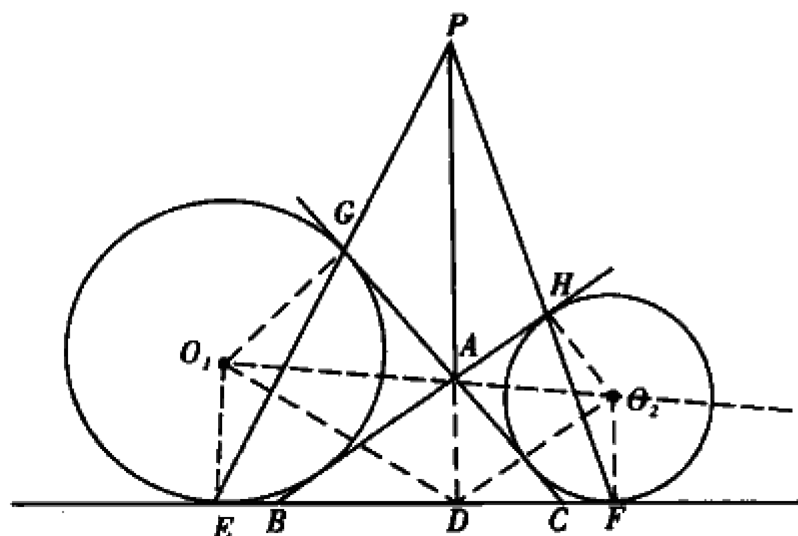


图 11－31

连结 O_1E、O_2F，则 $\frac{AG}{AH}=\frac{O_1E}{O_2F}$.

连结 O_1D、O_2D，则在 $\text{Rt}\triangle O_1ED$ 与 $\text{Rt}\triangle O_2FD$ 中，有 $\frac{ED}{DF}=\frac{O_1E}{O_2F}$.

于是，$\text{Rt}\triangle O_1ED \backsim \text{Rt}\triangle O_2FD$，即有 $\angle O_1DE=\angle O_2DC$，从而直线 DF 为 $\triangle O_1DO_2$ 中 $\angle O_1DO_2$ 的外角平分线.

设直线 O_1O_2 与直线 EF 交于点 Q（或无穷远点 Q），从而点 A、Q 调和分割 O_1O_2，即 DO_1、DO_2、DA、DQ 为高和线束，于是知 $DA\perp DQ$，故 $PA\perp BC$.

例 22 如图 11－32，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，其边 AB、DC 的延长线交于点 P，AD 和 BC 的延长线交于点 Q，过 Q 作该圆的两条切线，切点分别为 E、F. 求证：P、F、E 三点共线.

（1997 年 CMO 试题）

证法 1 连结 AC、BD 交于点 G，连结 PG 并延长，分别交 AD、BC 于点 M、N. 对 $\triangle APD$ 及点 G 应用塞瓦定理，并对 $\triangle APD$ 及截线 QCB 应梅涅劳斯定理，分别有

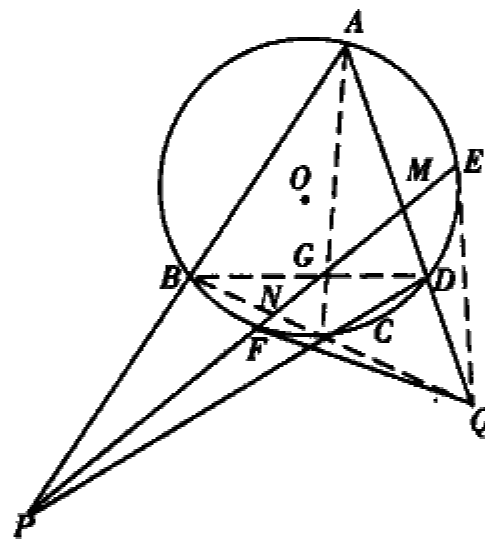


图 11－32

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DM}{MA}=1，\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1.$$

从而 $\frac{DM}{DQ}=\frac{AM}{AQ}$，即点 M、Q 调和分割 AD.

连结 EF 与 AD 交于 M'，则知 M' 为点 Q 的切点弦上的点，亦即知 M'、Q 调和分割 AD.

于是点 M' 与 M 重合，即知点 M 在直线 EF 上.

同理,点 N 在直线 EF 上,从而直线 PG 与 EF 重合,故 P、F、E 三点共线.

证法 2 连结 EF 与 AD 交于点 M',交 BC 于 N',则知 M'、Q 调和分割 AD,则

$\frac{AQ}{AM'}=\frac{DQ}{DM'}$,即 $\frac{DQ}{DM'}=\frac{DQ+AQ}{DM'+AM'}=\frac{DQ+AQ}{AD}$,

有 $\frac{QM'}{M'D}=1+\frac{QD}{M'D}=1+\frac{DQ+AQ}{AD}=\frac{2AQ}{AD}$.

同理,由 $\frac{BQ}{BN'}=\frac{CQ}{CN'}$,有 $\frac{CQ}{CN'}=\frac{CQ+BQ}{CN'+BN'}=\frac{CQ+BQ}{BC}$,有 $\frac{QN'}{N'C}=1+\frac{CQ+BQ}{BC}=\frac{2BQ}{BC}$.

对△$QM'N'$ 及截线 ABP 应用梅涅劳斯定理,有

$$1=\frac{QA}{AD}\cdot\frac{DP}{PC}\cdot\frac{CB}{BQ}=\frac{1}{2}\frac{QM'}{M'D}\cdot\frac{DP}{PC}\cdot 2\frac{CN'}{N'Q},$$

从而对△$QM'N$ 应用梅涅劳斯定理之逆定理知 P、N'、M' 三点共线,故 P、F、E 三点共线.

例 23 如图 11-33,已知 A 为平面上两半径不等的⊙O_1 和⊙O_2 的一个交点,两外公切线 P_1P_2、Q_1Q_2 分别切两圆于 P_1、P_2,Q_1、Q_2,M_1、M_2 分别是 P_1Q_1,P_2O_2 的中点.求证:$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.　　(IMO-24 试题)

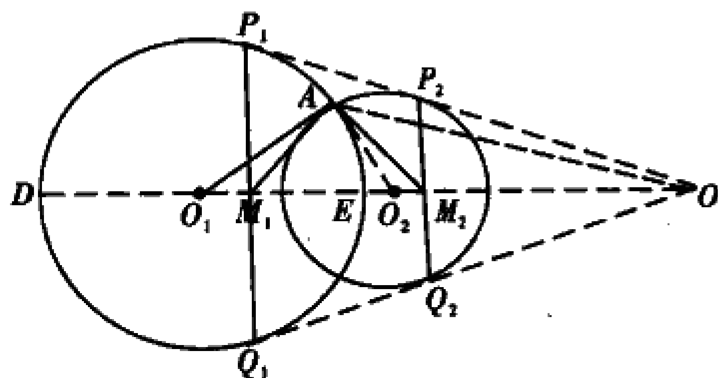


图 11-33

证明 设直线 P_1P_2 与 Q_1Q_2 交于点 O,则 O、O_1、O_2 共线,且设此直线交⊙O_1 与 D、E 两点,则知 M_1、O 调和分割 DE,从而 DE 的中点 O_1 满足

$O_1M_1\cdot O_1O=O_1E^2=O_1A^2$,

即有 $\frac{O_1A}{O_1M_1}=\frac{O_1O}{O_1A}$.由 $\angle AO_1M_1$ 公用,知△O_1AM_1 ∽△O_1OA.

于是 $\angle O_1AM_1=\angle O_1OA$.

同理 $\angle O_2AM_2=\angle O_2OA$.

故 $\angle O_1AO_2=M_1AM_2$

例 24 如图 11-34,已知⊙O_1 和⊙O_2 外离,两条公切线分别切⊙O_1 于 A_1、B_1,切⊙O_2 于 A_2、B_2,弦 A_1B_1、A_2B_2 分别交直线 O_1O_2 于 M_1、M_2,⊙O 过 A_1、A_2 分别交⊙O_1、⊙O_2 于 P_1、P_2.求证:$\angle O_1P_1M_1=\angle O_2P_2M_2$.　　(1990 年中国集训队测试题)

图 11－34

证明 设直线 A_1A_2 与 B_1B_2 交于点 P，先证 P_1、P_2、P 三点共线．

连结 P_1P 交⊙O_2 于 Q_2，直线 P_1P 交⊙O_1 于另一点 Q_1，连结 A_1Q_1，A_2Q_2，A_1P_1，则

$\angle A_2Q_2P=\angle A_1Q_1P=\angle P_1A_1P$．

从而 A_1、A_2、Q_2、P_1 四点共圆，于是知 P_2 与 Q_2 重合，故 P_1，P_2，P 三点共线．

由 O_1、O_2、O 共线，设此直线交⊙O_1 于 D、E，则知 M_1、P 调和分割 DE．

从而 DE 的中点 O_1 满足 $O_1M_1\cdot O_1P=O_1E^2=O_1P_1^2$．

即有 $\dfrac{O_1P_1}{O_1M_1}=\dfrac{O_1P}{O_1P_1}$，由 $\angle P_1O_1M_1$ 公用，知 $\triangle O_1P_1M_1\backsim\triangle O_1PP_1$，

有 $\angle O_1P_1M_1=\angle O_1PP_1$．

同理 $\angle O_2P_2M_2=\angle O_2PP_2$，故 $\angle O_1P_1M_1=\angle O_2P_2M_2$．

例 25 如图 11－35，在 $\triangle ABC$ 中，内切圆⊙O 分别与 BC、CA、AB 相切于点 D、E、F，连结 AD，与内切圆⊙O 相交于点 P，连结 BP、CP，则 $\angle BPC=90°$ 的充要条件是 $AE+AP=PD$．

（2006 年 CMO 试题的推广）

图 11－35

证明 过点 P 作内切圆的切线与直线 BC 相交于点 Q（或无穷远点 Q），则知 Q 和 D 调和分割 CB．

必要性：当 $\angle BPC=90°$ 时，则知 PC 平分 $\angle QPD$，于是在 $\triangle PCD$ 中，$\angle CDP=2\angle CPD$．

令 $AP=m$，$PD=n$，$AE=x$，$EC=v$，则 $CD=v$．

作 $\triangle PCD$ 的外接圆，作 $\angle PDC$ 的平分线并应用托勒密定理，有

$PC^2=CD^2+CD\cdot PD$．

即 $PC^2=v^2+v\cdot n$． ①

在$\triangle ACD$及AD上点P应用斯特瓦尔特定理,有

$$PC^2=CD^2\cdot\frac{AP}{AD}+AC^2\cdot\frac{PD}{AD}-AP\cdot PD.$$

即 $PC^2=v^2\cdot\frac{m}{m+n}+(x+v)^2\cdot\frac{n}{m+n}-m\cdot n.$ ②

又由切割线定理,有 $AE^2=AP\cdot AD$,即 $x^2=m(m+n)$. ③

由①,②,③,有 $v^2+v\cdot n=v^2\cdot\frac{m}{m+n}+[m(m+n)+2x\cdot v+v^2]\cdot\frac{n}{m+n}-mn$,

化简得 $m+n=2x$,即 $m+n=2\sqrt{m(m+n)}$,从而 $n=3m$,$x=2m$.

即 $x+m=3m=n$,故 $AE+AP=PD$.

充分性:当 $AE+AP=PD$ 时,令 $AP=m$,$PD=n$,$AE=x$,$EC=CD=v$,则

$x+m=n$. ④

此时,亦有③式,由③、④得 $n=3m$,$x=2m$. ⑤

同样,亦有②式:$PC^2=v^2\cdot\frac{m}{m+n}+(x+v)^2\cdot\frac{n}{m+n}-mn$,且此时由⑤式可化简为

$PC^2=v^2\cdot\frac{1}{4}(2m+v)^2\cdot\frac{3}{4}-3m^2=v^2+3mv.$ ⑥

即在$\triangle PCD$中,有 $PC^2=CD^2+CD\cdot PD$.逆用托勒密定理,知$\angle CDP=2\angle CPD$.亦即 PC 平分$\angle QPD$.

而 Q 和 D 调和分割 CB,从而 PB 平分$\angle QPD$的外角,故$\angle BPC=90°$.

例 26 如图 11－36,设 O 和 I 分别为$\triangle ABC$的外心和内心,$\triangle ABC$的内切圆与边 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F,直线 FD 与 CA 相交于点 P,直线 DE 与 AB 相交于点 Q,点 M、N 分别为线段 PE、QF 的中点 .求证:$OI\perp MN$. (2007 年 COM 试题)

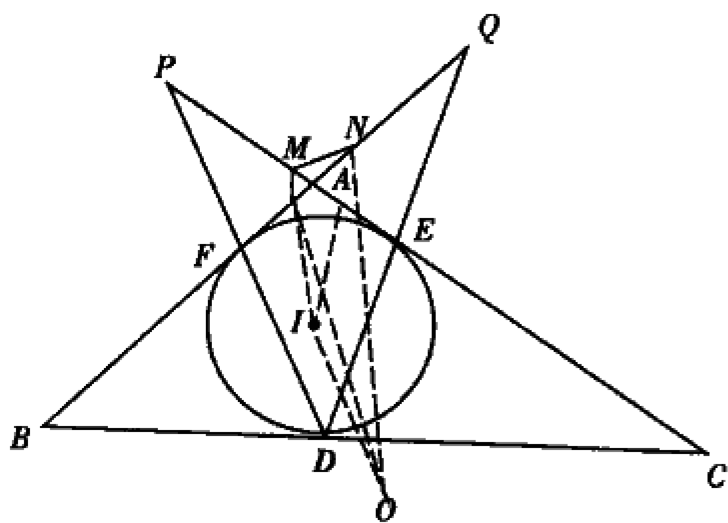


图 11－36

证明 由题设,知 P 和 E 调分割 AC,又 M 为 PE 的中点,则有 $ME^2=MA\cdot MC$. ①

同理,$NF^2=NA\cdot NB$. ②

设 R、r 分别是$\triangle ABC$的外接圆和内切圆半径,连结 IM、IN、OM、ON.则

$IM^2=ME^2+r^2$,$IN^2=NF^2+r^2$.

由圆幂定理,得 $OM^2=MA\cdot MC+R^2$,$ON^2=NA\cdot NB+R^2$.

结合①、②两式,有 $IM^2-IN^2=OM^2-ON^2$.故 $OI\perp MN$.

注 也可由 $MA\cdot MC=ME^2$,又可知 ME 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的内切圆的切线长,所以 ME^2 是点 M 到内切圆的幂,而 $MA\cdot MC$ 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆的幂.

从而等式 $MA\cdot MC=ME^2$,表明点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的幂相等,因而 M 在 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的根轴上.

同理,点 N 也在 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的根轴上.

故 $OI\perp MN$.

例27 如图11-37,设锐角 $\triangle ABC$ 的三边长互不相等,O 为其外心,点 A' 在线段 AO 的延长线上,使得 $\angle BA'A=CA'A$. 过 A' 作 $A'A_1\perp AC$、$A'A_2\perp AB$,垂足分别为 A_1、A_2,作 $AH_A\perp BC$,垂足为 H_A. 记 $\triangle H_AA_1A_2$ 的外接圆半径为 R_A,类似地可得 R_B、R_C. 求证:$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}=\frac{2}{R}$.其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

(2008年CMO试题)

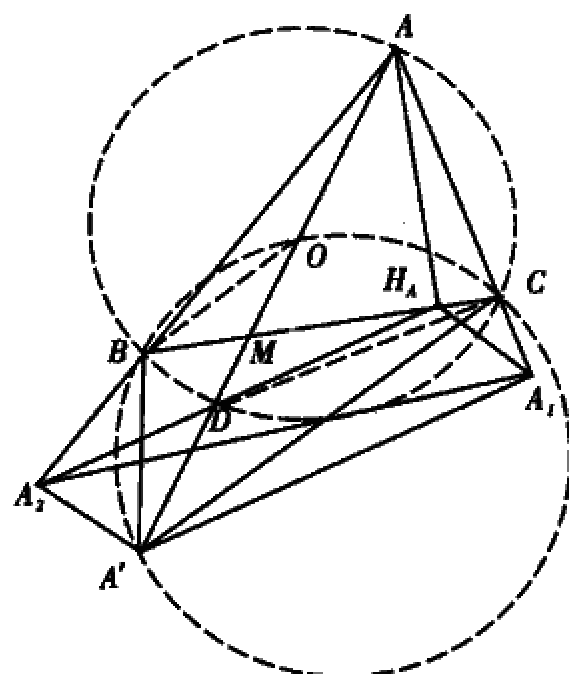


图11-37

证明 设 $\triangle BA'C$ 的外接圆交 AA' 于 O',由 $\angle BA'A=\angle CA'A$ 知,O' 为弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,且 O' 在 BC 的中垂线上. 而 O 为 BC 的中垂线与 AA' 的交点,则知 O' 与 O 重合,且有

$$\angle OBC=\angle OA'C. \qquad ①$$

设 AA' 交 BC 于 M,交 $\odot O$ 于 D,由 $OB=OD=OC$,知 D 为 $\triangle BAC$ 的内心. 连 BD、DC,则 $DB\perp BA$,$DC\perp AC$,即知 A 为 $\triangle BA'C$ 的旁心. 由性质3的推论6知,

$$OD^2=OM\cdot OA'. \qquad ②$$

又由 $\angle A_2AA'=\angle BAO=\angle H_AAC$,知 $Rt\triangle A_2AA'\backsim Rt\triangle H_AAC$,即有 $\frac{A_2A}{A'A}=\frac{H_AA}{AC}$. 而 $\angle A_2AH_A=\angle A'AC$,则 $\triangle A_2AH_A\backsim\triangle A'AC$. 于是,$\angle AA_2H_2=\angle AA'C\overset{①}{=}\angle OBC=90^\circ-\angle A$,即知 $A_2H_2\perp AA_1$.

从而 H_A 为 $\triangle AA_2A_1$ 的垂心,由垂心组 A、A_2、A_1、H_A 的性质知,$\triangle H_AA_1A_2$ 的外接圆直径等于 $\triangle AA_2A_1$ 的外接圆直径 AA'(因 A、A_2、A'、A_1 共圆),即知 $AA'=2R_A$.

由②,有 $\frac{OM}{R}=\frac{R}{OA'}=\frac{R}{2R_A-R}$,亦即 $\frac{OM}{R+OM}=\frac{R}{2R_A}$,从而 $\frac{R}{R_A}=2\cdot\frac{OM}{AM}=2\cdot\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}$.

同理,$\frac{R}{R_B}=\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ABC}}$,$\frac{R}{R_C}=\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}$.

故$\frac{R}{R_A}+\frac{R}{R_B}+\frac{R}{R_C}=\frac{2(S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OAB})}{S_{\triangle ABC}}=2$，即$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}=\frac{2}{R}$.

例 28 如图 11－38，已知 AB 是⊙O 的弦，M 是弧$\overset{\frown}{AB}$的中点，C 是⊙O 外任一点，过点 C 作⊙O 的切线 CS、CT，连结 MS、MT 分别交 AB 于点 E、F. 过点 E、F 作 AB 的垂线，分别交 DS、OT 于点 X、Y. 再过点 C 任作⊙O 的割线，交⊙O 于点 P、Q，连结 MP 交 AB 于点 R，设 Z 是△PQR 的外心．求证：X、Y、Z 三点共线.

(2007 年国家队选拔赛题)

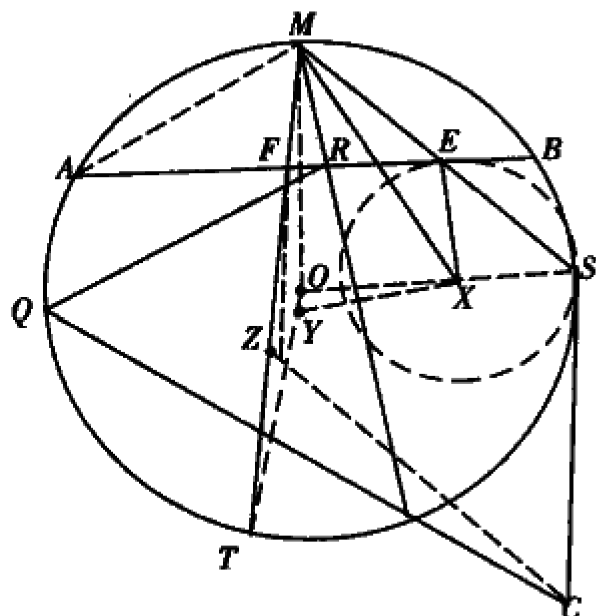


图 11－38

证明 连结相应线段如图 11－38，则 $OM\perp AB$，从而 $EX /\!/ OM$，即有$\angle XEC=\angle OMS=\angle XSE$，亦即 $XE=XS$，于是以 X 为圆心，以 XE 为半径作⊙X，则⊙X 与⊙O 相切于点 S.

由性质 3 的推论 6，有 $ME\cdot MS=MA^2=MR\cdot MP$.

设⊙X 和△PQR 的外接圆半径分别为 R_1、R_2，则由圆幂定理，有

$XM^2=ME\cdot MS+R_1^2=MR\cdot MP+R_1^2$，$XC^2=CS^2+R_1^2$，

$ZM^2=MR\cdot MP+R_2^2$，$ZC^2=CP\cdot CQ+R_2^2=CS^2+R_2^2$.

从而 $XM^2-XC^2=MR\cdot MP-CS^2=ZM^2-ZC^2$，即知 $ZX\perp MC$.

同理，$ZY\perp MC$，故 X、Y、Z 三点共线.

例 29 如图 11－39，设 H 是锐角△ABC 的高线 CP 上的任一点，直线 AH、BH 分别交 BC、AC 于点 M、N.

(1)证明：$\angle NPC=\angle MPC$；

(2)设 O 是 MN 与 CP 的交点，一条通过 O 的任意的直线交四边形 $CNHM$ 的边于 D、E 两点．证明：$\angle EPC=\angle DPC$.

(2003 年保加利亚奥林匹克题)

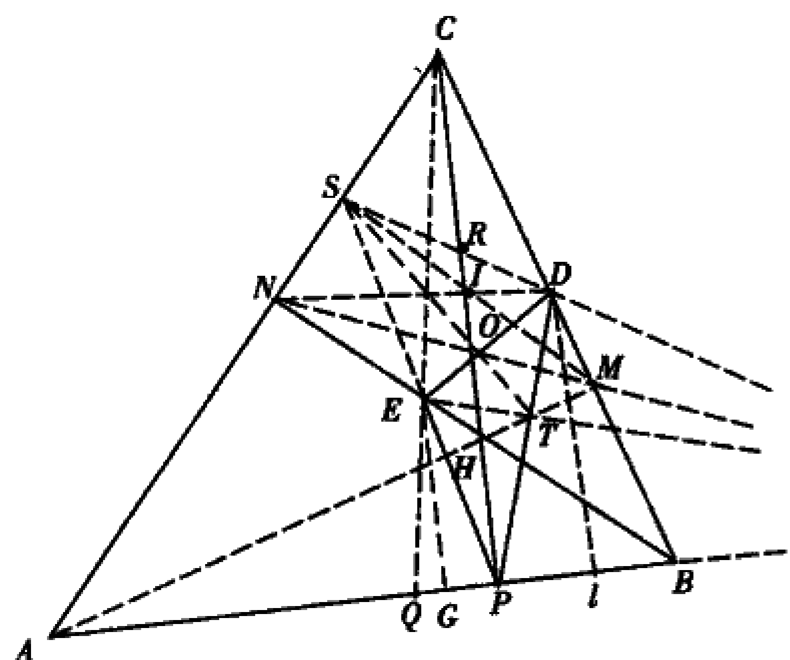


图 11－39

证法 1 (1)略.

(2)连 CE 并延长交 AB 于 Q，作 $DL\perp AB$ 于 L，作 $EG\perp AB$ 于 G.

由 $EG /\!/ CP /\!/ DL$，有$\frac{PG}{PL}=\frac{EO}{OD}$及$\frac{EG}{DL}=\frac{EG}{PC}$.

$\frac{PC}{DL}=\frac{QE}{QC}\cdot\frac{BC}{BD}$.

欲证$\angle EPC=\angle DPC$,只须证$\angle EPG=\angle DPL$.又只须证 Rt$\triangle EPG\backsim$ Rt$\triangle DPL$,即只须证$\frac{PG}{PL}=\frac{EG}{DL}$.

亦即只须证$\frac{QE}{CQ}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{OD}{OE}=1$. ①

对$\triangle CEH$及截线QPB应用梅涅劳斯定理,有$\frac{CQ}{QE}\cdot\frac{EB}{BH}\cdot\frac{HP}{PC}=1$,即$\frac{QE}{CQ}=\frac{EB}{BH}\cdot\frac{HP}{PC}$.

同理,对$\triangle COD$及截线EHB,有$\frac{CH}{HO}\cdot\frac{OE}{ED}\cdot\frac{DB}{BC}=1$,即$\frac{BC}{BD}=\frac{CH}{HO}\cdot\frac{OE}{ED}$.

对$\triangle OEH$及截线CDB,有$\frac{OC}{CH}\cdot\frac{HB}{BE}\cdot\frac{ED}{DO}=1$,即$\frac{OD}{OC}=\frac{BH}{HC}\cdot\frac{DE}{EB}$.

以上三式相乘,得$\frac{QE}{CQ}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{OD}{OC}=\frac{HP}{PC}\cdot\frac{OE}{HO}$.

亦即$\frac{QE}{CQ}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{OD}{OE}=\frac{PH}{PC}\cdot\frac{OC}{HO}$. ②

在完全四边形$CNAHBM$中,CH被O、P调和分割,有$\frac{PH}{PC}\cdot\frac{OC}{OH}=1$,即知①式成立.

证法 2 (1)略.

(2)延长PE交AC于S,设PD交AM于T.

在$\triangle SEN$与$\triangle TDM$中,SE与TD的交点P,EN与DM的交点B,SN与TM的交点A共线,故由戴沙格定理的逆定理,知ST、ED、MN三线共点于O.

在$\triangle SEN$与$\triangle DTM$中,SE与DT的交点P,EN与TM的交点H,SN与DM的交点C共线,故由戴沙格定理的逆定理,知SD、ET、MN三线共点于K.

在$\triangle SMT$与$\triangle DNE$中,因为SD、ET、MN共点于K,则由戴沙格定理知,ST与DE的交点O、MT与NE的交点H,SM与DN的交点共线,即SM与DN的交点I在CP上.

在$\triangle ASM$与$\triangle BDN$中,AS与BD的交点C,AM与BN的交点H、SM与DN的交点I共线于CP,则由戴沙格定理的逆定理知SD、MN、AB三线共点于K.

设SD与CO交于点R,则在完全四边形$CSNIMD$中,SD被R、K调和分割,从而PS、PD、PR、PK为调和线束,而$PR\perp PK$,故PR平分$\angle SPD$,即$\angle EPC=\angle DPC$.

【模拟实战】

习题 A

1. 梯形的两腰延长线的交点、两对角线的交点,两底的中点成调和点列;反之,若 C、D

调和分割 AB，即可将 C、D 作为梯形两底的中点，A 为两腰延长线的交点，B 为两对线的交点，作出一个梯形．试证明之．

2. 试证：两点调和分割圆的直径，过此两点作直线垂直于此直径，交任一切线于两点，则此两交点到圆心的距离之比是常数．
3. 在直角梯形 $ABCD$ 中，AB 为直角边腰，对角线 AC 与 BD 交于点 P，作 $PE\perp AB$ 于 E．求证：PE 平分 $\angle DEC$．
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，H 为 AD 上任一点，CH、BH 分别与 AB、AC 交于点 E、F．求证：$\angle EDA=\angle FDA$．
5. 在 $\triangle PBC$ 中，$\angle PBC=60°$，过点 P 作 $\triangle PBC$ 的外接圆 $\odot O$ 的切线，与 CB 的延长线交于点 A．点 D、E 分别在线段 PA 和 $\odot O$ 上，使得 $\angle DBE=90°$，$PD=PE$，连结 BE 与 PC 相交于点 F．已知 AF、BP、CD 三线共点．
   (1)求证：BF 是 $\angle PBC$ 的平分线；
   (2)求 $\tan\angle PCB$ 的值．（2006 年中国西部奥林匹克题）
6. 过圆外一点 P 作圆的两条切线 PA、PB，A、B 为切点，再过点 P 作圆的一条割线分别交圆于 C、D 两点，过切点 B 作 PA 的平行线分别交直线 AC、AD 于 E、F．求证：$BE=BF$．（2005 年中国西部奥林匹克题）
7. 锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，分别过点 B、C 作 $\odot O$ 的切线，并分别交过点 A 所作 $\odot O$ 的切线点 M、N，AD 为边 BC 上的高．求证：AD 平分 $\angle MDN$．
   （1998 年全俄奥林匹克题）

习题 B

1. 分别以 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 为一边向形外作 $\triangle ABF$、$\triangle ACE$，使得 $\triangle ABF\backsim\triangle ACE$ 且 $\angle ABF=90°$，设 BE 交 CF 于点 M，BE 交 AC 于点 D，CF 交 AB 于点 G，过点 M 作 $MH\perp BC$ 于点 H．求证：MH 平分 $\angle GHD$．（IMO－23 预选题改编）
2. 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上取一点 D，以 D 为圆心在三角形内作半圆分别切边 AB 于点 F，切 AC 于点 E，BE 与 CF 交于点 H，过点 H 作 $HG\perp BC$ 于点 G．求证：HG 平分 $\angle FGE$．（IMO－35 预选题）
3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle A$ 的内角平分线，点 D 在边 BC 上，过点 D 分别作 $DE\perp AC$，$DF\perp AB$，垂足分别为 E、F，连结 BE、CF，它们相交于点 H．$\triangle AFH$ 的外接圆交 BE 于点 G．求证：以线段 BG、GE、BF 组成的三角形是直角三角形．
   （2003 年国家集训队选拔赛题）

第十二章　三角形内心的性质及应用

【基础知识】

三角形的内切圆的圆心简称为三角形的内心，内心有下列有趣的性质：

性质1　三角形的内心是三角形三条内角平分线的交点.

性质2　设 I 为 $\triangle ABC$ 内一点. I 为其内心的充要条件是：I 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等.

性质3　设 I 为 $\triangle ABC$ 内一点，AI 所在直线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D. I 为 $\triangle ABC$ 内心的充要条件是：$ID=DB=DC$.

证明　如图12-1，必要性：连 BI，由 $\angle DIB=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=\angle CBD+\angle IBC=\angle DBI$，知 $ID=BD=DC$.

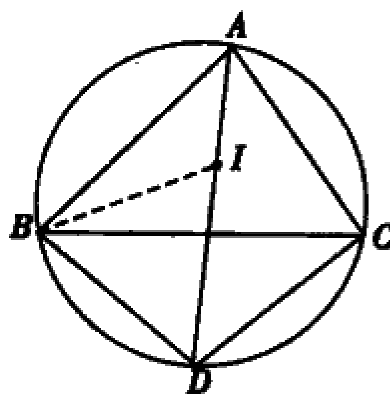


图12-1

充分性：由 $DB=DC$，即知 AD 平分 $\angle BAC$. 由 $DI=DB$，有 $\angle DIB=\angle DBI$，即 $\angle DBC+\angle CBI=\angle IAB+\angle ABI$，而 $\angle IAB=\angle IAC=\angle DBC$，从而 $\angle CBI=\angle IBA$，即 BI 平分 $\angle ABC$，故 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

性质4　设 I 为 $\triangle ABC$ 内一点，I 为 $\triangle ABC$ 的内心的充要条件是：$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle A$，$\angle AIC=90°+\frac{1}{2}\angle B$，$\angle AIB=90°+\frac{1}{2}\angle C$.

证明　必要性显然. 反证充分性：作 $\triangle ABC$ 的外接圆，与射线 AI 交于点 D，连 DB，DC，如图12-1.

由 $\angle AIB=90°+\frac{1}{2}\angle ACB$，知 $\angle DIB=90°-\frac{1}{2}\angle ACB$.

又 $\angle IDB=\angle ADB=\angle ACB$，在 $\triangle DIB$ 中，求得 $\angle DBI=90°-\frac{1}{2}\angle ACB$，则 $\angle DIB=\angle DBI$，故 $DB=DI$.

同样地，$DC=DI$，即 $DI=DB=DC$，由性质3即证得结论成立.

性质5　设 I 为 $\triangle ABC$ 内一点，I 为 $\triangle ABC$ 的内心的充要条件是：$\triangle IBC$，$\triangle ICA$，$\triangle IAB$ 的外心均在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证明 必要性：如图 12－2，设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，AI，BI，CI 的延长线分别交$\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1，B_1，C_1，于是由性质 3，知 $A_1B=A_1I=A_1C$，因此，A_1 是$\triangle IBC$ 的外心．

同理，B_1，C_1 分别是$\triangle ICA$，$\triangle IAB$ 的外心．

故必要性获证．

充分性：又设 I' 为$\triangle ABC$ 内另一点，$\triangle I'BC$，$\triangle I'CA$，$\triangle I'AB$ 的外心 A_2，B_2，C_2 均在$\triangle ABC$ 的外接圆上，由 $A_2B=A_2C$，$A_1B=A_1C$，知 A_2 与 A_1 重合．同理 B_2 与 B_1 重合，C_2 与 C_1 重合．

图 12－2

由于 A_1，C_1 分别是$\triangle IBC$，$\triangle IAB$ 的外心，知 A_1C_1 垂直平分线段 BI'，由此可知 I' 与 I 重合，即 I' 为$\triangle ABC$ 的内心．

注 性质 5 中，三个三角形$\triangle I'BC$，$\triangle I'CA$，$\triangle I'AB$ 中有两个的外心在$\triangle ABC$ 的外接圆上即可．

性质 6 一条直线截三角形，把周长 l 与面积 S 分为对应的两部分：l_1 与 l_2，S_1 与 S_2．此直线过三角形内心的充要条件是$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{S_1}{S_2}$．

证明 必要性：如图 12－3，设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，过 I 的直线交 AB 于 P，交 AC 于 Q．记 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$AP=m$，$AQ=n$，内切圆半径为 r，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=s$，$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle API}+S_{\triangle AQI}=\dfrac{1}{2}(m+n)\cdot r$．

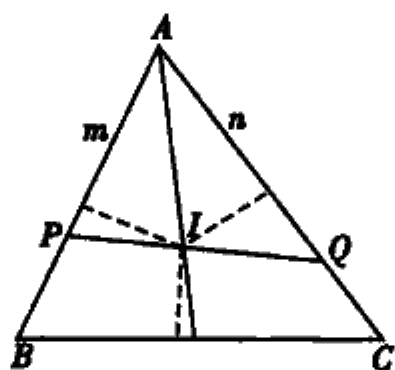


图 12－3

$$由\quad \frac{S}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r}{\frac{1}{2}(m+n)\cdot r}=\frac{a+b+c}{m+n}=\frac{l}{l_1}，有\frac{l_1}{l_2}=\frac{S_1}{S_2}.$$

充分性：设直线 PQ 把$\triangle ABC$ 的周长 l 与面积 S 分为对应的两部分成等比$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{S_1}{S_2}$，且与 AB 交于 P，与 AC 交于 Q，与$\angle A$ 的平分线交于 I．

记 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$AP=m$，$AQ=n$，I 到 AB，AC 的距离为 r，I 到 BC 的距离为 d．

$$由\frac{l_1+l_2}{l_1}=\frac{a+b+c}{m+n}=\frac{\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r}{\frac{1}{2}(m+n)\cdot r}得\quad \frac{S_1+S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}b\cdot r+\frac{1}{2}c\cdot r+\frac{1}{2}a\cdot d}{\frac{1}{2}m\cdot r+\frac{1}{2}n\cdot r}.$$

注意到$\frac{l_1+l_2}{l_1}=\frac{S_1+S_2}{S_1}$，从而有 $ad=ar$，即 $d=r$，故 I 为$\triangle ABC$ 的内心，即直线 PQ 过内心.

性质 7 设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，I 在 BC，AC，AB 边上的射影分别为 D，E，F；内切圆半径为 r，令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则

(1) $ID=IE=IF=r$，$S_{\triangle ABC}=pr$；

(2) $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$，$AE=AF=p-a$，$BD=BF=p-b$，$CE=CD=p-c$；

(3) $abc\cdot r=p\cdot AI\cdot BI\cdot CI$.

证明 仅证(3). 在$\triangle ABI$ 中，$\frac{AI}{\sin\frac{1}{2}\angle B}=\frac{C}{\sin\angle AIB}=\frac{c}{\cos\frac{1}{2}\angle C}$.

类似地还有两式，此三式相乘，即有$\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{abc}=\tan\frac{1}{2}\angle A\cdot\tan\frac{1}{2}\angle B\cdot\tan\frac{1}{2}\angle C=\frac{r}{p-a}\cdot\frac{r}{p-b}\cdot\frac{r}{p-c}=\frac{pr^3}{S^2_{\triangle ABC}}=\frac{r}{p}$，由此即证.

性质 8 设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 K，交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D，则 $\frac{AI}{KI}=\frac{AD}{DI}=\frac{DI}{DK}=\frac{b+c}{a}$.

证明 如图 12－1，由$\frac{AI}{KI}=\frac{BA}{BK}=\frac{AC}{KC}=\frac{AB+AC}{BK+KC}=\frac{b+c}{a}$及$\triangle ADC\backsim\triangle CDK$，有$\frac{AD}{DC}=\frac{AC}{CK}=\frac{CD}{DK}$，亦有$\frac{AD}{DI}=\frac{AC}{CK}=\frac{AB}{BK}=\frac{AB+AC}{CK+BK}=\frac{b+c}{a}$，$\frac{DI}{DK}=\frac{CD}{DK}=\frac{AC}{CK}=\frac{AB}{BK}=\frac{AB+AC}{CK+BK}=\frac{b+c}{a}$.

性质 9 过$\triangle ABC$ 内心 I 任作一直线，分别交 AB，AC 于 P 及 Q 两点，则

$$\frac{AB}{AP}\cdot AC+\frac{AC}{AQ}\cdot AB=AB+AC+BC$$

或 $$\frac{AB}{AP}\cdot\sin\angle B+\frac{AC}{AQ}\cdot\sin\angle C=\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C.$$

证明 如图 12－4，先看一般情形：设 M 为 BC 上任意一点，直线 PQ 分别交 AB，AM，AC，于 P，N，Q，则

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AN+NM}{AN}=\frac{S_{\triangle APQ}+S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle APQ}}=\frac{S_{\triangle APM}+S_{\triangle AQM}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}\cdot S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{\frac{AP}{AB}\cdot S_{\triangle ABM}+\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ACM}}{\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{BM}{BC}+\frac{AB}{AP}\cdot\frac{CM}{BC}. \quad ①$$

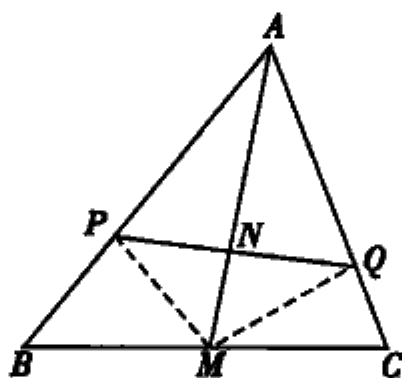


图 12-4

当 N 为 $\triangle ABC$ 的内心时，由三角形内角平分线性质及合比、等比定理，有

$$\frac{BM}{BC}=\frac{AB}{AB+AC},\frac{MC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC},\frac{AM}{AN}=\frac{AB+AC+BC}{AB+AC}.$$

将上述三式代入①式即证得结论.

性质 10 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，$\triangle ABC$ 内一点 P 在 BC,CA,AB 上的射影分别为 D,E,F，当 P 与 I 重合时，$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ 的值最小. (IMO-22 试题)

证明 设 $BC=a,CA=b,AB=c,PD=x,PE=y,PF=z$，显然有 $ax+by+cz=2S_{\triangle ABC}$ 是定值.

由柯西不等式，有 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)\geqslant(a+b+c)^2$，故

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}(\text{定值}).$$

其中等号当且仅当 $\frac{a}{x}:ax=\frac{b}{y}:by=\frac{c}{z}:cz$ 即 $x=y=z$ 时成立，此时 P 与 I 重合.

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 12-5，D 是 $\triangle ABC$ 的内心，E 是 $\triangle ABD$ 的内心，F 是 $\triangle BDE$ 的内心，若 $\angle BFE$ 的度数为整数，求 $\angle BFE$ 的最小度数.

解 由性质 4，知

$$\angle BFE=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BDE=90^\circ+\frac{1}{4}\angle BDA$$
$$=90^\circ+\frac{1}{4}\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB\right)$$
$$=112^\circ+\frac{1}{8}(4^\circ+\angle ACB).$$

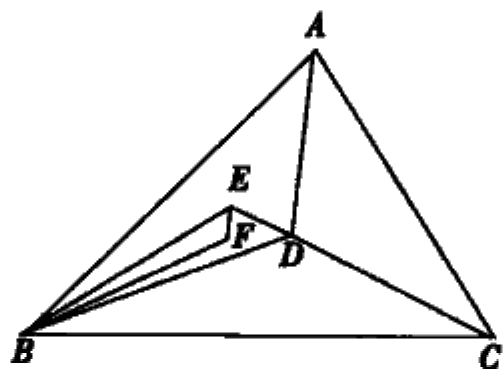


图 12-5

故当 $\angle ACB=4^\circ$ 时，$\angle BFE$ 的最小度数为 113°.

例 2 如图 12-6，设点 M 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边的中点，I 是其内心，AH 是 BC 边上的高，E 为直线 IM 与 AH 的交点. 求证：AE 等于内切圆半径 r.

证明 设 P 为内切圆与边 BC 的切点，连 IP，设 $BC=a,CA=b,AB=c$，则 $MC=$

$\frac{1}{2}a$, $PC=\frac{a+b-c}{2}$, $HC=AC\cdot\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$.

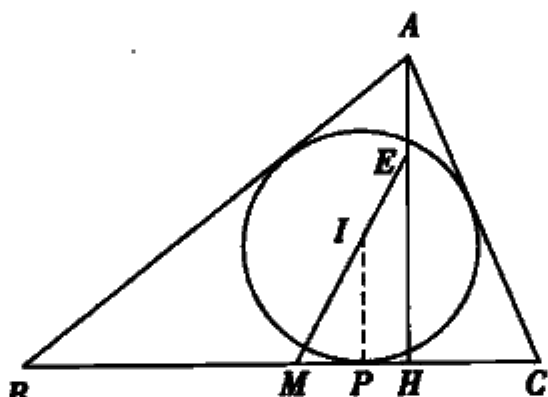


图 12－6

由 $\triangle IMP\backsim\triangle EMH$，有 $\frac{EH}{IP}=\frac{HM}{PM}=\frac{MC-HC}{MC-PC}=\frac{a-2HC}{c-b}=\frac{b+c}{a}$.

又 $AH\cdot a=2S_{\triangle ABC}=r(a+b+c)$，即 $\frac{AH}{r}=\frac{a+b+c}{a}$.

再由 $\frac{EH}{r}=\frac{b+c}{a}$（注意 $IP=r$），及 $AE=AH-EH$，有 $\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=1$，故 $AE=r$.

注 (1)此例的逆命题也是成立的，即若 $AE=r$，则 M、I、E 共线.

(2)在图 12－6 中，还可推证有如下结论：①直线 MI 平分 AP；②设$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot I$ 切 AC 于 Q，切 AB 于 L，则 QL 与直线 PI 的交点 T 的直线 AM 上；③设直线 PI 交$\odot I$ 于 G，即 G 为直径端点，直线 AG 交 BC 于 K，则 $BK=PC$；④$\triangle ABC$ 的外心 O 为 KI 的中点……这些结论的证明可参见笔者著作《走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释》(下册)，哈尔滨工业大学出版社 2007 年元月出版.

例 3 如图 12－7，设$\triangle ABC$ 的外接圆$\odot O$ 的半径为 R，内心为 I，$\angle B=60°$，$\angle A<\angle C$，$\angle A$ 的外角平分线交$\odot O$ 于 E. 证明：(1) $IO=AE$；(2) $2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.

（1994 年全国高中联赛题）

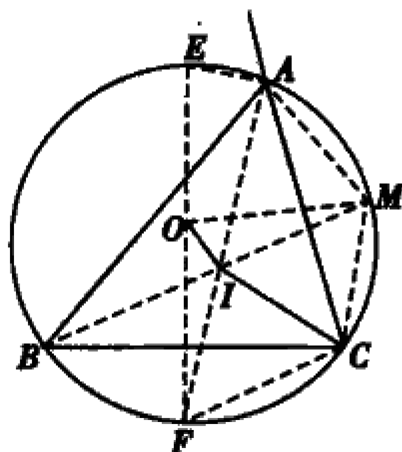


图 12－7

证明 (1)连 BI 并延长交$\odot O$ 于 M，则 M 为$\overset{\frown}{AC}$的中点. 连 OM, AM, OC, MC，由$\angle B=60°$，则知$\triangle AOM$，$\triangle MOC$ 均为正三角形.

由性质 3 知 $IM=AM=MC$，即知 M 为过点 A, O, I, C 四点的圆的圆心，且半径为 R，从而此圆与$\odot O$ 为等圆.

延长 AI 交$\odot O$ 于 F，由题设条件可证 F, O, E 三点共线. 于是$\angle OAI=\frac{1}{2}\angle OMI$，$\angle AFE=\frac{1}{2}\angle EOA$，而$\angle OAI=\angle AFE$，故$\angle OMI=\angle EOA$，由此即有 $IO=AE$.

(2)连 FC，由性质 3 知 $IF=FC$，又$\angle AFC=\angle B=60°$，从而 $IC=IF$，故 $IO+AI+IC=AE+AF>EF=2R$.

又 $IO+AI+IC=AE+AF=2R\cdot\cos\angle AEF+2R\cdot\sin\angle AEF$

$=2R\cdot\sqrt{2}\sin(\angle AEF+45°)<2R\cdot\sqrt{2}\sin(60°+45°)=2R\cdot\sqrt{2}\sin75°$

$=2R\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})=(1+\sqrt{3})R$.(其中$\angle AEF>60°$)即证.

例 4 如图 12-8,在$\triangle ABC$中,$AB=4,AC=6,BC=5$,$\angle A$的平分线AD交$\triangle ABC$的外接圆于K.O,I分别为$\triangle ABC$的外心,内心.求证:$OI\perp AK$.

(1982 年四川省竞赛题)

证明 连接KO并延长交$\odot O$于E,连AE,则$\angle KAE=90°$,$\frac{EK}{OK}=2$.

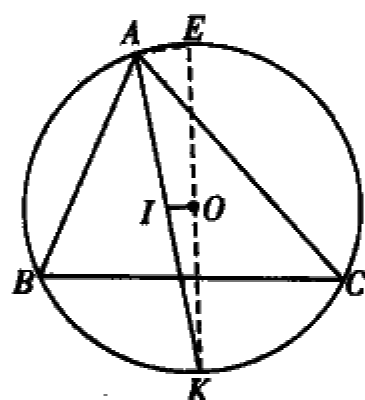


图 12-8

因I为$\triangle ABC$的内心,由性质 8 知$\frac{AK}{IK}=\frac{AB+AC}{BC}=\frac{4+6}{5}=2$.

于是$OI /\!/ AE$.从而$\angle OIK=\angle KAE=90°$,故$OI\perp AK$.

【解题思维策略分析】

1. 注意到内心是角平分线的交点

例 5 如图 12-9,设P为$\triangle ABC$内一点,$\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$,又设$D,E$分别是$\triangle APB$及$\triangle APC$的内心.证明:$AP,BD,CE$交于一点.

(IMO37-2 试题)

证明 过P向三边作垂线,垂足分别为R,S,T.

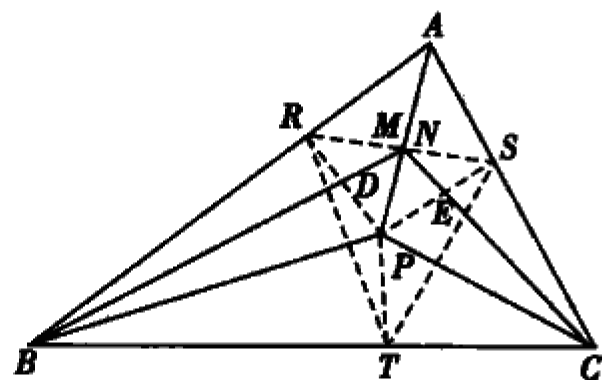


图 12-9

连RS,ST,TR,易知,P,R,A,S;P,T,B,R;P,S,C,T分别四点共圆,则$\angle APB-\angle ACB=(180°-\angle ABP-\angle BAP)-(180°-\angle B-\angle A)=\angle PAC+\angle PBC=\angle PRS+\angle PRT=\angle SRT$.

同理,$\angle APC-\angle ABC=\angle RST$.

由条件$\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$,知$\angle SRT=\angle RST$,亦即$RT=ST$.

由$RT=PB\cdot\sin\angle B$,$ST=PC\cdot\sin\angle C$,知$PB\cdot\sin\angle B=PC\cdot\sin\angle C$.

即 $\frac{PB}{PC}=\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}=\frac{AB}{AC}$,亦即 $\frac{PB}{AB}=\frac{PC}{AC}$.

设BD交AP于M,CE交AP于N,则由角平分线性质,有

$\frac{AN}{NP}=\frac{AC}{PC}=\frac{AB}{PB}=\frac{AM}{MP}$,即$\frac{AN}{AP}=\frac{AM}{AP}$,故$M,N$重合,从而$AP,BD,CE$交于一点.

例 6 如图 12-10,设三角形的外接圆半径、内切圆半径分别为R,r,其外心、内心分别为O,I.若$IO=d$,则$d^2=R^2-2Rr$.　　(欧拉公式,IMO-4 试题的推广)

证明 连 AI 并延长交⊙O 于 D，作直径 DE，连 BD，BE，设⊙I 切 AB 于 F，连 IF，则 $IF=r$.

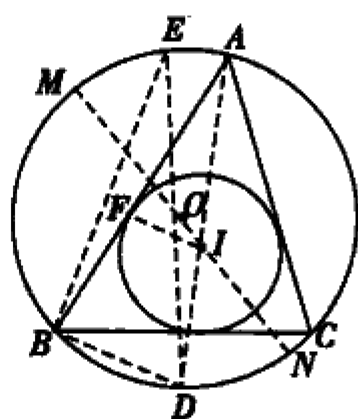


图 12-10

在 Rt△EBD 和 Rt△AFI 中，由∠BED=∠FAI，知△EBD∽△AFI，从而 $\frac{DE}{AI}=\frac{BD}{FI}$，即 $\frac{2R}{AI}=\frac{BD}{r}$.

由性质 3，知 $BD=ID$，所以 $2Rr=AI\cdot BD=AI\cdot ID$.

将 OI 两端延长交⊙O 于 M,N，则由相交弦定理，得

$AI\cdot ID=MI\cdot IN=(R+d)(R-d)=R^2-d^2$，

故 $d^2=R^2-2Rr$.

例 7 如图 12-11，在△ABC 中，有一个圆⊙O' 内切于△ABC 的外接圆⊙O，并且与 AB，AC 分别相切于 P，Q. 求证：线段 PQ 的中点 I 是△ABC 的内心. （IMO-20 试题的推广）

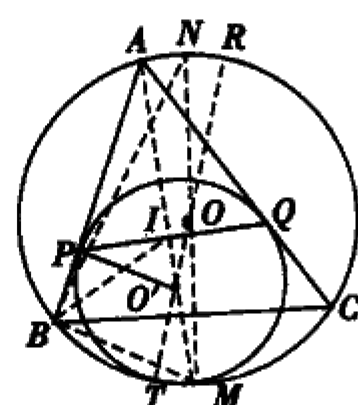


图 12-11

证明 设 AI 的延长线交⊙O 于 M，则 O' 在 AM 上. 连 $O'P$，由 $O'P\perp AB$，$O'A\perp PQ$，有 $O'P^2=O'I\cdot O'A$. ①

作两圆连心线 OO' 交⊙O 于 R,T，则 $O'R\cdot TO'=O'A\cdot MO'$. ②

①+②并注意到 $O'P=O'T$，有 $O'P\cdot TR=O'A\cdot MI$. ③

再作⊙O 的直径 MN，可知 $BM\perp BN$，∠MNB=∠MAB，从而 Rt△BMN∽Rt△POA，即有 $O'P\cdot MN=O'A\cdot BM$. ④

比较③，④，注意到 $MN=TR$，故 $BM=MI$.

由性质 3，即知 I 为△ABC 的内心.

另证 显然，PQ 的中点 I，圆心 O'，$\overset{\frown}{BC}$ 的中点 M 都在∠BAC 的平分线上，若设∠$BAC=2\alpha$，⊙O' 的半径为 r，则 $AO'=\frac{r}{\sin\alpha}$. 设直线 OO' 交⊙O 于 R,T，且⊙O 的半径为 r^*，则 $O'M\cdot AO'=RO'\cdot O'T$，即 $O'M=\frac{RO'\cdot O'T}{AO'}=\frac{(2r^*-r)\cdot r}{r/\sin\alpha}=\sin\alpha\cdot(2r^*-r)$. 由 Rt△$PIO'$，知 $IO'=\sin\alpha\cdot r$，$IM=IO'+O'M=\sin\alpha\cdot r+\sin\alpha\cdot(2r^*-r)=\sin\alpha\cdot 2r^*$.

由△ABM，知 $BM=2r^*\cdot\sin\alpha\Rightarrow BM=IM$，即证.

例 8 △ABC 的∠A 的平分线与△ABC 的外接圆交于 D，I 是△ABC 的内心，M 是边 BC 的中点，P 是 I 关于 M 的对称点（设点 P 在圆内），延长 DP 与外接圆相交于点 N. 试证：在 AN，BN，CN 三条线段中，必有一条线段是另两条线段之和.

（IMO-34 中国国家队选拔赛试题）

证明 如图 12-12，不妨设 N 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上，即证 $BN+CN=AN$.

连 BD，MN，MD，CD，注意到共底 ND 的三个三角形面积，即

由 $S_{\triangle BND}+S_{\triangle CND}=2S_{\triangle MND}$，及 P 在 ND 上，且 $IM=MP$，知 $2S_{\triangle MND}=S_{\triangle IND}=S_{\triangle BND}+S_{\triangle CND}$． ①

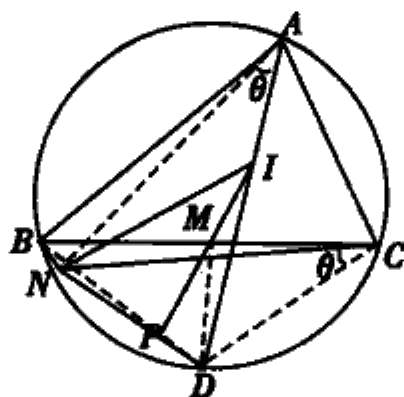


图 12－12

令 $\angle NAD=\theta$，则 $\angle NBD=\angle NCD=\theta$，于是

$$S_{\triangle BND}=\frac{1}{2}BD\cdot BN\cdot\sin\theta,S_{\triangle CND}=\frac{1}{2}CD\cdot CN\cdot\sin\theta,$$

$$S_{\triangle IND}=S_{\triangle NAD}-S_{\triangle NAI}=\frac{1}{2}ID\cdot AN\cdot\sin\theta.$$

注意到性质 3，知 $BD=CD=ID$，从而由①式即得 $BN+CN=AN$．

例 9 如图 12－13，在 $\triangle ABC$ 中，O 是外心，I 是内心，$\angle C=30°$，边 AC 上的点 D 与边 BC 上的点 E 使 $AD=BE=AB$．求证：$OI\perp DE$，$OI=DE$． （IMO－29 试题）

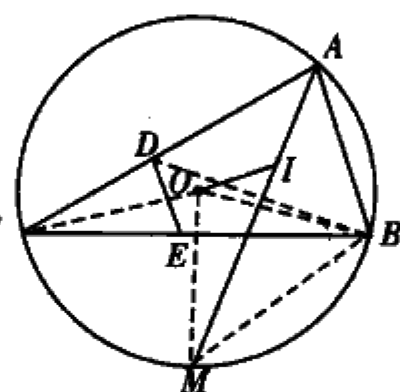


图 12－13

证明 连 AI 并延长交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 M，连 BD，OM，OB，BM．由 I 为内心，知 $BM=CM$．

又 $OC=OB$，则 $OM\perp EB$．

由 AI 平分 $\angle BAC$，且 $AB=AD$，则 $AI\perp BD$．

从而知 $\angle OMI$ 与 $\angle EBD$ 的两组对边分别垂直，且它们都是锐角，因此，$\angle OMI=\angle EBD$． ①

由正弦定理，有 $AB=2R\cdot\sin C=2R\cdot\sin30°=R=OB=OM$，又 $\angle BAD=\frac{1}{2}\overparen{BMC}$的度数 $=\overparen{BM}$的度数 $=\angle BOM$，从而 $\triangle DAB\cong\triangle MOB$，即有 $BD=BM$．

由性质 3 知 $BM=IM$，从而 $BD=IM$． ②

又 $AD=BE=AB$，则 $BE=OM$． ③

由①，②，③得 $\triangle OMI\cong\triangle EBD$，从而知通过旋转 90°和平移可使两个三角形重合，故 $OI\perp DE$，$OI=DE$．

2．注意过内心的直线的性质

例 10 如图 12－14，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，连接 $\triangle ABD$ 的内心与 $\triangle ACD$ 的内心的直线，分别与 AB 边交于 K，AC 边交于 L，$\triangle ABC$ 与 $\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 与 T．求证：$S\geqslant 2T$． （IMO－29 试题）

证明 设 AD 与 KL 交于 E，由性质 9 可得

$$AD\cdot\frac{AB}{AK}+AB\cdot\frac{AD}{AE}=AB+AD+BD,$$

$$AC\cdot\frac{AD}{AE}+AD\cdot\frac{AC}{AL}=AC+AD+DC.$$此两式可变为

$$\frac{1}{AK}+\frac{1}{AE}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AB}+\frac{BD}{AB\cdot AD},\quad ①$$

$$\frac{1}{AE}+\frac{1}{AL}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}+\frac{DC}{AC\cdot AD}.\quad ②$$

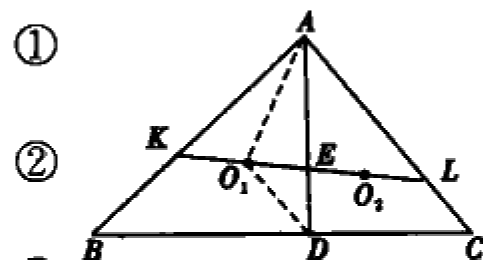


图 12－14

由$\triangle ADB\backsim\triangle CAB$，有$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{BD}$，即$\frac{BD}{AB\cdot AD}=\frac{1}{AC}$.　③

由$\triangle ADC\backsim\triangle BAC$，有$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{DC}$，即$\frac{DC}{AC\cdot AD}=\frac{1}{AB}$.　④

由①,②,③,④得 $AK=AL$，即$\angle AKO_1=\angle ALO_1=45°$.

又 O_1 是$\triangle ABD$ 的内心，易得$\triangle AKO_1\cong\triangle ADO_1$.

从而 $AK=AD$. 于是

$\frac{S}{T}=\frac{AB\cdot AC}{AK\cdot AL}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AC}{AD}=\frac{1}{\sin\angle B}\cdot\frac{1}{\sin\angle C}=\frac{1}{\sin\angle B}\cdot\frac{1}{\cos\angle B}=\frac{2}{\sin 2\angle B}\geqslant 2$，故 $S\geqslant 2T$.

例 11　如图 12－15，在$\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$，$AD\perp BC$，D 为垂足，过 Rt$\triangle ABD$ 的内心 O_1 和 Rt$\triangle ACD$ 的内心 O_2 的直线交 AB 于 K，交 AC 于 L. 若 $AK=AL$，则$\angle BAC=90°$.

(第 2 届全国奥林匹克命题比赛获奖题)

证明　设$\angle KAD=\alpha$，$\angle LAD=\beta$，由性质 9 及正弦定理，有

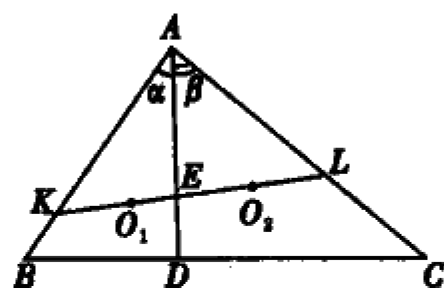


图 12－15

$$\sin\angle B\cdot\frac{AB}{AK}+\sin 90°\cdot\frac{AD}{AE}=\sin\angle B+\sin\alpha+\sin 90°,$$

$$\sin 90°\cdot\frac{AD}{AE}+\sin\angle C\cdot\frac{AC}{AL}=\sin\angle C+\sin\beta+\sin 90°.$$

将 $AK=AL$，$\sin\angle B=\frac{AD}{AB}$，$\sin\angle C=\frac{AD}{AC}$，

代入上述两式，得 $\sin\angle B+\sin\alpha=\sin\angle C+\sin\beta$.

又 $\sin\alpha=\frac{BD}{AB}$，$\sin\beta=\frac{DC}{AC}$，即有$\frac{AD}{AB}+\frac{BD}{AB}=\frac{AD}{AC}+\frac{DC}{AC}$.

而　$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}$，$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}$，

$\therefore\quad\frac{AD+BD}{\sqrt{AD^2+BD^2}}=\frac{AD+DC}{\sqrt{AD^2+DC^2}}$，亦即$(BD-DC)(AD^2-BD\cdot DC)=0$.

因 $AB\neq AC$，知 $BD\neq DC$，从而 $AD^2-BD\cdot DC=0$，

$\therefore$　Rt$\triangle ABD\backsim$ Rt$\triangle CAD$，即有$\angle B=\beta$，$\angle C=\alpha$.

$\because$　$\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$，$\therefore\angle BAC=\beta+\alpha=\angle B+\angle C=90°$.

注　例 10，例 11 的证法见孙哲先生的文章《三角形内心的一个性质与三道几何名题的新证》(《中学数学》1999 年第 6 期).

【模拟实战】

习题 A

1. 已知$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A、B两点，延长O_1A交$\odot O_2$于点C，延长O_2A交$\odot O_1$于D.求证：A是$\triangle BCD$的内心.
2. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，CD是斜边上的高.O_1，O_2分别是$\triangle ACD$和$\triangle BCD$的内心.求证：$\angle AO_2C=\angle BO_1C$.
3. 设$\triangle ABC$的内切圆I与AB、AC边分别切于点E、F，射线BI、CI分别交EF于点M、N.试证：四边形$AMIN$与$\triangle IBC$的面积相等.
4. 在梯形$ABCD$中，$BC\parallel DA$，对角线AC与BD相交于P.记$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$的内切圆半径依次为r_1、r_2、r_3、r_4，且$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$.求证：$AB+CD=BC+DA$.
5. 在凸四边形$ABCD$中，$AC=BD=AB$，且$AC\perp BD$，垂足为E.设I为$\triangle AEB$的内心，M为AB边的中点.求证：$MI\perp CD$，且$MI=\frac{1}{2}CD$.
6. 设I为$\triangle ABC$的内心，$\triangle A'B'C'$是从I向BC，CA，AB所作垂线的垂足三角形.证明：$\cot\angle A+\cot\angle B+\cot\angle C\geqslant\cot\angle A'+\cot\angle B'+\cot\angle C'$.
7. 已知AO是等腰$\triangle AEF$的底EF上的高，有$AO=EF$，延长AE到B，使$BE=AE$，过点B作AF的垂线，垂足为C.求证：点O是$\triangle ABC$的内心.
8. 设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，内切圆的半径为r，内心为I，延长AI交外接圆于D.求证：$AI\cdot ID=2Rr$.　　（1979年山东省中学生竞赛题）
9. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$的平分线交边AB及三角形的外接圆于D，K，I是$\triangle ABC$的内心.求证：(1)$\frac{1}{ID}-\frac{1}{IK}=\frac{1}{IC}$；(2)$\frac{IC}{ID}-\frac{ID}{DK}=1$.　　（1988年“友谊杯”国际竞赛题）
10. I为$\triangle ABC$的内心，且A'，B'，C'分别为$\triangle IBC$，$\triangle IAC$，$\triangle IAB$的外心.求证：$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$有相同的外心.　　（1988年第17届美国奥林匹克题）

习题 B

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的平分线分别交外接圆于点P，Q，R.求证：$AP+BQ+CR>BC+CA+AB$.　　（1982年澳大利亚竞赛题）

2. 四边形 $ABCD$ 内接于圆，$\triangle BCD$，$\triangle ACD$，$\triangle ABD$，$\triangle ABC$ 的内心依次记为 I_A，I_B，I_C，I_D．证明：$I_AI_BI_CI_D$ 是矩形．（1986 年中国奥林匹克集训队选拔考试题）
3. 在锐角$\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的平分线延长后分别与$\triangle ABC$ 的外接圆交于 A_1，B_1，C_1．直线 AA_1 与$\angle B$，$\angle C$ 的外角平分线相交于 A_0，B_0，C_0 与此类似．求证：(1) $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的 2 倍；(2) $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积至少是$\triangle ABC$ 面积的 4 倍．（IMO－30 试题）
4. $\triangle ABC$ 的$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的内角平分线分别与外接圆交于 A_1，B_1，C_1．证明：$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积大于或等于$\triangle ABC$ 的面积．（IMO－29 预选题）
5. 设 K 为$\triangle ABC$ 的内心，点 C_1，B_1 分别为边 AB，AC 的中点，直线 AC 与 C_1K 交于点 B_2，直线 AB 与 B_1K 交于点 C_2．若 $S_{\triangle AB_2C_2}=S_{\triangle ABC}$，求$\angle CAB$．
6. 设 I 是$\triangle ABC$ 的内心，并设$\triangle ABC$ 的内切圆与三边 BC，CA，AB 分别相切于点 K，L，M．过 B 点平行于 MK 的直线分别交直线 LM 及 LK 于点 R 和 S．证明：$\angle RIS$ 是锐角．（IMO－39 试题）
7. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，连接$\triangle ABD$ 的内心与$\triangle ACD$ 的内心的直线分别交 AB 边于 K，交 AC 边于 L，KL 与 AD 交于 E．求证：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AE}$．
8. 设$\triangle ABC$ 的内心为 I，外接圆分别交 AI，BI，CI 于 A'，B'，C'．证明：$IA\cdot IB\cdot IC\leqslant IA'\cdot IB'\cdot IC'$．
9. 已知等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，又$\triangle BCD$ 的内切圆切 CD 于 E，F 是$\angle DAC$ 的角平分线上一点，且 $EF\perp CD$，$\triangle ACF$ 的外接圆交 CD 于 G．证明：$\triangle AFG$ 是等腰三角形．（1999 年第 28 届美国奥林匹克题）
10. $\triangle ABC$ 具有下面性质：存在一个内部的点 P 使$\angle PAB=10°$，$\angle PBA=20°$，$\angle PCA=30°$，$\angle PAC=40°$．证明：$\triangle ABC$ 是等腰三角形．（1996 年第 25 届美国奥林匹克题）
11. 已知 R，Q 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC，AB 上的点．并且使 $AB+BR=AC+CR$，$CB+BQ=CA+AQ$，AR，CQ 相交于 J，又 M 是 BC 的中点，I 是$\triangle ABC$ 的内心．求证：$AJ/\!/MI$，$AJ=2MI$．
12. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=30°$，$\angle ABC=70°$，M 为形内一点，$\angle MAB=\angle MCA=20°$，求$\angle MBA$ 的度数．
13. 在$\triangle ABC$ 中，AD 为$\angle A$ 的平分线，M，N 分别为 AB，AC 的中点．若$\angle B$，$\angle MDN$，$\angle C$ 成等差数列，求证：AB，BC，AC 也成等差数列．

第十三章　三角形外心的性质及应用

【基础知识】

三角形的外接圆的圆心简称为三角形的外心.外心有下列有趣的性质:

性质1　三角形的外心是三角形三条边的中垂线的交点.

性质2　三角形所在平面内的一点是其外心的充要条件为:该点到三顶点的距离相等.

性质3　设 O 为△ABC 所在平面内一点,则 O 为△ABC 的外心的充要条件是下述条件之一成立:

(1)$\angle BOC=2\angle A,\angle AOC=2\angle B,\angle AOB=2\angle C$;

(2)$OB=OC$,且$\angle BOC=2\angle A$.

事实上,必要性显然,充分性只需注意到定弦一侧张定角的轨迹圆弧是唯一的即可.

性质4　设三角形的三条边长、外接圆的半径、其面积分别为 $a,b,c,R,S_\triangle$,则

$$R=\frac{abc}{4S_\triangle}\quad 或\quad S_\triangle=\frac{abc}{4R}.$$

性质5　直角三角形的外心为斜边中点,锐角三角形的外心在形内,钝角三角形的外心在形外.

性质6　三角形的外心到三边的有向距(外心在边的形内一侧的距离为正,否则为负)之和等于其外接圆与内切圆半径之和.

证明　对于直角三角形,显然结论成立.

如图13-1,对于锐角△ABC,设外心 O 在 $BC=a$, $CA=b$, $AB=C$ 边上的射影分别为 O_1,O_2,O_3,设 $OO_1=d_1$, $OO_2=d_2$, $OO_3=d_3$.由 A,O_3,O,O_2 四点共圆,并变用托勒迷定理,有

$$AO\cdot O_2O_3=AO_3\cdot OO_2+AO_2\cdot OO_3.$$

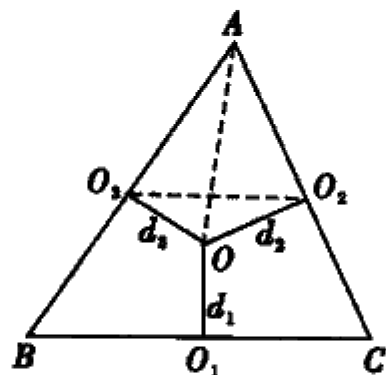


图13-1

设△ABC 的外接圆半径为 R,内切圆半径为 r.由于 O 为外心,则 O_1,O_2,O_3 分别为三边中点,于是,上式变为 $R\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}c\cdot$

$d_2+\frac{1}{2}b\cdot d_3$，即 $Ra=cd_2+bd_3$.

同理，有 $Rb=ad_3+cd_1$，$Rc=bd_1+ad_2$.

三式相加，得 $R(a+b+c)=d_1(b+c)+d_2(c+a)+d_3(a+b)$. ①

另一方面，由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}$，

有 $r(a+b+c)=ad_1+bd_2+cd_3$. ②

②+①式，即得 $R+r=d_1+d_2+d_3$.

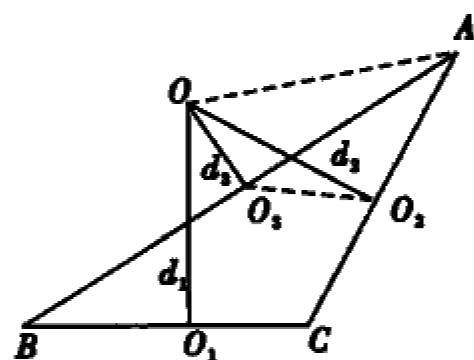


图 13－2

如图 13－2，对于钝角△ABC，字母所设同图 13－1，则 $OO_3=-d_3$（d_3 为负值）. 在四边形 O_3O_2AO 中应用托勒迷定理，有 $AO_3\cdot OO_2=OO_3\cdot AO_2+AO\cdot O_3O_2$，即

$cd_2=-bd_3+Ra$，即 $Ra=cd_2+bd_3$.

以下均同锐角的情况（略）. 故 $d_1+d_2+d_3=R+r$.

注 若由 $r=\frac{2S_{\triangle}}{a+b+c}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2R\cdot\sin\angle A\cdot 2R\cdot\sin\angle B\cdot\sin\angle C}{2R(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C)}=4R\cdot\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\sin\frac{\angle C}{2}$，则有 $d_1+d_2+d_3=R(\cos\frac{\angle BOC}{2}+\cos\frac{\angle AOC}{2}+\cos\frac{\angle AOB}{2})=R(\cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C)=R(1+4\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\sin\frac{\angle C}{2})=R(1+\frac{r}{R})=R+r$，即证.

性质 7 过△ABC 的外心 O 任作一直线与边 AB，AC（或其延长线）分别相交于 P，Q 两点，则 $\frac{AB}{AP}\cdot\sin 2\angle B+\frac{AC}{AQ}\cdot\sin 2\angle C=\sin 2\angle A+\sin 2\angle B+\sin 2\angle C$，

或 $\frac{BP}{AP}\cdot\sin 2\angle B+\frac{CQ}{AQ}\cdot\sin 2\angle C=\sin 2\angle A$.

证明 如图 13－3，延长 AO 交 BC 于 M，交外接圆于 K，延长 CO 交 AB 于 F，则

$$\frac{BM}{MC}=\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}}=\frac{AM\cdot 2R\cdot\sin\angle C\cdot\sin(90^\circ-\angle AKB)}{AM\cdot 2R\cdot\sin\angle B\cdot\sin(90^\circ-\angle AKC)}=\frac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B}.$$

同理，$\frac{AF}{FB}=\frac{\sin 2\angle B}{\sin 2\angle A}$.

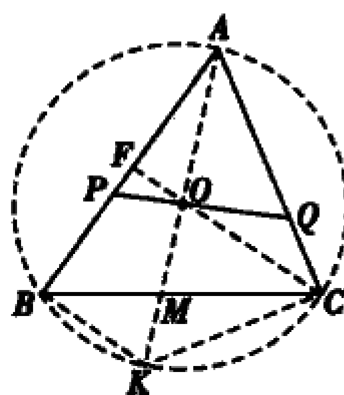


图 13－3

对△ABM 及截线 FOC 应用梅勒劳斯定理，得 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CM}\cdot\frac{MO}{OA}=1$.

而 $\frac{BC}{MC}=\frac{BM+MC}{MC}=\frac{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B}$，

于是 $\dfrac{MO}{OA}=\dfrac{MC}{BC}\cdot\dfrac{BF}{FA}=\dfrac{\sin 2\angle A}{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}$.

从而 $\dfrac{AO}{AM}=\dfrac{AO}{AO+OM}=\dfrac{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}{\sin 2\angle A+\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}$.

又 $\dfrac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABM}}=\dfrac{AP\cdot AO}{AB\cdot AM},\dfrac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}$,

$\dfrac{S_{\triangle AQO}}{S_{\triangle ACM}}=\dfrac{AQ\cdot AO}{AC\cdot AM},\dfrac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{MC}{BC}=\dfrac{\sin 2\angle B}{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}$.

由 $\dfrac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}=\dfrac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABM}}\cdot\dfrac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}}+\dfrac{S_{\triangle AQO}}{S_{\triangle ACM}}\cdot\dfrac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AP\cdot AO}{AB\cdot AM}\cdot\dfrac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}+$ $\dfrac{AQ\cdot AO}{AC\cdot AM}\cdot\dfrac{\sin 2\angle B}{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}$,即证得结论.

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 13-4,在$\triangle ABC$中,O是$\triangle ABC$的外心,I是其内心.若$\angle BOC=\angle BIC$,求$\angle A$.

解 因I为其内心,则

$\angle IBC+\angle ICB=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$,

故 $\angle BIC=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle A$.

又O是其外心,有$\angle BOC=2\angle A$,从而

$90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle A=2\angle A$,即$\angle A=60^\circ$为所求.

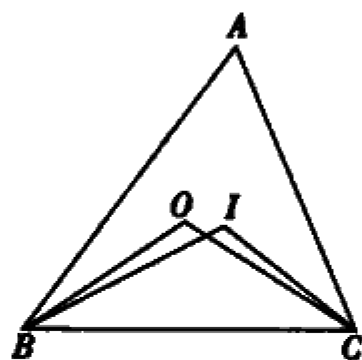


图 13-4

注 若O,I为$\triangle ABC$的外心,内心,且$\angle A=60^\circ$,则有$\angle BOC=\angle BIC$,且B,C,I,O共圆.这亦可以视为三角形外心(或内心)的一条特殊性质.

例 2 如图 13-5,在等腰$\triangle ABC$中,$AB=BC$,CD是它的角平分线,O是它的外心,过O作CD的垂线交BC于E,再过E作CD的平行线交AB于F.证明:$BE=FD$.

(第 22 届俄罗斯奥林匹克决赛题)

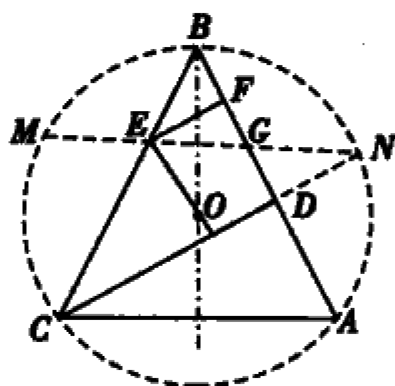


图 13-5

证明 延长CD交$\odot O$于N,作直线EN交$\odot O$于M,交AB于G.由OE垂直平分弦CN,知$\angle MNC=\angle ECN=\angle NCA$,即有$MN/\!/AC$.

又$\angle OEC=\angle OEN$,即知弦BC和MN关于直线OE对称,从而有$BE=ME$.

又直线 OB 为 $\triangle ABC$ 和直线 MN 的公共对称轴，知 $BE=BG$，$ME=GN$，从而 $BE=GN$.

欲证 $BE=DF$，须证 $BG=DF$，即 $BF=DG$. 由 $EF/\!/CN$，且 EF 平分 $\angle BEG$，故 $\dfrac{BF}{FG}=\dfrac{BE}{EG}=\dfrac{GN}{EG}=\dfrac{DG}{FG}$，于是 $BF=DG$，由此即证得结论.

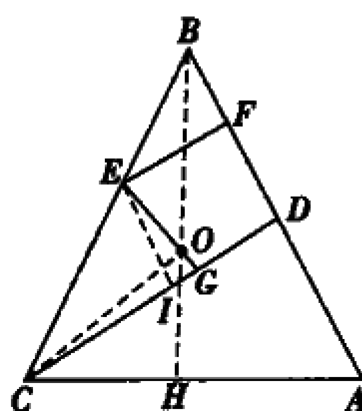


图 13－6

注 此例利用内心性质，可另证如下：

如图 13－6，作 $BO\perp AC$ 于 H，则 BO 与 CD 交于内心 I. 又令 $OE\perp CD$ 于 G，则 G,O,H,C 四点共圆. 于是 $\angle GOH=\angle DCH=\angle BCD$. 从而 O,I,E,C 四点共圆，故 $\angle OBC=\angle OCB=\angle BIE$，即 $IE=BE$. 又 $\angle IEC=2\angle OBC=\angle ABC$，有 $IE/\!/BD$.

又 $EF/\!/ID$，即四边形 $IDFE$ 为平行四边形，故

$DF=IE=BE$.

例 3 如图 13－7，设 AD 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 的平分线，O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，O_1 是 $\triangle ABD$ 的外接圆的圆心，O_2 是 $\triangle ADC$ 的外接圆圆心. 求证：$OO_1=OO_2$.

（1990 年全国高中联赛题）

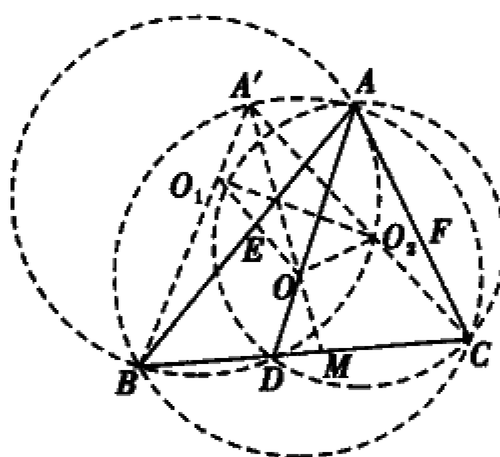


图 13－7

证明 设 OO_1，OO_2（或其延长线）分别交 AB，AC 于 E，F，则易证 A,E,O,F 四点共圆.

连 O_1O_2，O_1A，O_1D，O_2A，O_2D，则 O_1O_2 垂直平分 AD，故有 $\angle AO_1O_2=\angle ABC$，$\angle AO_2O_1=\angle ACB$.

于是 $\triangle AO_1O_2\backsim\triangle ABC$.

连 O_1B，O_2C，必有 $\triangle AO_1B\backsim\triangle AO_2C$，故 $\angle ABO_1=\angle ACO_2$. 从而延长 BO_1，CO_2 必交 $\odot O$ 于一点 A'，显然 $\angle BA'C=\angle BAC$，注意到 $\angle BAC+\angle O_1OO_2=180°$，知 A'，O_1，O，O_2 四点共圆.

又 AD 平分 $\angle BAC$，即 $\angle BAD=\angle DAC$，从而 $\angle BO_1D=\angle DO_2C$，故 $\angle O_1BD=\angle O_2CD$，即 $\triangle A'BC$ 为等腰三角形. 连 $A'O$ 并延长交 BC 于 M，易证 $A'M$ 垂直平分 BC，$\angle O_1A'O=\angle O_2A'O$，故 $O_1O=OO_2$.

注 注意到连心线与公共弦垂直，则有如下简捷证法：设 $O_1O_2\perp AD$ 于 K，由 A，K，O_2，F 四点共圆，有 $\angle O_1O_2O=\angle KAF=\dfrac{1}{2}\angle A$；由 A,K,E,O_1 四点共圆，有 $\angle O_2O_1O=\angle EAK=\dfrac{1}{2}\angle A$，故 $\triangle O_1OO_2$ 为等腰三角形，从而有 $OO_1=OO_2$.

例4 如图 13－8，设$\triangle ABC$的外心为O，若O关于BC，CA，AB的对称点分别为A'，B'，C'，求证：(1)AA'，BB'，CC'交于一点；(2)若BC，CA，AB的中点分别为A_1，B_1，C_1，则P为$\triangle A_1B_1C_1$的外心.

证明 (1)由四边形$OBA'C$的对角线互相平分，知$A'C \mathrel{\underline{\parallel}} BO$.

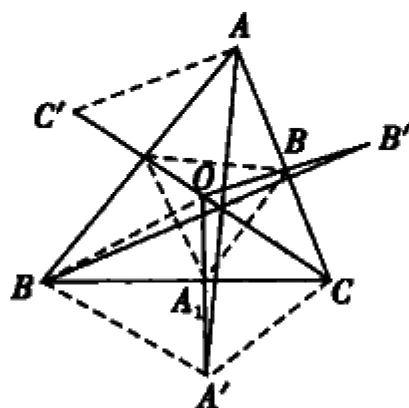


图 13－8

同理，$C'A \mathrel{\underline{\parallel}} BO$，则$A'C \mathrel{\underline{\parallel}} C'A$，即四边形$AC'A'C$为平行四边形，故知$AA'$，$CC'$与它们的中点$P$相交.

同理，BB'也过点P，即AA'，BB'，CC'交于一点P.

(2)由于A'，O关于BC对称，易知$\angle BCA' = \angle BCD = 90° - \angle A$，且$A'C = OC = R$($\triangle ABC$的外接圆半径).设$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，在$\triangle ACA'$中，由

$$\begin{aligned} AA'^2 &= R^2 + b^2 - 2Rb\cdot\cos(\angle C + 90° - \angle A) = R^2 + b^2 - 2Rb\cdot\sin(\angle A - \angle C) \\ &= R^2 + b^2 - 2Rb(\sin\angle A\cdot\cos\angle C - \cos\angle A\cdot\sin\angle C) \\ &= R^2 + b^2 - ab\cdot\cos\angle C + bc\cdot\cos\angle A \\ &= R^2 + b^2 - ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = R^2 + b^2 + c^2 - a^2. \end{aligned}$$

同理，$BB'^2 = R^2 + a^2 + c^2 - b^2$，$CC'^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2$.

从而 $PB^2 = \frac{1}{4}(R^2 + a^2 + c^2 - b^2)$，$PC^2 = \frac{1}{4}(R^2 + a^2 + b^2 - c^2)$.

注意到三角形的中线长公式，有$PA_1^2 = \frac{1}{4}[2(PB^2 + PC^2) - BC^2] = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}(R^2 + a^2 + b^2 - c^2 + R^2 + a^2 + b^2 - c^2) - a^2] = \frac{1}{4}R^2$.

同理，$PB_1^2 = \frac{1}{4}R^2$，$PC_1^2 = \frac{1}{4}R^2$，故P为$\triangle A_1B_1C_1$的外心.

注 对于第(2)问，充分运用中点的性质可另证如下：由于P为AA'的中点，B_1为AC的中点，则$PB_1 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A'C$.同理，$PC_1 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A'B$.而$A'C = A'B$，从而$PB_1 = PC_1$.同理，$PA_1 = PB_1$.故$P$为$\triangle A_1B_1C_1$的外心.

例5 如图 13－9，在$\triangle ABC$的边AB，BC，CA上分别取点P，Q，S.证明：以$\triangle APS$，$\triangle BQP$，$\triangle CSQ$的外心为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似.

证明 设O_1，O_2，O_3分别为$\triangle APS$，$\triangle BQP$，$\triangle CSQ$的外心，作出六边形$O_1PO_2QO_3S$.

由$\angle PO_1S = 2\angle A$，$\angle QO_2P = 2\angle B$，$\angle SO_3Q = 2\angle C$，即知$\angle PO_1S + \angle QO_2P +$

$\angle SO_3Q=360°$，从而$\angle O_1PO_2+\angle O_2QO_3+\angle O_3SO_1=360°$.

将$\triangle O_2QO_3$绕O_3点旋转到$\triangle KSO_3$处，易知$\triangle KSO_1\cong\triangle O_2PO_1$，同时可知$\triangle O_1O_2O_3\cong\triangle O_1KO_3$，从而$\angle O_2O_1O_3=\angle KO_1O_3=\frac{1}{2}\angle O_2O_1K=\frac{1}{2}(\angle O_2O_1S+\angle SO_1K)=\frac{1}{2}(\angle O_2O_1S+\angle PO_1O_2)=\frac{1}{2}\angle PO_1S=\angle A$.同理$\angle O_1O_2O_3=\angle B$，故$\triangle O_1O_2O_3\backsim\triangle ABC$.

图 13－9

例 6 如图 13－10，在等腰$\triangle ABC$中，P为底边BC上任意一点，过P作两腰的平行线分别与AB，AC相交于Q，R两点，又P'是关于直线RQ的对称点.证明：P'在$\triangle ABC$的外接圆上.

（1950年匈牙利竞赛题）

证明 连$P'B$，$P'C$，$P'Q$，$P'P$.由$PQ/\!/AC$，知$\angle QPB=\angle ACB$.

又$\angle ACB=\angle ABC$，有$\angle QPB=\angle QBC$，故$QP=QB$.

因P，P'关于RQ对称，则$QP=QP'$，故$P'Q=QP=QB$，即Q为$\triangle P'BP$的外心.

图 13－10

同理，$P'R=PR=RC$，即R为$\triangle P'PC$的外心.

于是，$\angle P'QB=2\angle P'PB=2(180°-\angle P'PC)=360°-\angle P'PC-\angle P'PQ-\angle RPC$
$=360°-\angle P'PC-\angle PP'R-\angle PCR=\angle P'RC$.

又$QP'=QB$，$RP'=RC$，即$\frac{QP'}{QB}=\frac{RP'}{RC}=1$，从而$\triangle P'QB\backsim\triangle P'RC$，即$\angle P'BA=\angle P'CA$，故$P'$，$B$，$C$，$A$四点共圆.

【解题思维策略分析】

1. 抓住外心条件，充分运用外心性质

例 7 锐角$\triangle ABC$的外心为O，线段OA，BC的中点分别为M，N，$\angle ABC=4\angle OMN$，$\angle ACB=6\angle OMN$.求$\angle OMN$.

（1995年日本奥林匹克试题）

解 如图 13－11，设$\angle OMN=\theta$，则$\angle ABC=4\theta$，$\angle ACB=6\theta$，$\angle BAC=180°-(4\theta+6\theta)=180°-10\theta$.

又$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BAC=180°-10\theta$，

图 13－11

$\angle MOC=\angle AOC=2\angle ABC=8\theta$.

从而$\angle MON=8\theta+(180^\circ-10\theta)=180^\circ-2\theta$，$\angle ONM=180^\circ-(180^\circ-2\theta+\theta)=\theta=\angle OMN$，即$\triangle OMN$为等腰三角形，故$ON=OM=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OC$.

又$\angle ONC=90^\circ$，则$\angle NOC=60^\circ$.

而$\angle NOC=180^\circ-10\theta$，故$\angle OMN=\theta=12^\circ$.

例8 如图13－12，设$\triangle ABC$是锐角三角形，外接圆圆心为O，半径为R.AO交$\triangle BOC$的外接圆于点A'，BO交$\triangle COA$的外接圆于点B'，CO交$\triangle AOB$的外接圆于点C'.证明：$OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$，并指出在什么条件下等号成立. （IMO－37预选题）

证明 作$\triangle BOC$的外接圆直径OD，连$A'D$，CD，则$\angle OA'D=\angle OCD=90^\circ$，从而

$$OA'=OD\cdot\cos\angle A'OD=R\cdot\frac{\cos\angle A'OD}{\cos\angle COD}.$$

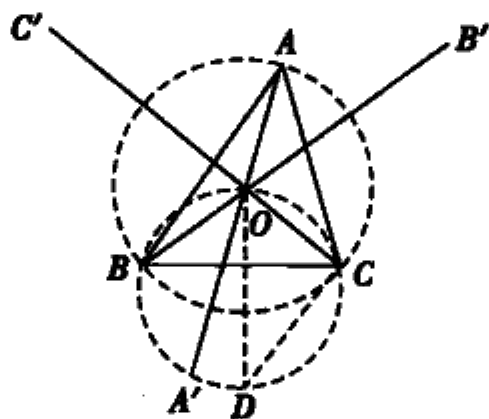


图13－12

易知$OD\perp BC$，于是$\angle COD=\angle A$，$\angle A'OD=180^\circ-\angle COD-\angle AOC=180^\circ-\angle A-2\angle B=\angle C-\angle B$，即$OA'=R\cdot\frac{\cos(\angle C-\angle B)}{\cos\angle A}$.

同理，$OB'=R\cdot\frac{\cos(\angle A-\angle C)}{\cos\angle B}$，$OC'=R\cdot\frac{\cos(\angle A-\angle B)}{\cos\angle C}$.

于是 $OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos(\angle A-\angle B)}{\cos\angle C}\cdot\frac{\cos(\angle B-\angle C)}{\cos\angle A}\cdot\frac{\cos(\angle C-\angle A)}{\cos\angle B}\geqslant 8. \quad ①$$

而$\frac{\cos(\angle A-\angle B)}{\cos\angle C}=-\frac{\cos\angle A\cdot\cos\angle B+\sin\angle A\cdot\sin\angle B}{\cos\angle A\cdot\cos\angle B+\sin\angle A\cdot\sin\angle B}=\frac{1+\cot\angle A\cdot\cot\angle B}{1-\cot A\cdot\cot\angle B}$.

若令$x=\cot\angle A\cdot\cot\angle B$，$y=\cot\angle B\cdot\cot\angle C$，$z=\cot\angle C\cdot\cot\angle A$，则对任意三角形有 $x+y+z=1$.而对于锐角三角形，x,y,z均为正数，$\frac{1+x}{1-x}=\frac{x+y+z+x}{x+y+z-x}=\frac{(x+y)+(z+x)}{y+z}\geqslant 2\cdot\frac{\sqrt{(x+y)(x+z)}}{y+z}$.同理，$\frac{1+y}{1-y}\geqslant 2\cdot\frac{\sqrt{(x+y)(y+z)}}{x+z}$，$\frac{1+z}{1-z}\geqslant 2\cdot\frac{\sqrt{(x+z)(y+z)}}{x+y}$.于是①式得证，故原结论获证.

例9 如图13－13，设锐角$\triangle ABC$的外心为O，从A作BC的高，垂足为P，且$\angle BCA\geqslant\angle ABC+30^\circ$.证明：$\angle CAB+\angle COP<90^\circ$. （IMO－42试题）

证明 令$\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，$\angle COP=\delta$.设K，Q为点A，P关于BC的垂直平分线的对称点，R为$\triangle ABC$的外接圆半径，则$OA=OB=OC=OK=R$.

由于 $KQPA$ 为矩形，则 $QP=KA$，及 $\angle AOK=\angle AOB-\angle KOB=\angle AOB-\angle AOC=2\gamma-2\beta\geqslant 60^\circ$，由此及 $OA=OK=R$ 得 $KA\geqslant R\cdot QP\geqslant R$.

利用三角形的边关系不等式，有

$OP+R=OQ+OC>QC=QP+PC\geqslant R+PC$，故 $OP>PC$.

在 $\triangle COP$ 中，$\angle PCO>\delta$，由 $\alpha=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}(180^\circ-2\angle PCO)=90^\circ-\angle PCO$，得 $\alpha+\delta<90^\circ$，由此即证.

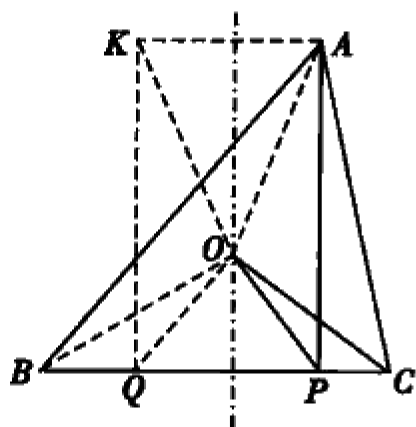


图 13－13

例 10 如图 13－14，设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆 w 的圆心为 O，经过 A,O,C 三点的圆 w_1 的圆心为 K，且与边 AB 和 BC 分别相交于点 M 和 N，现知点 L 与 K 关于直线 MN 对称．证明：$BL\perp AC$.

（第 26 届俄罗斯奥林匹克题）

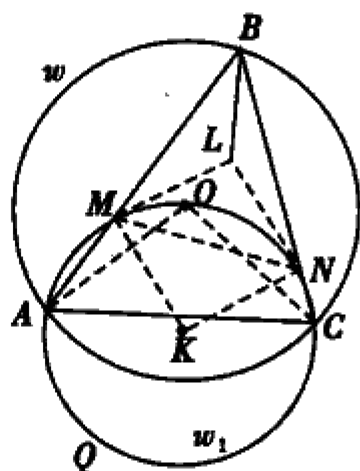


图 13－14

证明 设 $\angle ABC=\beta\leqslant 45^\circ$，$\angle BAC=\alpha$，则 $\angle AOC=2\beta$，从而在圆 w_1 上不包含点 O 的弧$\overset{\frown}{AQC}$的变量等于 4β.

由于 $\angle ABC\overset{m}{=\!=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AQC}-\overset{\frown}{MN})$，即 $\beta\overset{m}{=\!=}\frac{1}{2}(4\beta-\overset{\frown}{MN})$，从而 $\overset{\frown}{MN}\overset{m}{=\!=}2\beta$，即圆心角 $\angle MKN=2\beta$.

由 L 与 K 关于 MN 对称，得 $\angle MLN=2\beta$，$ML=LN$．注意到 $\angle MBN=\beta$，推知 L 是 $\triangle MBN$ 的外心.

又由于四边形 $AMNC$ 内接于圆 w_1，故知 $\angle BNM=\angle BAC=\alpha$．在 $\triangle MBN$ 的外接圆中，$\angle BLM$ 为圆心角，所以 $\angle BLM=2\alpha$．在 $\triangle MBL$ 中，$\angle MBL=\angle LMB=\frac{1}{2}(\pi-2\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha$，由于 $\angle ABL+\angle BAC=(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\alpha=\frac{\pi}{2}$，所以 $BL\perp BC$.

对 $\beta>45^\circ$的几种情形，可类似证明（略）.

2．揭示外心条件，灵活运用外心性质

例 11 如图 13－15，非等腰 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心为 O，其与 AB，BC 和 CA 分别相切于点 C_1，A_1 和 B_1．AA_1，BB_1 交圆于 A_2，B_2．$\triangle A_1B_1C_1$ 的 $\angle C_1A_1B_1$ 和 $\angle C_1B_1A_1$ 的平分线分别交 B_1C_1 和 A_1C_1 于点 A_3，B_3．证明：(1) A_2A_3 是 $\angle B_1A_2C_1$ 的平分线；(2) 如果 P 和 Q 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 的两外接圆交点，则点 O 在直线 PQ 上.

（2001 年第 50 届保加利亚奥林匹克题）

证明 (1) 连 C_1A_2，由 $\angle C_1AA_2=\angle A_1AC_1$，$\angle AC_1A_2=\angle AA_1C_1$，知 $\triangle AC_1A_2\backsim\triangle AA_1C_1$，即有 $\frac{C_1A_2}{A_1C_1}=\frac{AA_2}{AC_1}$.

同理,连 A_2B_1,由$\triangle AA_2B_1\backsim\triangle AB_1A_1$,有$\dfrac{A_2B_1}{B_1A_1}=\dfrac{AA_2}{AB_1}$.

由 $AC_1=AB_1$,有$\dfrac{C_1A_2}{A_1C_1}=\dfrac{A_2B_1}{B_1A_1}$,即有

$\dfrac{C_1A_2}{B_1A_2}=\dfrac{A_1C_1}{B_1A_1}=\dfrac{C_1A_3}{B_1A_3}$,

于是,A_2A_3 为$\angle B_1A_2C_1$ 的角平分线.

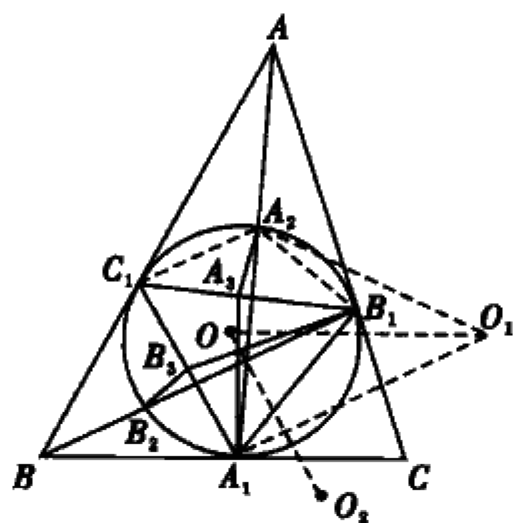


图 13-15

(2)设$\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle B_1B_2B_3$ 的外接圆圆心分别为 O_1,O_2,连 OO_1,OA_2,O_1A_2,OA_1,O_1A_1,于是 $OO_1\perp A_1A_2$.

由于$\angle A_1A_3A_2=\angle A_1C_1A_2+\angle C_1A_2A_3+\angle C_1A_1A_3=\angle A_1C_1A_2=\dfrac{1}{2}(\angle C_1A_2B_1+\angle C_1A_1B_1)=\angle A_1C_1A_2+90°$,所以有

$$\angle A_2O_1O=\frac{1}{2}\angle A_2O_1A_1=180°-\angle A_1A_3A_2=90°-\angle A_1C_1A_2.$$

又$\angle A_1A_2O=90°-\angle A_2OO_1=90°-\dfrac{1}{2}\angle A_2OA_1=90°-\angle A_1C_1A_2$,

从而 $\angle A_2O_1O=\angle A_1A_2O$,因此$\angle OA_2O_1=90°$.

故点 O 对圆 O_1 的幂为 $OO_1^2-O_1A_2^2=OA_2^2$.

同理,点 O 对圆 O_2 的幂为 $OO_2^2-O_2A_1^2=OA_1^2$.

而 $OA_1=OA_2$,因此点 O 对这两圆的幂相等,故点 O 在两圆的根轴 PQ 上.

例 12 如图 13-16,设 O,I 分别是$\triangle ABC$ 的外心和内心,AD 是 BC 上的高,I 在线段 OD 上.求证:$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径.

(1998 年全国高中联赛题)

证明 设 DO 的延长线与边 AC 相交于 E,则由内心、外心的性质,有

$\dfrac{CB}{CD}\sin\angle B+\dfrac{CA}{CE}\sin\angle A=\sin\angle C+\sin\angle B+\sin\angle A$,

$\dfrac{CB}{CD}\sin2\angle B+\dfrac{CA}{CE}\sin2\angle A=\sin2\angle C+\sin2\angle B+\sin2\angle A$.

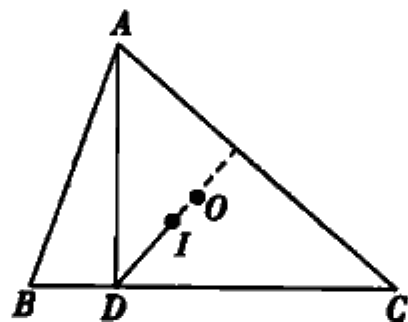


图 13-16

上述两式可变形为(右边的部分项移到左边后整理)

$\dfrac{BD}{CD}\sin\angle B+\dfrac{AE}{CE}\sin\angle A=\sin\angle C$,$\dfrac{BD}{CD}\sin2\angle B+\dfrac{AE}{CE}\sin2\angle A=\sin2\angle C$.

又可变形为

$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle A}+\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{\sin\angle C}{\sin\angle A}$,$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{\sin2\angle B}{\sin2\angle A}+\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{\sin2\angle C}{\sin2\angle A}$.

上述两式相减，得$\frac{BD}{DC}\left(\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A}-\frac{\sin2\angle B}{\sin2\angle A}\right)=\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A}-\frac{\sin2\angle C}{\sin2\angle A}$. ①

由 $AD\perp BC$，有$\frac{BD}{DC}=\frac{\cos\angle B\cdot AB}{\cos\angle C\cdot AC}=\frac{\cos\angle B\cdot\sin\angle C}{\cos\angle C\cdot\sin\angle B}$. ②

将②式代入①式，整理得 $\cos\angle A=\cos\angle B+\cos\angle C$.

亦即 $1-2\sin^2\frac{1}{2}\angle A=2\cos\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)\cdot\cos\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

从而

$$\begin{aligned}1&=2\sin\frac{1}{2}\angle A\cdot\left(\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C+\sin\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C\right)+2\sin^2\frac{1}{2}\angle A\\&=2\sin\frac{1}{2}\angle A\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C+2\sin\frac{1}{2}\angle A\left(\sin\frac{1}{2}\angle A+\sin\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C\right)\\&=4\sin\frac{1}{2}\angle A\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C.\end{aligned}$$

设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，与 BC 边相切的旁切圆半径为 r_a，$\triangle ABC$ 的面积为 $S_\triangle$，则 $S_\triangle=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$，从而

$$\begin{aligned}r_a&=\frac{bc\cdot\sin\angle A}{b+c-a}=2R\cdot\frac{\sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\sin\angle C}{\sin\angle B+\sin\angle C-\sin\angle A}\\&=\frac{16R\sin\frac{1}{2}\angle A\cdot\cos\frac{1}{2}\angle A\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\sin\angle C\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C}{4\sin\frac{1}{2}\angle B\cdot\sin\frac{1}{2}\angle C\cdot\cos\frac{1}{2}\angle A}\\&=4R\sin\frac{1}{2}\angle A\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B\cdot\cos\frac{1}{2}\angle C=R.\end{aligned}$$

注 孙哲先生撰文(《中学数学》2000 年第 4 期 P48)指出：这道联赛题与下面的第 38 届 IMO 预选题是等价的.

在锐角$\triangle ABC$ 中，AD，BE 是它的两条高，AP，BQ 是两个角平分线，I，O 分别是它的内心和外心. 证明：点 D，E，I 共线当且仅当 P，Q，O 共线.

【模拟实战】

习题 A

1. 设锐角$\triangle ABC$ 的外心为 O，过 A、O、B 三点的圆分别与直线 BC、CA 交于 P、Q. 求

证：$CO\perp PQ$.

2. 设$\triangle ABC$的外接圆O上的劣弧$\overset{\frown}{BC}$的中点为K，优弧$\overset{\frown}{BC}$的中点为S，线段AK与BC边交于D，点E、F分别为$\triangle ACD$、$\triangle ABD$的外心.试证：A、E、O、F、S五点共圆.

3. 设O为$\triangle ABC$的外心，射线AO、BO、CO分别与$\triangle ABC$的外接圆交于A'、B'、C'.求证：$S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}=S_{\triangle ABC}$.

4. 设I为$\triangle ABC$的内心，$\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心分别为O_A、O_B、O_C.求证：$\triangle O_AO_BO_C$与$\triangle ABC$有公共的外心.

5. 设O、I为不等边$\triangle ABC$的外心和内心，$\angle A$的外角平分线交$\odot O$于D.若$OI=\frac{1}{2}AD$，求证：三边长AB，BC，CA成等差数列.

6. 已知O是$\triangle ABC$的外心，AO或AO的延长线交BC于点M.求证：$\frac{BM}{MC}=\frac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B}$.

7. 设O，H分别是锐角$\triangle ABC$的外心与垂心，点D在AB上，$AD=AH$，点E在AC上，$AE=AO$.证明：$DE=AE$.

8. 设$ABCD$是一个梯形，$AD\parallel BC$，E是AB上任意一点，那么$\triangle AED$，$\triangle BEC$的外心O_1，O_2之间的距离是一个定值，且$O_1O_2=\frac{DC}{2\sin\angle B}$.

9. 设$\triangle ABC$的外接圆O上的劣弧$\overset{\frown}{BC}$的中点为R，优弧$\overset{\frown}{BC}$的中点为S，线段AR与边BC交于D.点E，F分别为$\triangle ADC$，$\triangle ABD$的外心.试证A，E，O，F，S五点共圆.

10. 设O为$\triangle ABC$的外心，连AO并延长交$\triangle ABC$的外接圆于D，BC的延长线与过D点的$\odot O$的切线l交于P，直线PO交AB于N，交AC于M.求证：$OM=ON$.

11. 平行四边形$ABCD$中，E为AD上任一点，过E作EF与AB的延长线交于F，连CE，CF，设$\triangle CDE$和$\triangle EAF$的外心分别为O_1，O_2，$\triangle CBF$的外接圆半径为R.求证：$O_1O_2=R$.

12. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，Q在BC边上，作$QM\parallel CA$交AB于M，$QN\parallel BA$交AC于N，又作Q关于直线MN的对称点.求证：(1)$\frac{PB}{PC}=\frac{BQ}{QC}$；(2)$\triangle PBC\backsim\triangle ANM$.

13. 在四边形$ABCD$中，$AB=BC=AC=AD$，$AH\perp CD$于H，$KC\perp BC$交AH于H.求证：$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AK\cdot BD$.

14. 已知AA'，BB'，CC'是锐角$\triangle ABC$的三条高，过A作直线$l_1\perp B'C'$，过B作直线$l_2\perp C'A'$，过C作直线$l_3\perp A'B'$.试证明：l_1，l_2，l_3相交于一点.

习题 B

1. 三个全等的圆有一个公共点 K,并且都在$\triangle ABC$内,每个圆与$\triangle ABC$的两条边相切.证明:$\triangle ABC$的内心,外心 O 与 K 共线. (IMO-22 试题)
2. $\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 P,Q,$\odot O_1$ 的弦 PA 与$\odot O_2$ 相切,$\odot O_2$ 的弦 PB 与$\odot O_1$ 相切.设$\triangle PAB$ 的外心为 O,求证:$OQ\perp PQ$.
3. 试证:过圆内接四边形两对角线交点作任一边的垂线,必过以其对边为一边,以交点为一顶点的三角形的外心. (卜拉美古塔定理的推广)
4. 四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$,对角线 AC 与 BD 交于 P,设$\triangle ABP$,$\triangle BCP$,$\triangle CDP$ 和$\triangle DAP$ 的外心分别为 O_1,O_2,O_3,O_4.求证:OP,O_1O_3,O_2O_4 三线共点. (1990 年全国高中联赛题)
5. 在$\triangle ABC$中,$\angle B=2\angle C$,P 是形内一点,满足 $AP=AB$,$PB=PC$.求证:$\angle PAC=\frac{1}{3}\angle BAC$.
6. 试证:任意$\triangle ABC$的外心到三边的距离之和不小于内心到三边距离之和.
7. $\odot A$,$\odot B$ 相交于 C,D,且它们都与$\odot O$ 内切,切点为 M,N,射线 CD 交$\odot O$ 于 P,PM 交$\odot A$ 于 E,PN 交$\odot B$ 于 F.证明:EF 是$\odot A$ 和$\odot B$ 的公切线.
8. $\triangle ABC$ 为锐角三角形,求证:$\frac{\cos A}{\cos(B-C)}+\frac{\cos B}{\cos(C-A)}+\frac{\cos C}{\cos(A-B)}\geqslant\frac{3}{2}$.

第十四章　三角形重心的性质及应用

【基础知识】

三角形三条中线的交点称为三角形的重心.三角形的重心有下列有趣的性质:

性质1　设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,连 AG 并延长交 BC 于 D,则 D 为 BC 的中点,$AD^2=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)-\frac{1}{4}BC^2$,且 $AG:GD=2:1$.

性质2　设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,过 G 作 $DE\parallel BC$ 交 AB 于 D,交 AC 于 E,过 G 作 $PF\parallel AC$ 交 AB 于 P,交 BC 于 F,过 G 作 $KH\parallel AB$ 交 AC 于 K,交 BC 于 H,则

(1)$\frac{DE}{BC}=\frac{FP}{CA}=\frac{KH}{AB}=\frac{2}{3}$;(2)$\frac{DE}{BC}+\frac{FD}{CA}+\frac{KH}{AB}=2$.

性质3　设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,P 为 $\triangle ABC$ 内任一点,则

(1)$AP^2+BP^2+CP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2$;

(2)$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

证明　(1)设 D 为 BC 边上的中点,则对 $\triangle APG$ 和 $\triangle DPG$ 分别应用余弦定理,有 $AP^2=AG^2+PG^2-2AG\cdot PG\cdot\cos\angle AGP$,$PD^2=DG^2+PG^2-2DG\cdot PG\cdot\cos\angle DGP$,而 $AG=2DG$,$\cos\angle AGP=-\cos\angle DGP$,于是,有 $AP^2+2PD^2=AG^2+2DG^2+3PG^2$.

又 PD,DG 分别是 $\triangle BPC$ 的 BC 边,$\triangle BGC$ 的 BC 边上的中线,有 $2PD^2=PB^2+PC^2-\frac{1}{2}BC^2$,$2DG^2=BG^2+CG^2-\frac{1}{2}BC^2$,从而 $AP^2+BP^2+CP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2$.

(2)由性质1,有 $\frac{9}{4}AG^2=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)-\frac{1}{4}BC^2$,$\frac{9}{4}BG^2=\frac{1}{2}(AB^2+BC^2)-\frac{1}{4}AC^2$,$\frac{9}{4}CG^2=\frac{1}{2}(BC^2+AC^2)-\frac{1}{4}AB^2$,此三式相加,整理即得

$$AG^2+BG^2+CG^2=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

注　由此性质即得到三角形中的莱布尼兹公式:

$$AP^2+BP^2+CP^2=3PG^2+\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

性质 4 设 G 为$\triangle ABC$ 内一点，G 为$\triangle ABC$ 的重心的充要条件是下列条件之一：

(1) $S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCA}=S_{\triangle GAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$；

(2)当点 G 在三边 BC,CA,AB 上的射影分别为 D,E,F 时，$GD\cdot GE\cdot GF$ 值最大；

(3)当 AG,BG,CG 的延长线交三边于 D,E,F 时，$S_{\triangle AFG}=G_{\triangle BDG}=S_{\triangle CEG}$；

(4)过 G 的直线交 AB 于 P，交 AC 于 Q 时，$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$；

(5) $BC^2+3GA^2=CA^2+3GB^2=AB^2+3GC^2$.

证明 (1)必要性：延长 AG 交 BC 于 D，则 D 为 BC 中点，有 $S_{\triangle BDA}=S_{\triangle CDA}$，$S_{\triangle BDG}=S_{\triangle CDG}$，故 $S_{\triangle AGB}=S_{\triangle AGC}$.

同理，$S_{\triangle AGB}=S_{\triangle BGC}$，故 $S_{\triangle GAB}=S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCA}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

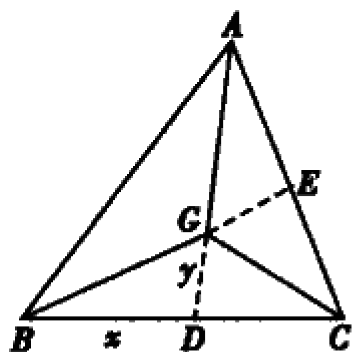


图 14－1

充分性：如图 14－1，令 G 为$\triangle ABC$ 内一点，连 AG 并延长交 BC 于 D，连 BG 并延长交 AC 于 E. 记 $S_{\triangle GAB}=S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCA}=S$，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$S_{\triangle BDG}=S_1$，$S_{\triangle CDG}=S_2$，$BD=x$，$DG=y$.

由 $S_1=\frac{1}{2}xy\cdot\sin\angle BDG$，$S_2=\frac{1}{2}(a-x)y\cdot\sin\angle CDG=\frac{1}{2}(a-x)\cdot y\cdot\sin(180°-\angle BDG)=\frac{1}{2}(a-x)\cdot y\cdot\sin\angle BDG$，故$\frac{S_2}{S_1}=\frac{a}{x}-1$.

即$\frac{a}{x}=\frac{S_2}{S_1}+1=\frac{S_2+S_1}{S_1}=\frac{S}{S_1}$，亦即 $S_1=\frac{S}{a}x$，$S_2=\frac{S}{a}(a-x)$.

又 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}cx\cdot\sin\angle B=S+S_1=\frac{S}{a}(a+x)$.

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}b(a-x)\cdot\sin\angle C=S+S_2=\frac{S}{a}(2a-x)$.

再由正弦定理，得$\frac{c\cdot\sin\angle B}{b\cdot\sin\angle C}=1$，于是，由上述两式，有$\frac{x}{a-x}=\frac{a+x}{2a-x}$，于是 $x=\frac{a}{2}$，即 AD 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线.

同理，可证 BE 为$\triangle ABC$ 边 AC 上的中线.

故 G 为$\triangle ABC$ 的重心.

注 由此性质即可推知三角形的重心到各边的垂线段长与边长成反比.

(2)充分性与必要性合起来证.

设三角形三内角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c. 记 $GD=x$，$GE=y$，$GF=z$，由 $S_{\triangle GBC}=\frac{1}{2}ax$，$S_{\triangle GAC}=\frac{1}{2}by$，$S_{\triangle GAB}=\frac{1}{2}cz$，知 $ax+by+cz=2S_{\triangle ABC}$为定值. 由三个正数

的平均值不等式，有 $ax\cdot by\cdot cz\leqslant(\frac{ax+by+cz}{3})^3=\frac{8}{27}S^3_{\triangle ABC}$，即 $xyz\leqslant\frac{8S^3_{\triangle ABC}}{27abc}$．此式当且仅当 $ax=by=cz$ 时，即 $S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GAC}=S_{\triangle GAB}$时等号取得，即 G 为$\triangle ABC$ 的重心时，结论成立．

(3)仅证充分性：如图 14－2，设 $S_{\triangle APF}=S_{\triangle BPD}=S_{\triangle CPE}=1$，$S_{\triangle APE}=x,S_{\triangle BPF}=y,S_{\triangle CPD}=z$．由$\frac{AP}{PD}=\frac{y+1}{1}=\frac{x+1}{z}$，$\frac{BP}{PE}=\frac{z+1}{1}=\frac{y+1}{x}$，$\frac{CP}{PF}=\frac{x+1}{1}=\frac{z+1}{y}$，有

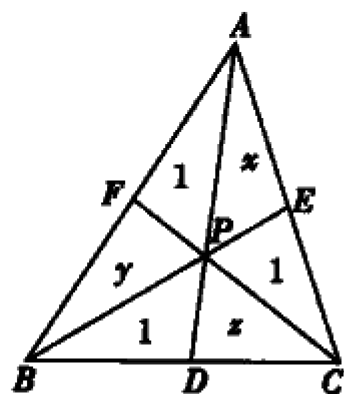


图 14－2

$yz+z=x+1$， ①　$zx+x=y+1$， ② $xy+y=z+1$． ③

由①－②得 $z(y-x)+z-x=x-y$，即

$z-x=(x-y)(1+z)$．④

同理 $x-y=(y-z)(1+x)$，⑤　$y-z=(z-x)(1+y)$．⑥

若 $x=y$ 代入④得 $z=x$．即有 $x=y=z$，再代入①得 $x=1$，故 $x=y=z=1$．

若 $x\neq y$，则 $y\neq x,z\neq x$，由④×⑤×⑥得$(1+x)(1+y)(1+z)=1$，⑦　而 x,y,z 为正数，则 $1+x>1,1+y>1,1+z>1$，等式⑦无正数解，故只有正数解 $x=y=z=1$，即证．

(4)必要性：如图 14－3，设 M 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上任一点，直线 PQ 分别交 AB，AM，AC 于 P，N，Q，连 PM，QM．

则 $$\frac{AM}{AN}=\frac{AN+NM}{AN}=\frac{S_{\triangle APQ}+S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle APQ}}=\frac{S_{\triangle APM}+S_{\triangle AQM}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}\cdot S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{\frac{AP}{AB}\cdot S_{\triangle ABM}+\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ACM}}{\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=\frac{AB}{AP}\cdot\frac{CM}{BC}+\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{BM}{BC}.$$

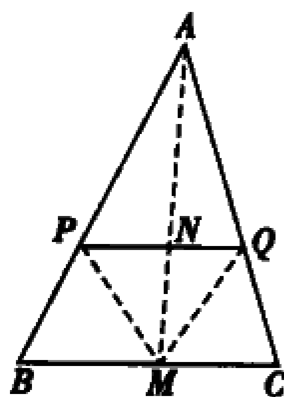


图 14－3

当 N 为$\triangle ABC$ 的重心时，M 为 BC 中点，有 $BM=MC$，且 $AM:AN=3:2$，由此即证得结论$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$．

充分性：设$\triangle ABC$ 的一边 AB 上有 P_1，P_2 两点，在另一边 AC 上有 Q_1，Q_2 两点．若$\frac{AB}{AP_1}+\frac{AC}{AQ_1}=\frac{AB}{AP_2}+\frac{AC}{AQ_2}=3$，则可证得 P_1Q_1 与 P_2Q_2 的交点 G 是$\triangle ABC$ 的重心．

事实上，如图 14－4，连 AG 并延长交 BC 于 M，过 B，C 分别作 AM 的平行线交直线 P_1Q_1，P_2Q_2 分别于 X_1，Y_1，X_2，Y_2，于是，由

$$3=\frac{AB}{AP_1}+\frac{AC}{AQ_1}=(1+\frac{BP_1}{AP_1})+(1+\frac{CQ_1}{AQ_1}),$$

有 $1=\frac{BP_1}{AP_1}+\frac{CQ_1}{AQ_1}=\frac{BX_1}{AG}+\frac{CY_1}{AG}$,即 $BX_1+CY_1=AG$.

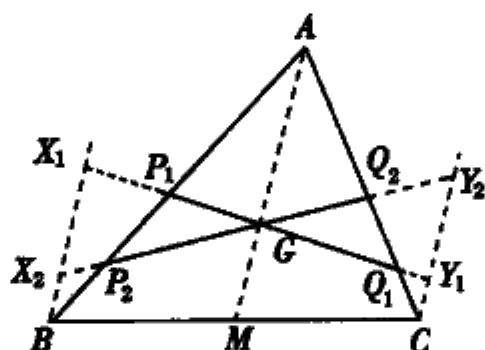


图 14-4

同理,$BX_2+CY_2=AG$.

从而 $BX_1+CY_1=BX_2+CY_2$,即 $BX_1-BX_2=CY_2-CY_1$.

亦即 $X_1X_2=Y_1Y_2$.

而 $X_1X_2 /\!/ Y_1Y_2$,从而易判断$\triangle GX_1X_2 \cong \triangle GY_1Y_2$.

所以 $GX_1=GY_1$,推知 $BM=MC$,即 AM 为$\triangle ABC$ 的BC 边上的中线,亦即 GM 为梯形 BCY_1X_1 的中位线.

此时 $BX_1+CY_1=2GM$.

由 $BX_1+CY_1=AG$,故 $AG=2GM$.由此即知 G 点为$\triangle ABC$ 之重心.即满足$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$ 的直线 PQ 过其重心.

(5)必要性:设 AD 为BC 边上的中线,G 为$\triangle ABC$ 的重心时,由中线长公式(即性质 1),有$(2AD)^2=2(AB^2+CA^2)-BC^2$,从而 $BC^2+3GA^2=BC^2+3(\frac{2}{3}AD)^2=BC^2+\frac{1}{3}(2AD)^2=\frac{2}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

同理,$CA^2+3GB^2=\frac{2}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)=AB^2+3GC^2$.

充分性:注意到结论,给定$\triangle ABC$ 后,若点 G 满足 $GA^2-GB^2=\frac{1}{3}(CA^2-BC^2)$为常数,则点 G 的轨迹是垂直于直线AB 的一条直线,并且这条直线过$\triangle ABC$ 的重心.事实上,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴建立坐标系,设 $G(x,y)$,则 $AG^2=x^2+y^2$,$BG^2=(x-c)^2+y^2$,其中 $AB=c$.因此,由 $GA^2-GB^2=2cx-c^2=\frac{1}{3}(CA^2-BC^2)$,得 G 的坐标为$(\frac{CA^2-BC^2+3AB^2}{6AB},y)$,即证得前一断言,后一断言可由性质 4(4)推证:由 AB 上的点 $P(\frac{CA^2-BC^2+3AB^2)}{6AB},0)$知 AP 的长度,可求得 AC 上的线段 AQ 的长度为 $\frac{AP}{\cos\angle BAC}=\frac{AC(CA^2-BC^2+3AB^2)}{3(AB^2+AC^2-BC^2)}$,故$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$,即证.

性质 5 设 P 是锐角$\triangle ABC$ 内一点,射线 AP、BP、CP 分别交边 BC、CA、AB 于点 D、E、F,则 P 为$\triangle ABC$ 重心的充分必要条件是$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

证明 充分性:如图 14-5,设$\angle PEF=\alpha$,$\angle CPE=\beta$,$\angle CPD=\gamma$,$\angle EBC=\alpha'$,并

分别用 A、B、C 表示$\angle BAC$、$\angle ABC$、$\angle ACB$.

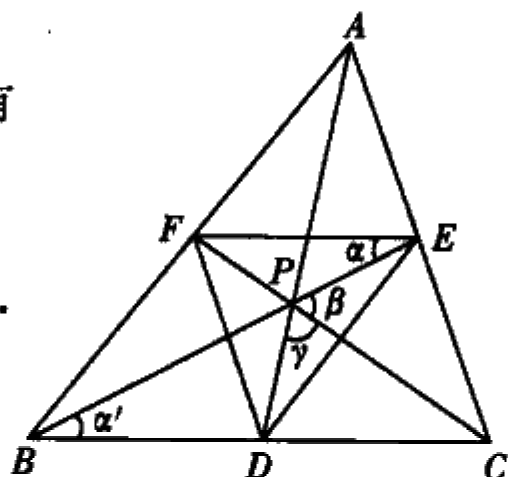


图 14－5

在$\triangle DEF$ 中，对点 P 应用角元形式的塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle PEF}{\sin\angle PED}\cdot\frac{\sin\angle PDE}{\sin\angle PDF}\cdot\frac{\sin\angle PFD}{\sin\angle PFE}=1,$$

即 $$\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\cdot\frac{\sin(\pi-\beta-\gamma-B+\alpha)}{\sin(A-\pi+\beta+\gamma+B-\alpha)}\cdot\frac{\sin(C-\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}=1.$$

在$\triangle ABC$ 中，对点 P 应用角元形式的塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}\cdot\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PCB}=1,$$

即 $$\frac{\sin\alpha'}{\sin(\beta-\alpha')}\cdot\frac{\sin(\pi-\beta-\gamma-B+\alpha')}{\sin(A-\pi+\beta+\gamma+B-\alpha')}\cdot\frac{\sin(C-\beta+\alpha')}{\sin(\beta-\alpha')}=1.$$

设 $$f(x)=\frac{\sin x}{\sin(\beta-x)}\cdot\frac{\sin(\pi-\beta-\gamma-B+x)}{\sin(A-\pi+\beta+\gamma+B-x)}\cdot\frac{\sin(C-\beta+x)}{\sin(\beta-x)}.$$

由 $x,B-x,\pi-\beta-\gamma-B+x,A-\pi+\beta+\gamma+B-x,C-\beta+x,\beta-x\in(0,\frac{\pi}{2})$，易知 $f(x)$递增，于是由 $f(\alpha)=f(\alpha')$可得 $\alpha=\alpha'$，所以 $EF/\!/BC$.

同理可得 $DF/\!/AC$，$DE/\!/AB$.从而有

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EC},\frac{AF}{FB}=\frac{DC}{BD},\frac{DC}{BD}=\frac{EC}{AE}.$$

所以 $AF=FB$，$BD=DC$，$EC=AE$.故 P 为$\triangle ABC$ 的重心.

必要性：显然（略）.故命题获证.

性质 6 三角形重心 G 到任一条直线 l 的距离，等于三个顶点到同一条直线的距离的代数和的三分之一.

事实上，若设三顶点 A，B，C，重心 G，BC 边的中点 M 到直线 l 的距离分别为 d_A，d_B，d_C，d_G，d_M，则 $d_G=d_A+\frac{2}{3}(d_M-d_G)$，$d_M=\frac{1}{2}(d_B+d_C)$.两式相加，即有

$$d_G=\frac{1}{3}(d_A+d_B+d_C).$$

注 由此性质可推知：设作一直线使三角形三个顶点到它的距离的代数和为零，则它通过重心.所以这种和为定值的直线与一个以 G 为圆心的圆相切.

性质 7 设 G 为$\triangle ABC$ 的重心，若 $AG^2+BG^2=CG^2$，则两中线 AD 和 BE 垂直；反之，若两中线 AD，BE 垂直，则 $AG^2+BG^2=CG^2$.

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 14－6，在$\triangle ABC$ 中，G 为重心，P 为形内一点，直线 PG 交直线 BC，

CA,AB 于 A',B',C'.求证:$\frac{A'P}{A'G}+\frac{B'P}{B'G}+\frac{C'P}{C'G}=3$.

证明 连 BG,GC,PB,PC,分别过 G,P 作 $GG'\perp BC$ 于 G',作 $PP'\perp BC$ 于 P',则 $PP'/\!/GG'$, $\frac{PP'}{GG'}=\frac{A'P}{A'G}$.

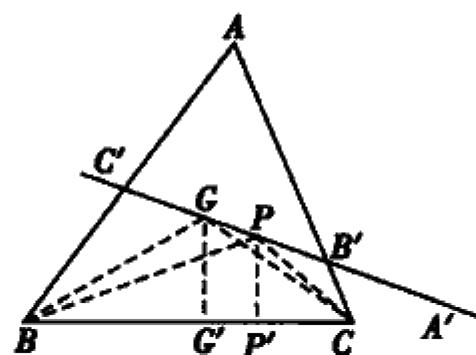


图 14-6

又 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle GBC}}=\frac{PP'}{GG'}$,有 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle GBC}}=\frac{A'P}{A'G}$.

同理 $\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle GCA}}=\frac{B'P}{B'G},\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle GAB}}=\frac{C'P}{C'G}$.

因 G 为重心,有 $S_{\triangle GAB}=S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCA}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.故

$$\frac{A'P}{A'G}+\frac{B'P}{B'G}+\frac{C'P}{C'G}=\frac{3S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{3S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{3S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=3.$$

例 2 如图 14-7,设△ABC 的重心为 G,AG,BG,CG 分别交对边于 D,E,F,交△ABC 的外接圆于 A',B',C'.求证:$\frac{A'D}{DA}+\frac{B'E}{EB}+\frac{C'F}{FC}\geqslant 1$.

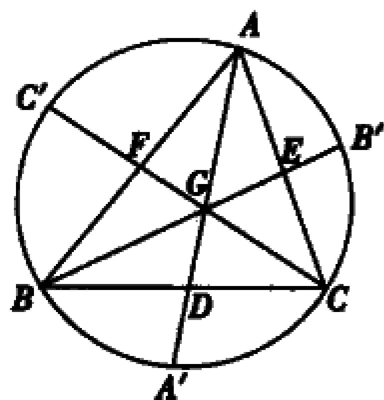


图 14-7

证明 设 $BC=a,CA=b,AB=c$,这三边上的中线分别记为 m_a,m_b,m_c,应用相交弦定理,有 $\frac{A'D}{DA}=\frac{A'D\cdot DA}{DA^2}=\frac{BD\cdot DC}{DA^2}=\frac{a^2}{4m_a^2}$.

同理 $\frac{B'E}{EB}=\frac{b^2}{4m_b^2},\frac{C'F}{FC}=\frac{C^2}{4m_c^2}$.

则所证不等式等价于 $\frac{a^2}{m_a^2}+\frac{b^2}{m_b^2}+\frac{c^2}{m_c^2}\geqslant 4$.

应用三角形中线公式 $m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$ 等三式,可求出 a^2,b^2,c^2,即 $a^2=\frac{4}{9}(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2)$ 等三式.将其代入上式左边,即证得结论成立.

注 由上即知还可有 $\sqrt{\frac{A'D}{DA}}+\sqrt{\frac{B'E}{EB}}+\sqrt{\frac{C'F}{FC}}\geqslant 3$.

例 3 如图 14-8,过△ABC 的重心 G 任作一条直线把这个三角形分成两部分.试证:这两部分面积之差不大于整个三角形面积的 $\frac{1}{9}$. (1979 年安徽省竞赛题)

证明 把三角形的每条边三等分,过每一分点作平行于其他两边的直线,这些直线把△ABC 分成 9 个面积相等的小三角形.内部那个交点正好是这个三角形的重心

G.过 G 的任一直线把三角形分成两部分.观察这两部分面积之差,显然不超过△BEF 的面积,即△ABC 面积的$\frac{1}{9}$.

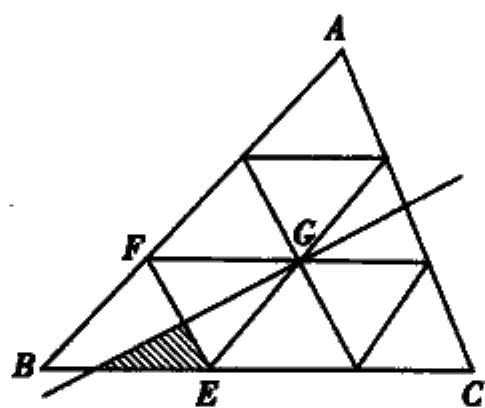


图 14-8

例 4 如图 14-9,已知 P 为▱$ABCD$ 内一点,O 为 AC 与 BD 的交点,M,N 分别为 PB,PC 的中点,Q 为 AN 与 DM 的交点.求证:(1) P,Q,O 三点在一直线上;(2) $PQ=2OQ$.

证明 连 PO,设 PO 与 AN,DM 分别交于点 Q',Q''.

在△PAC 中,$AO=OC$,$PN=NC$,则 Q' 为其重心,且 $PQ'=2OQ'$.

在△PDB 中,$DO=BO$,$BM=MP$,则 Q'' 为其重心,且 $PQ''=2OQ''$.

这样,$Q'\equiv Q''$,并且 Q',Q''就是 AN,DM 的交点 Q.故 P,Q,O 在一条直线上,且 $PQ=2OQ$.

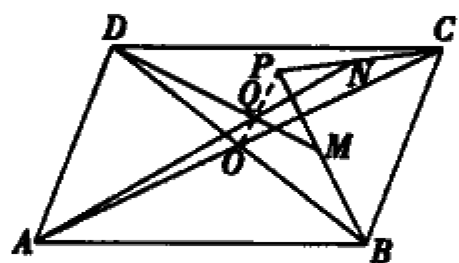


图 14-9

例 5 如图 14-10,已知 $CA=AB=BD$,AB 为⊙O 的直径,CT 切⊙O 于 P.求证:$\angle APC=\angle DPT$.

证明 连 PO 并延长交⊙O 于 E,则 $PE\perp PC$.连 EC,ED,并延长 PA 交 CE 于 F.

在 Rt△CPE 中,CO 为 PE 边上的中线,且 $CA=2AO$,即知 A 为△CPE 的重心,则 PF 为 CE 边上的中线,从而 $CF=PF$,$\angle FCP=\angle FPC$.

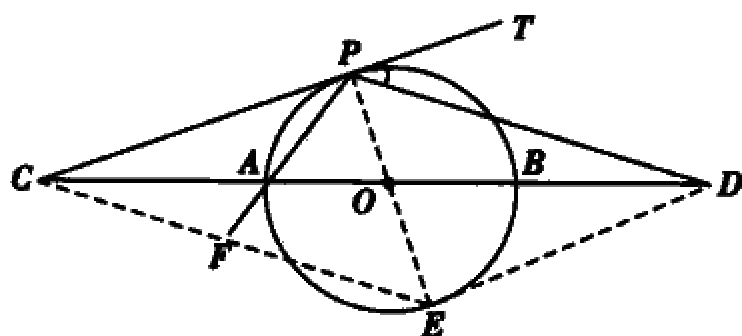


图 14-10

又 PE 与 CD 互相平分,则 $CPDE$ 为平行四边形,即有$\angle FCP=\angle DPT$.故$\angle CPA=\angle FCP=\angle DPT$.

例 6 试证:以锐角三角形各边为直径作圆,从相对顶点作切线,得到的六个切点共圆.

证明 如图 14-11,设△ABC 的三边分别为 a,b,c,⊙O 是以 $BC=a$ 为直径的圆,AT 切⊙O 于 T 点.

连 AO,在 AO 上取点 G 使 $AG=2GO$,则 G 为△ABC 的重心.连 OT,GT,由 $AO=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$,$TG^2=OT^2+OG^2-2OT\cdot OG\cdot\cos\angle TOA$ 及 $\cos\angle TOA=\frac{OT}{OA}$,$OT=\frac{1}{2}a$,$OG=\frac{1}{3}OA$,有 $TG^2=\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)$为定值.

同理,其他五个切点如 T 等到重心 G 的距离的平方均为$\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)$,由此即

证.

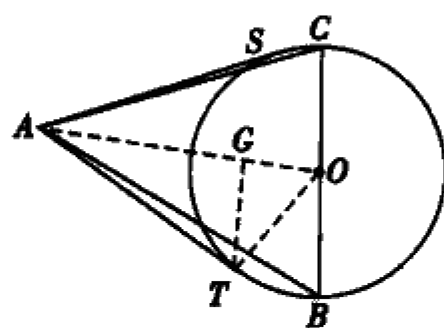


图 14 - 11

例 7 如图 14 - 12, AD, BE, CF 是$\triangle ABC$ 的三条中线, P 是任意一点. 证明:在$\triangle PAD$, $\triangle PBE$, $\triangle PCF$ 中,其中一个面积等于另外两个面积的和. (第 26 届莫斯科奥林匹克题)

证明 设 G 为$\triangle ABC$ 的重心,直线 PG 与 AB, BC 相交,从 A, C, D, E, F 分别作该直线的垂线,垂足为 A', C', D', E', F',易证 $AA'=2DD'$, $CC'=2FF'$, $2EE'=AA'+CC'$,从而 $EE'=DD'+FF'$,故 $S_{\triangle PGE}=S_{\triangle PGD}+S_{\triangle PGF}$.

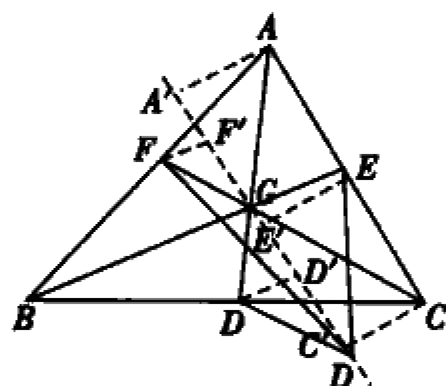


图 14 - 12

【解题思维策略分析】

1. 注意中线长公式、莱布尼兹公式的应用

例 8 已知$\triangle ABC$ 的三边 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\triangle DEF$ 是$\triangle ABC$ 的任意内接三角形,试以 a, b, c 表示$\triangle DEF$ 的三边平方和的最小值.

解 首先,证明如下结论:若 G 为$\triangle ABC$ 内的任意一点, G 到三边 BC, CA, AB 的距离分别为 x, y, z,则当 $x:y:z=a:b:c$ 时, $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为$\frac{4S_{\triangle ABC}^2}{a^2+b^2+c^2}$.

事实上,由柯西不等式$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2=4S_{\triangle ABC}^2$,当且仅当 $x:y:z=a:b:c$ 时取等号,由此即证.

如图 14 - 13,设 G 为$\triangle DEF$ 的重心,则由中线长公式或重心性质 3(2),有 $GD^2=\frac{1}{9}[2(DE^2+DF^2)-EF^2]$,

$$GE^2=\frac{1}{9}[2(DF^2+EF^2)-DF^2],$$

$$GF^2=\frac{1}{9}[2(EF^2+DF^2)-DE^2].$$

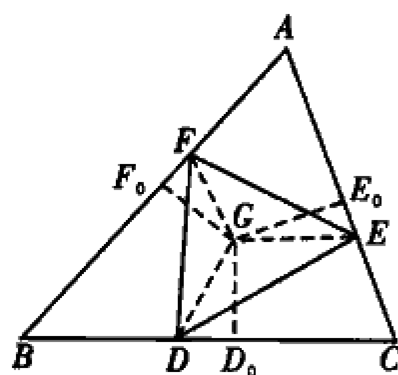


图 14 - 13

三式相加,得 $DE^2+EF^2+FD^2=3(GD^2+GE^2+GF^2)$.

从 G 点向$\triangle ABC$ 的三边 BC, AC, AB 引垂线,垂足分别为 D_0, E_0, F_0,则 $DE^2+EF^2+FD^2=3(GD_0^2+GE_0^2+GF_0^2)+3(DD_0^2+EE_0^2+FF_0^2)\geqslant3(GD_0^2+GE_0^2+GF_0^2)\geqslant\frac{12S_{\triangle ABC}^2}{a^2+b^2+c^2}$.

下证等号能够取到. 设 G 为$\triangle ABC$ 内一点, G 到 BC, CA, AB 的距离依次为 x, y, z,且满足 $x:y:z=a:b:c$. 过 G 分别向三边作垂线,垂足为 D_0, E_0, F_0,由 D_0, C, E_0, G 共

圆,知$\angle D_0GE_0+\angle C=180°$,于是$\frac{S_{\triangle GD_0E_0}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}xy\cdot\sin\angle D_0GE_0}{\frac{1}{2}ab\cdot\sin\angle C}=\frac{xy}{ab}$.

同理,$\frac{S_{\triangle GE_0F_0}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{yz}{bc}$,$\frac{S_{\triangle GF_0D_0}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{zx}{ca}$.

因 $x:y:z=a:b:c$,则$\frac{xy}{ab}=\frac{yz}{bc}=\frac{zx}{ca}$,故 $S_{\triangle GD_0E_0}=S_{\triangle GE_0F_0}=S_{\triangle GF_0D_0}$,由重心性质4(1),知 G 为$\triangle D_0E_0F_0$ 的重心.由此可见,对$\triangle ABC$ 的内接$\triangle D_0E_0F_0$ 而言,$D_0E_0^2+E_0F_0^2+F_0D_0^2=\frac{12S_{\triangle ABC}^2}{a^2+b^2+c^2}$.

因此,所求最小值为$\frac{12S_{\triangle ABC}^2}{a^2+b^2+c^2}$.

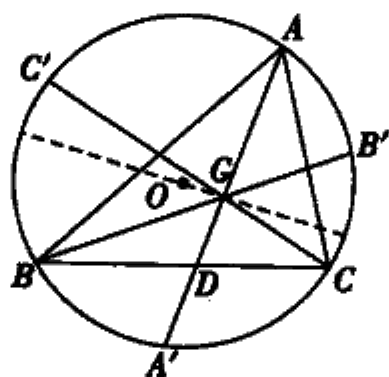


图 14-14

例9 如图 14-14,设 G 为$\triangle ABC$ 的重心,AG,BG,CG 的延长线分别交$\triangle ABC$ 的外接圆于 A',B',C'.求证:

(1) $\frac{AG}{GA'}+\frac{BG}{GB'}+\frac{CG}{GC'}=3$;

(2) $\frac{GA'}{GA}+\frac{GB'}{BG}+\frac{GC'}{CG}\geqslant 3$;

(3) $\frac{GA}{GA'}$或$\frac{GB}{GB'}$或$\frac{GC}{GC'}\leqslant 1$.

证明 (1)**证法1**:设 AA'交 BC 于 D,则 D 为 BC 的中点.

由$\frac{AG}{GA'}=\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle GBA'}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle GBA'}}$,$\frac{BG}{GB'}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle GAB'}}$,$\frac{CG}{GC'}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle GAC'}}$,及$\triangle AGB'\backsim\triangle BGA'$,$\triangle AGC'\backsim\triangle CGA'$,有$\frac{S_{\triangle GAB'}}{S_{\triangle GBA'}}=\frac{AG^2}{BG^2}$,$\frac{S_{\triangle GAC'}}{S_{\triangle GBA'}}=\frac{S_{\triangle GAC'}}{S_{\triangle GCA'}}=\frac{AG^2}{CG^2}$,从而

$$\frac{AG}{GA'}+\frac{BG}{GB'}+\frac{CG}{GC'}=\frac{1}{3}\cdot\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BGA'}}[1+(\frac{BG}{AG})^2+(\frac{CG}{AG})^2]=\frac{1}{3}\cdot\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BGA'}}(\frac{AG^2+BG^2+CG^2}{AG^2}).$$

由$\triangle BDA'\backsim\triangle ADC$,得$\frac{S_{\triangle BDA'}}{\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle BDA'}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BD^2}{AD^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{BC^2}{AG^2}$,所以$\frac{S_{\triangle BGA'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle BDA'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\cdot(\frac{BC}{AG})^2=\frac{1}{18}(\frac{3AG^2+BC^2}{AG^2})$.

由中线长公式或重心性质3(2),有 $3(AG^2+BG^2+CG^2)=AB^2+BC^2+CA^2$.

从而 $3AG^2+BC^2=\frac{2}{3}\cdot(AB^2+BC^2+CA^2)=2(AG^2+BG^2+CG^2)$.

故 $\frac{AG}{GA'}+\frac{BG}{GB'}+\frac{CG}{GC'}=\frac{1}{3}\cdot\frac{18\cdot AG}{3AG^2+BC^2}\cdot\frac{AG^2+BG^2+CG^2}{AG^2}=\frac{18\cdot AG^2\cdot(AG^2+BG^2+CG^2)}{3\cdot 2(AG^2+BG^2+CG^2)\cdot AG^2}$

$=3.$

证法 2: 令 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,由莱布尼兹公式,则 $OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$(其中 R,a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径及三边之长).

注意到 $GA\cdot GA'=GB\cdot GB'=GC\cdot GC'=R^2-OG^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$,

于是 $\frac{AG}{GA'}+\frac{BG}{GB'}+\frac{CG}{GC'}=\frac{AG^2}{GA\cdot GA'}+\frac{BG^2}{BG\cdot GB'}+\frac{CG^2}{CG\cdot GC'}$

$$=\frac{AG^2+BG^2+CG^2}{R^2-OG^2}=\frac{\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}{\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)}=3.$$

(2) $\frac{GA'}{GA}+\frac{GB'}{GB}+\frac{GC'}{GC}=\frac{1}{3}\left(\frac{GA'}{GA}+\frac{GB'}{GB}+\frac{GC'}{GC}\right)\cdot\left(\frac{AG}{GA'}+\frac{BG}{GB'}+\frac{CG}{GC'}\right)\geqslant\frac{1}{3}\cdot 3^2=3.$

(3) 由(2),知 $\frac{A'G}{AG}$ 或 $\frac{B'G}{BG}$ 或 $\frac{C'G}{CG}\geqslant 1$,由此即有 $\frac{AG}{GA'}$ 或 $\frac{BG}{GB'}$ 或 $\frac{CG}{GC'}\leqslant 1$,或由(1)也可推得结论成立.

2. 证明线共点的一条途径

例 10 如图 14-15,设⊙O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,BC,CA,AB 上的切点各是 D,E,F. 射线 DO 交 EF 于 A',同样可得 B',C'. 试证:直线 AA',BB',CC' 共点.

证明 连 $A'B,A'C$. 易知 B,D,O,F 及 C,D,O,E 分别共圆,得 $\angle A'OF=\angle B,\angle A'OE=\angle C$.

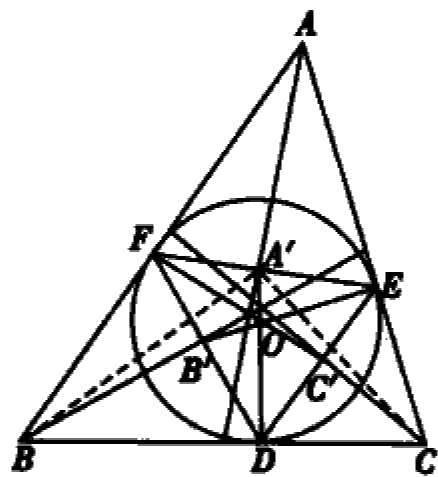


图 14-15

在 $\triangle A'OF$ 及 $\triangle A'OE$ 中应用正弦定理,有

$\frac{A'F}{\sin\angle A'OF}=\frac{OA'}{\sin\angle OFA'}=\frac{OA'}{\sin\angle OEA'}=\frac{A'E}{\sin\angle A'OE}$,有

$\frac{A'F}{A'E}=\frac{\sin\angle A'OF}{\sin\angle A'OE}=\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{AC}{AB}$. 从而 $AB\cdot A'F=AC\cdot A'E$.

又 $\angle AFE=\angle AEF$,故有

$S_{\triangle ABA'}=\frac{1}{2}\sin\angle AFE\cdot AB\cdot A'F=\frac{1}{2}\sin\angle AEF\cdot AC\cdot A'E$

$=S_{\triangle ACA'}$.

由此式可知直线 AA' 必平分 BC 边,即 AA' 必过 $\triangle ABC$ 的重心. 同样可证 BB',CC' 也都过 $\triangle ABC$ 的重心.

故由重心的唯一性,知 AA',BB',CC' 三直线共点于 $\triangle ABC$ 的重心.

【模拟实战】

习题 A

1. 如图 14－16,点 O 在锐角△ABC 内,过 O 作 $EF/\!/BC$,$PQ/\!/CA$,$HG/\!/AB$,若$\frac{EF}{BC}=\frac{PQ}{CA}=\frac{HG}{AB}$,试问 O 为△ABC 的什么心?

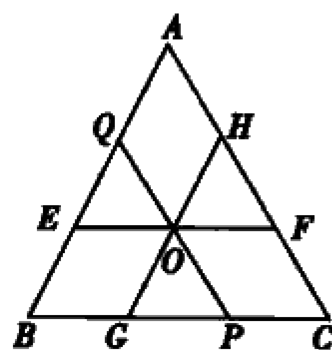


图 14－16

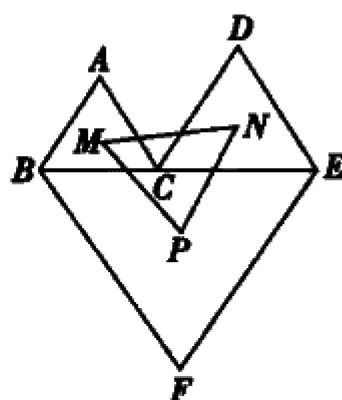


图 14－17

2. 如图 14－17,M、N、P 分别为正△ABC、△DCE、△BEF 的重心.求证:△MNP 为正三角形.
3. 已知△ABC 的重心 G 和内心 I 的连线 $GI/\!/BC$.求证:$AB+AC=2BC$.
4. 设 O 为△ABC 的外心,$AB=AC$,D 是 AB 的中点,G 是△ACD 的重心.求证:$OG\perp CD$.
5. 设 M 为△ABC 的重心,且 $AM=3$,$BM=4$,$CM=5$,求△ABC 的面积.

(1991 年上海市初中竞赛题)

6. 设 D 是△ABC 的边 BC 上的一点,点 E,F 分别是△ABD 和△ACD 的重心,连接 EF 交 AD 于点 G,则$\frac{DG}{GA}$的值是多少? (1991～1992 年度广州等五市竞赛题)
7. 给定任意△ABC,作这样的直线与三角形相交,使得由 A 点到直线的距离等于由 B,C 点到直线的距离的和.证明:所有这样的直线相交于一点.

习题 B

1. 如果三角形三边的平方成等差数列,那么该三角形和由它的三条中线围成的新三角形相似.其逆亦真.

2. 在$\triangle ABC$中,G为重心,I为内心.试证:$\triangle AGI$,$\triangle BGI$,$\triangle CGI$中,最大的一个的面积等于其余两个面积的和.

3. 在锐角$\triangle ABC$中,O,G分别为其外心和重心.若$OG /\!/ AC$,求证:$\tan A$,$\tan B$,$\tan C$成等差数列.

4. 试证:任意三角形的重心到三边距离之和不小于其内心到三边距离之和.

第十五章　三角形垂心的性质及应用

【基础知识】

三角形三边上的高线的交点称为三角形的垂心.三角形的垂心有下列有趣的性质：

性质1　直角三角形的垂心在直角顶点,锐角三角形的垂心在形内,钝角三角形的垂心在形外.

性质2　设 H 为锐角$\triangle ABC$ 的垂心,则$\angle BHC=\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$,$\angle CHA=\angle C+\angle A=180^\circ-\angle B$,$\angle AHB=\angle A+\angle B=180^\circ-\angle C$.

性质3　设 H 为$\triangle ABC$ 的垂心,则 H,A,B,C 四点中任一点是其余三点为顶点的三角形的垂心(并称这样的四点组为一垂心组,且一垂心组的四个外接圆的圆心组成另一垂心组,与原垂心组全等).

性质4　设$\triangle ABC$ 的三条高线为 AD,BE,CF,其中 D,E,F 分别为垂足(以下均同),垂心为 H,如图 15－1.

对于点 A,B,C,H,D,E,F 有六组四点共圆,且 H、D、E、F 可为这些圆的根心;有三组(每组四个)相似三角形,且 $AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$.

性质5　在$\triangle ABC$ 中,H 为垂心,$BC=a,CA=b,AB=c$,R 为$\triangle ABC$ 外接圆半径,则 $AH^2+a^2=BH^2+b^2=CH^2+c^2$.

证明　如图 15－1,作$\triangle ABC$ 的外接圆$\odot O$,连 AO 并延长交外接圆于 M,连 BM,CM,则 $AM=2R$.

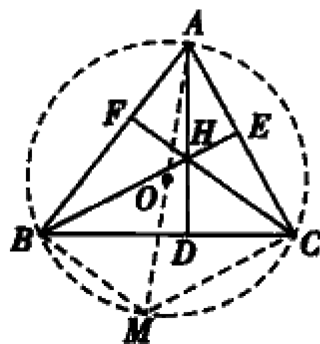


图 15－1

易知 $BH/\!/MC$,$CH/\!/BM$,因此,四边形 $BMCH$ 为平行四边形.于是,$BH=MC$,$CH=BM$.

在 Rt$\triangle AMC$ 中,$MC^2+b^2=AM^2$;在 Rt$\triangle ABM$ 中,$BM^2+c^2=AM^2$,所以 $BH^2+b^2=CH^2+c^2=(2R)^2$.

同理,过 C 作直径,可证得 $AH^2+a^2=(2R)^2$,因此

$$AH^2+a^2=BH^2+b^2=CH^2+c^2=(2R)^2.$$

注　此性质的证明,或由勾股定理有 $AH^2+BC^2=AE^2+HE^2+BE^2+CE^2=(AE^2+EB^2)+(HE^2+CE^2)=AB^2+CH^2$ 等,即可.

性质 6 设△ABC 的外接圆半径为 R,则

$AH=2R\cdot|\cos A|$, $BH=2R\cdot|\cos B|$, $CH=2R\cdot|\cos C|$.

证明 当△ABC 为锐角三角形时,如图 15-2,显然有 $\angle AHE=\angle ACB$,从而 $\sin\angle ACB=\sin\angle AHE=\dfrac{AE}{AH}$.

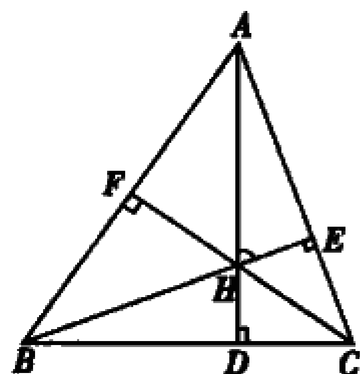


图 15-2

在 Rt△ABE 中,$AE=AB\cdot\cos\angle BAC$,故 $AH=\dfrac{AB\cdot\cos\angle BAC}{\sin\angle ACB}=\dfrac{2R\cdot\sin\angle ACB\cdot\cos\angle BAC}{\sin\angle ACB}=2R\cdot\cos\angle BAC=2R\cdot|\cos A|$.

同理,$BH=2R\cdot|\cos B|$, $CH=2R\cdot|\cos C|$.

当△ABC 为钝角三角形时,不妨设$\angle A$ 为钝角.此时,只需调换图 15-2 中字母 A 与 H,E 与 F 的位置,图形不变,即得 $AH=2R\cdot|\cos A|$, $BH=2R\cdot|\cos B|$, $CH=2R\cdot|\cos C|$.

当△ABE 为直角三角形时,不妨设$\angle A$ 为直角,此时,垂心 H 与 A,E,F 重合.显然 $AH=2R\cdot|\cos A|$, $BH=2R\cdot|\cos B|$, $CH=2R\cdot|\cos C|$.

性质 7 H 为锐角△ABC 所在平面内一点,H 为△ABC 的垂心的充要条件是下列条件之一成立:

(1) H 关于三边的对称点均在△ABC 的外接圆上;

(2)△ABC,△ABH,△BCH,△ACH 的外接圆是等圆;

(3)H 关于三边中点的对称点均在△ABC 的外接圆上;

(4)$\angle HAB=\angle HCB$,$\angle HBC=\angle HAC$;

(5)$\angle BAO=\angle HAC$,$\angle ABO=\angle HBC$,$\angle ACO=\angle HCB$,其中 O 为△ABC 的外心.

证明 (1)必要性:如图 15-3,延长 AD 交△ABC 的外接圆于 D',连 CD',则知$\angle HCD=\angle HAB=\angle BCD'$,即知 H,D'关于边 BC 对称.

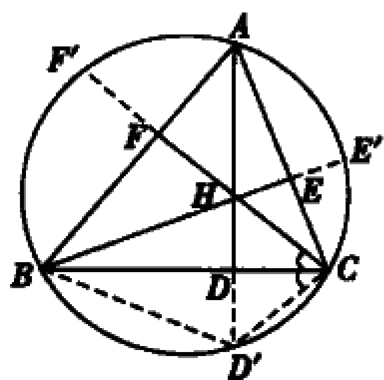


图 15-3

同理可证其余情形.

充分性:设 H 关于边 BC 的对称点 D'在△ABC 外接圆上,则$\angle BHC=\angle BD'C$,且$\angle BD'C+\angle A=180°$,从而$\angle BHC=180°-\angle A$.

同理,$\angle AHC=180°-\angle B$,$\angle AHB=180°-\angle C$.

此时,设 H'为△ABC 的垂心,则由性质 1 知$\angle BH'C=180°-\angle A$,$\angle AH'C=180°-\angle B$,$\angle AH'B=180°-\angle C$,而分别以 BC,CA,AB 为弦,张角为 $180°-\angle A$,$180°-\angle B$,$180°-\angle C$ 的三弧的交点是唯一的,即 H'与 H 重合,故 H 为△ABC 的垂心.

(2)由(1)即证.

(3)如图 15-4,设 L,M,N 分别为边 BC,CA,AB 的中点,H 关于这三点的对称点分别为 A_1,B_1,C_1,如图连线,则得一系列不同的平行四边形.

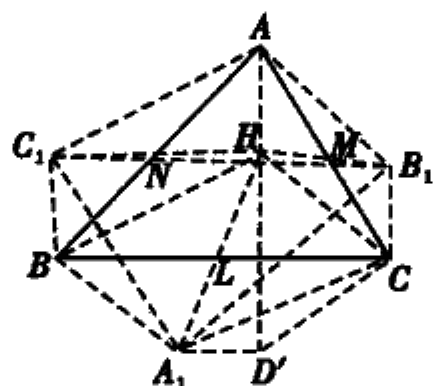


图 15-4

充分性:由$\triangle AB_1C_1 \cong \triangle HCB$,知$\angle AC_1B_1=\angle HBC$.

又由 A,B_1,C,C_1 四点共圆及 $B_1C \parallel AH$,得$\angle AC_1B_1=\angle B_1CA=\angle HAC$,故$\angle HAC=\angle HBC$.

同理,$\angle HAB=\angle HCB$,$\angle HBA=\angle HCA$.

注意到$\angle HCB=\angle CBA_1$,及$\angle HAC+\angle HBC+\angle HAB+\angle HCB+\angle HBA+\angle HCA=180°$,可得 $\angle HBA+\angle HBC+\angle CBA_1=90°$,即 $A_1B\perp AB$,从而 $CH\perp AB$.

同理,$AH\perp BC$,$BH\perp CA$.故 H 为$\triangle ABC$ 的垂心.

必要性:设垂心 H 关于边 BC 的对称点为 D',则 $A_1D'\parallel BC$,即四边形 $BA_1D'C$ 为梯形.

由$\angle BCD'=\angle HCB=\angle CBA_1$,知 $BA_1D'C$ 为等腰梯形,从而 C,B,A_1,D'四点共圆.由(1)知 D'在$\triangle ABC$ 的外接圆上,即 A_1 在$\triangle ABC$ 的外接圆上.

同理,B_1,C_1 也在$\triangle ABC$ 的外接圆上.

(4)必要性显然,仅证充分性.

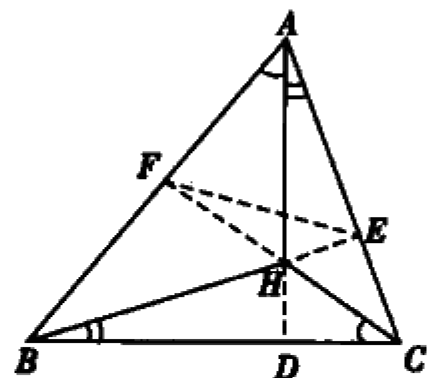


图 15-5

如图 15-5,设 AH,BH,CH 的延长线分别交对边于 D,E,F.在$\triangle ABD$ 和$\triangle CBF$ 中,$\angle HAB=\angle HCB$,$\angle ABD=\angle CBF$,从而$\angle ADB=\angle CFB$.

同理,$\angle ADC=\angle BEC$.

由$\angle ADC+\angle ADB=180°$,则$\angle BEC+\angle CFB=180°$,从而$\angle AEH+\angle AFH=180°$,即知 A,E,H,F 四点共圆.

连 EF,则$\angle HEF=\angle HAF$.由$\angle HAF=\angle HCB$,有$\angle BEF=\angle FCB$,知 B,C,E,F 四点共圆,有$\angle BEC=\angle CFB$.

而$\angle BEH+\angle CFB=180°$,因此$\angle BEC=\angle CFB=90°$.可见 BE,CF 均是$\triangle ABC$ 的两条高,故 H 是$\triangle ABC$ 的垂心.

(5)必要性显然,仅证充分性.

如图 15-6,由$\angle BAO=\frac{1}{2}(180°-\angle AOB)=\frac{1}{2}(180°-2\angle C)=90°-\angle C=\angle HAC$,知$\angle HAC$ 与$\angle C$ 互余,即知 $AH\perp BC$.同理,$BH\perp AC$.故 H 为$\triangle ABC$ 的垂心.

性质 8 在非直角三角形中,过 H 的直线分别交 AB,AC 所在直线于 P,Q,则 $\frac{AB}{AP}=\tan\angle B+\frac{AC}{AQ}\cdot\tan\angle C=\tan\angle A+\tan\angle B+\tan\angle C$.

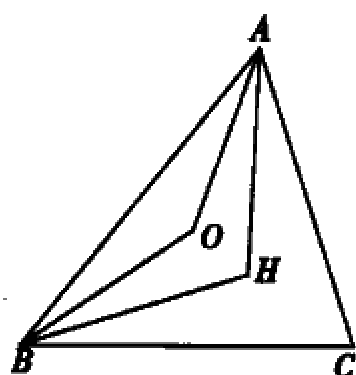


图 15－6

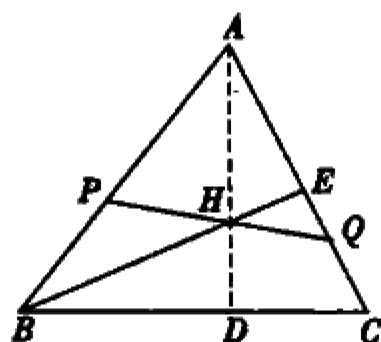


图 15－7

事实上，如图 15－7，连 AH 交 BC 于 D，由 $\dfrac{AD}{AH}=\dfrac{AH+HD}{AH}=\dfrac{S_{\triangle APQ}+S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle APQ}}=$

$$\frac{S_{\triangle APD}+S_{\triangle AQD}}{S_{\triangle APQ}}=\frac{S_{\triangle APD}+S_{\triangle AQD}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{AP}{AB}S_{\triangle ABD}+\frac{AQ}{AC}S_{\triangle ACD}}{\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{BD}{BC}+\frac{AB}{AP}\cdot\frac{CD}{BC}.\qquad①$$

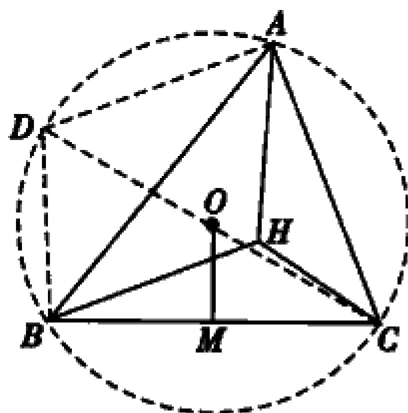
连 BH 并延长交 AC 于 E，由 $\mathrm{Rt}\triangle AHE\backsim\mathrm{Rt}\triangle BCE$，有 $\dfrac{AH}{BC}=\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{1}{\tan\angle A}$，从而 $\dfrac{AD}{AH}=\dfrac{AD\cdot\tan\angle A}{BC}$.

又由 $\dfrac{AD}{BD}=\tan\angle B$，$\dfrac{AD}{CD}=\tan\angle C$，有 $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AD}{BC\cdot\tan\angle B}$，$\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{AD}{BC\cdot\tan\angle C}$.

将其代入①式，有 $\tan\angle A=\dfrac{AC}{AQ}\cdot\dfrac{1}{\tan\angle B}+\dfrac{AB}{AP}\cdot\dfrac{1}{\tan\angle C}$.

注意到在非直角三角形中，有 $\tan\angle A\cdot\tan\angle B\cdot\tan\angle C=\tan\angle A+\tan\angle B+\tan\angle C$，即证得结论成立.

性质 9 三角形任一顶点到垂心的距离，等于外心到对边的距离的 2 倍.



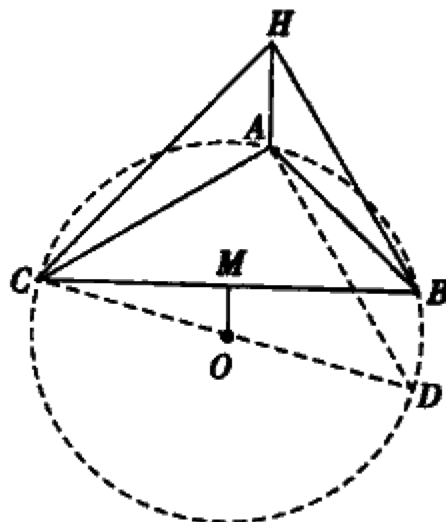


图 15－8

事实上，如图 15－8，过 C 作 $\triangle ABC$ 外接圆 $\odot O$ 的直径 CD，连 AD，DB，则知 $BD=$

$2OM$.又可证 $AHBD$ 为平行四边形,$AH=DB$.即证.

性质 10 锐角三角形的垂心到三顶点的距离之和等于其内切圆与外接圆半径之和的 2 倍.

事实上,过三角形三顶点作其所在高线的垂线构成新三角形,垂心为新三角形的外心,再注意到锐角三角形外心到三边的距离之和等于其内切圆与外接圆半径之和.或注意到性质 9 亦可证.

性质 11 锐角三角形的垂心是垂足三角形的内心;锐角三角形的内接三角形(顶点在原三角形的边上)中,以垂足三角形的周长最短.

事实上,对于结论的前部分,我们可证如下更一般性的结论:若 P 是$\triangle ABC$ 的高 AD 上任一点,直线 BP 交 AC 于 E,直线 CP 交 AB 于 F,则$\angle FDP=\angle PDE$.

如图 15-9,过 A 作 BC 的平行线 MN,与 BE 的延长线交于 M,与 CF 的延长线交于 N,则有$\dfrac{AM}{DC}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{S_{\triangle BAE}}{S_{\triangle BCE}}=\dfrac{S_{\triangle PAE}}{S_{\triangle PCE}}$.

从而 $AM=DC\cdot\dfrac{S_{\triangle PAE}}{S_{\triangle PCE}}=DC\cdot\dfrac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle BPC}}$.

同理,$AN=BD\cdot\dfrac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle BPC}}$,$BD=DC\cdot\dfrac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}}$.

由此三式,有$\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{DC}{BD}\cdot\dfrac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}}=\dfrac{DC\cdot S_{\triangle APB}\cdot S_{\triangle APC}}{DC\cdot S_{\triangle APC}\cdot S_{\triangle APB}}=1$.

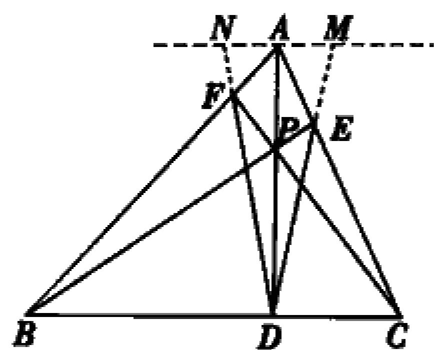


图 15-9

即 $AM=AN$,故$\angle FDP=\angle PDE$.若 P 为垂心,即证得结论.

性质 11 的后部分结论的证明,可先作 D 关于 AB 的对称点 D',作 D 关于 AC 的对称点 D'',连 $D'F$,$D''E$,再利用前面结论知 D',F,E,D''四点共直线,即证得结论.

性质 12 三角形垂心 H 的垂足三角形的三边,分别平行于原三角形外接圆在各顶点切的切线.

性质 13 H 为锐角$\triangle ABC$ 的垂心的充要条件是 $HA\cdot HB\cdot AB+HB\cdot HC\cdot BC+HC\cdot HA\cdot CA=AB\cdot BC\cdot CA$(见托勒迷定理及应用例 8).

性质 14 设 H 为非直角$\triangle ABC$ 的垂心,且 D,E,F 分别为 H 在 BC,CA,AB 边所在直线上的射影,H_1,H_2,H_3 分别为$\triangle AEF$,$\triangle BDF$,$\triangle CDE$ 的垂心,则$\triangle DEF\cong\triangle H_1H_2H_3$.

证明 仅对锐角$\triangle ABC$ 给出证明.如图 15-10,连 DH,DH_2,DH_3,EH,EH_1,EH_3,FH_1,FH_2.依题设则有 $HD\perp BC$ 且 $FH_2\perp BC$,从而 $HD\parallel FH_2$,$HF\perp AB$ 且 $DH_2\perp AB$,从而 $HF\parallel DH_2$.故 HDH_2F 为平行四边形,有 $HD \mathrel{\underline{\parallel}} FH$.

同理，HDH_3E 为平行四边形，有 $HD \mathrel{\underline{\parallel}} EH_3$.

于是 $FH_2 \mathrel{\underline{\parallel}} EH_3$，即 EFH_2H_3 为平行四边形，故 $EF = H_2H_3$.

同理，有 $FD = H_3H_1$，$DE = H_1H_2$. 故 $\triangle DEF \cong \triangle H_1H_2H_3$.

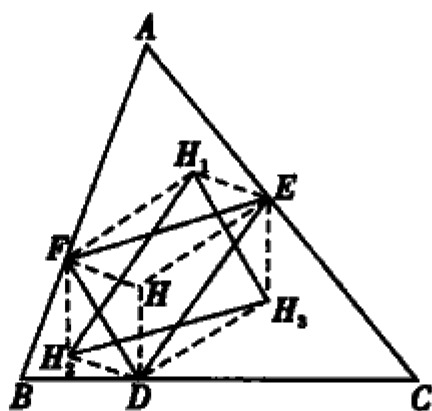


图 15－10

推论 1　题设条件同上，则 $\triangle H_1EF \cong \triangle DH_2H_3$，$\triangle H_2DF \cong \triangle EH_1H_3$，$\triangle H_3DE \cong \triangle FH_1H_2$.

推论 2　题设条件同上，则 $S_{六边形H_1FH_2DH_3E} = 2S_{\triangle H_1H_2H_3}$.

推论 3　题设条件同上，则 HH_1 与 EF，HH_2 与 FD，HH_3 与 DE 相互平分.

【典型例题与基本方法】

例 1　如图 15－11，设 AD，BE，CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高，D，E，F 分别为垂足. 自 A，B，C 分别作 $AK \perp EF$ 于 K，作 $BL \perp FD$ 于 L，作 $CN \perp DE$ 于 N. 证明：直线 AK，BL，CN 相交于一点.

证明　设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，由 $AK \perp EF$，$CF \perp AB$，知 $\angle FAK = \angle EFH$. 注意到 A，F，H，E 四点共圆，知 $\angle FAK = \angle EAH$. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，注意到性质 6(5)，有 $\angle FAO = \angle EAH$，知 AO 与 AK 重合. 同理，BL 与 BO 重合，CN 与 CO 重合，故 AK，BL，CN 三线共点于 $\triangle ABC$ 的外心 O.

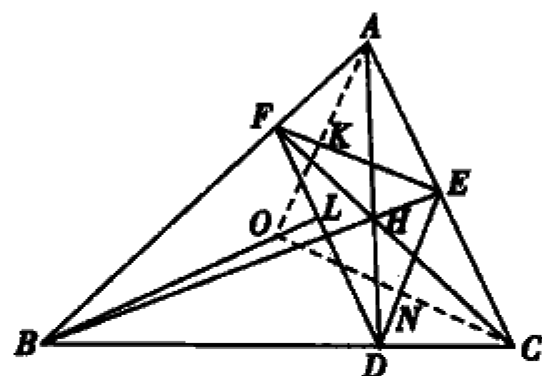


图 15－11

例 2　如图 15－12，设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是三角形所在平面内任一点. 由 H 向 PA，PB，PC 引垂线 HL，HM，HN 与 BC，CA，AB 的延长线相交于 X，Y，Z. 证明：X，Y，Z 三点共直线.

证明　设三条高线的垂足为 D，E，F，则 $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$. 又 A，D，L，X 共圆，则 $HL \cdot HX = HA \cdot HD$.

同理，$HM \cdot HY = HB \cdot HE$，$HN \cdot HZ = HC \cdot HF$.

于是，$HM \cdot HY = HN \cdot HZ = HL \cdot HX$.

连 PH 并延长，在其上取点 Q，使 $HP \cdot HQ = HA \cdot HD$，则 X，Q，L，P 四点共圆，从而 $\angle PQX = \angle PLX = 90°$，即 $XQ \perp PQ$. 同理，$YQ \perp PQ$，$ZQ \perp PQ$，即 $XY \perp PQ$，$XZ \perp PQ$. 故 X，Z，Y 三点共线.

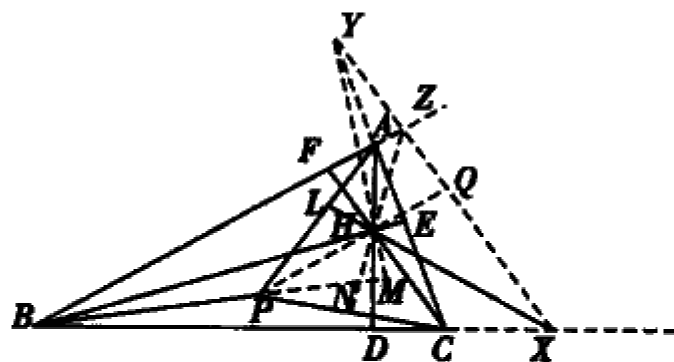


图 15－12

例 3　如图 15－13，设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，D，E，F 分别为 BC，CA，AB 的中点. 一

个以 H 为圆心的圆交直线 DE 于 P,Q,交直线 EF 于 R,S,交直线 FD 于 T,U.证明:$CP=CQ=AR=AS=BT=BU$.（1989年加拿大训练题）

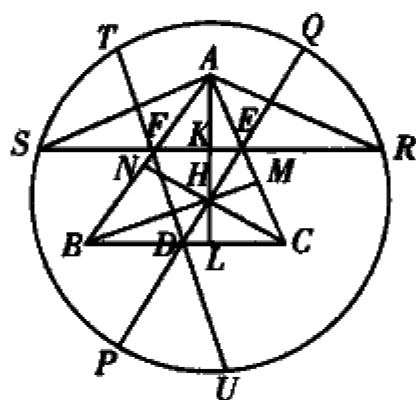


图 15-13

证明 设 AL,BM,CN 为$\triangle ABC$ 的三条高,AL 交中位线 EF 于K,则 K 为AL 的中点,且 AK 垂直平分 SR,故 $AS=AR$.

同理,$BT=BU,CP=CQ$.

下面证明 $AR=BT=CP$.

设$\odot H$ 的半径为 r,则 $AR^2=AK^2+KR^2=AK^2+r^2-HK^2=r^2+AH(AK-HK)=r^2+AH\cdot HL$.

同理,$BT^2=r^2+BH\cdot HM,CP^2=r^2+CH\cdot HN$.

而 $AH\cdot HL=BH\cdot HM=CH\cdot HN$,故 $AR=BT=CP$.

例4 如图 15-14,设 $A_1A_2A_3A_4$ 为$\odot O$ 的内接四边形,H_1,H_2,H_3,H_4 依次为$\triangle A_2A_3A_4$,$\triangle A_3A_4A_1$,$\triangle A_4A_1A_2$,$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心.求证:H_1,H_2,H_3,H_4 四点共圆,并确定出该圆的圆心位置.

（1992年全国高中联赛题）

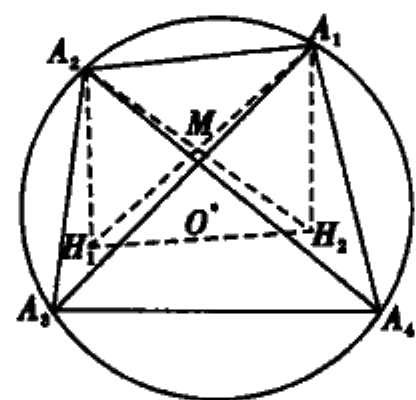


图 15-14

证法1 连 A_2H_1,A_1H_2,H_1H_2,设$\odot O$ 的半径为 R.在$\triangle A_2A_3A_4$ 中,注意到性质6(2),有$\dfrac{A_2H_1}{\sin\angle A_2A_3H_1}=2R$,故 $A_2H_1=2R\cdot\cos\angle A_3A_2A_4$.

在$\triangle A_1A_3A_4$ 中,同理求得 $A_1H_2=2R\cdot\cos\angle A_3A_1A_4$.

由$\angle A_3A_2A_4=\angle A_3A_1A_4$,故 $A_2H_1=A_1H_2$.

又 $A_2H_1\perp A_3A_4,A_1H_2\perp A_3A_4$,于是 $A_2H_1 \underline{\underline{\parallel}} A_1H_2$,故 $H_1H_2 \underline{\underline{\parallel}} A_2A_1$.

设 H_1A_1 与 H_2A_2 的交点为 M,则 H_1H_2 与 A_1A_2 关于点 M 成中心对称.

同理,H_2H_3 与 A_2A_3,H_3H_4 与 A_3A_4,H_4H_1 与 A_4A_1 都关于 M 点成中心对称.故四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 关于 M 点成中心对称,两者是全等形.从而 H_1,H_2,H_3,H_4 在同一个圆上.设此圆圆心为 Q,则 Q 与 O 也关于 M 点成中心对称.由 O,M 两点则可确定 Q 点的位置.

证法2 由性质5,得 $A_1H_4=2R\cdot|\cos\angle A_2A_1A_3|$,$A_4H_1=2R\cdot|\cos\angle A_2A_4A_3|$,而$\angle A_2A_1A_3=\angle A_2A_4A_3$,从而 $A_1H_4=A_4H_1$.

又 $A_1H_4/\!/A_4H_1$,知四边形 $A_1H_4H_1A_4$ 为平行四边形,故 $A_1A_4 \underline{\underline{\parallel}} H_4H_1$.

同理,$A_1A_2 \underline{\underline{\parallel}} H_2H_1$,$A_3A_4 \underline{\underline{\parallel}} H_4H_3$,$A_2A_3 \underline{\underline{\parallel}} H_3H_2$.

于是,四边形 $A_1A_2A_3A_4\cong$四边形 $H_1H_2H_3H_4$.

由于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 有外接圆$\odot O$,所以 H_1,H_2,H_3,H_4 四点共圆.显然四边形

$A_1A_2A_3A_4$ 与四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 位似，位似中心为 A_1H_1 与 A_4H_4 之交点 O'. 故过四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 的圆⊙O''的圆心 O''与 O 必关于 O'对称，从而 O''在 OO'的延长线上且 $OO' = O'O''$.

【解题思维策略分析】

1. 利用图形中三角形垂心的特性

例 5 如图 15-15，设△ABC 是锐角三角形，且 $BC > AC$，O 是它的外心，H 是它的垂心，F 是高 CH 的垂足，过 F 作 OF 的垂线交边 CA 于 P. 证明：$\angle FHP = \angle BAC$.

（IMO-37 预选题）

证明 延长 CF 交⊙O 于 D，连 BD，BH，由性质 6(1)知 F 为 HD 的中点.

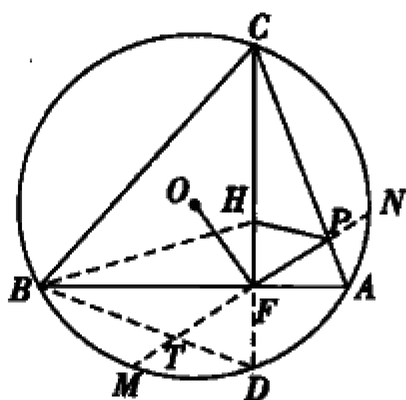


图 15-15

设 FP 所在直线交⊙O 于 M，N，交 BD 于 T 点. 由 $OF \perp MN$，知 F 为 MN 的中点. 由蝴蝶定理知 F 为 PT 的中点. 又因 F 为 HD 的中点，故 $HP \parallel TD$，于是$\angle FHP = \angle BDC = \angle BAC$.

例 6 如图 15-16，设 H 为△ABC 的垂心，P 为该三角形外接圆上一点，E 是高 BH 的垂足，并设 $PAQB$ 与 $PARC$ 都是平行四边形，AQ 交 HR 于 X. 证明：$EX \parallel AP$. （IMO-37 预选题）

证明 连 PR 交 AC 于 M，则 M 为 AC 中点，也为 PR 中点. 作△ABC 外接圆的直径 BD，连 DA，DC，HA，HC.

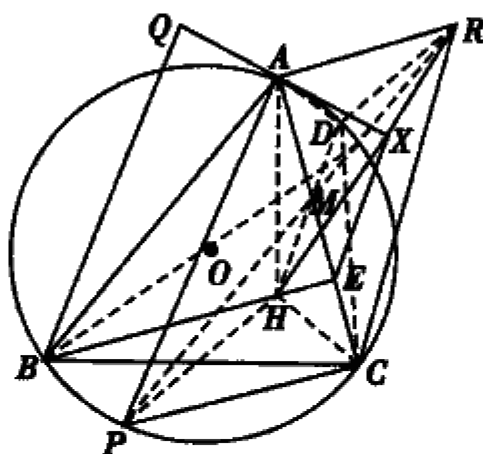


图 15-16

由 $DA \perp AB$，$HC \perp AB$，有 $DA \parallel HC$. 同理，$DC \parallel HA$，故四边形 $AHCD$ 为平行四边形，M 为 DH 中点. 于是四边形 $HRDP$ 为平行四边形，故 $HR \parallel DP$.

又 $QX \parallel BP$，$BP \perp DP$，则 $HR \perp QX$，即$\angle AXH = 90°$. 而$\angle AEH = 90°$，从而 A，H，E，X 四点共圆，即$\angle AXE + \angle AHE = 180°$. 而$\angle AHE = \angle ACB = \angle APB = \angle PAX$，故 $\angle AXE + \angle PAX = 180°$，于是 $EX \parallel AP$.

例 7 如图 15-17，设 ABC 是一个三角形，一个过 B，C 两点的圆分别与边 AB，AC 相交于 C'，B'. 证明：BB'，CC'，HH'三线共点，其中 H 与 H'分别为△ABC 与△$AB'C'$的垂心.

（IMO-36 预选题）

证明 由$\angle AB'C' = \angle ABC$，知△$AB'C'$∽△$ABC$. 同样，△$H'B'C'$∽△$HBC$. 设 BB'与 CC'相交于 P，由$\angle BB'C = \angle CC'B$，知$\angle PBH = \angle PCH$（等角的余角相等）. ①

由$\angle PB'C' = \angle PCB$，知△$PB'C'$∽△$PCB$. 作平行四边形 $PBDC$，则△DBC≌△PCB. 因而，△DBC∽△$PB'C'$，由此可知四边形 $BHCD$∽四边形 $B'H'C'P$. 于是，

$\triangle BHD \backsim \triangle B'H'P$.因而,$\angle HDB = \angle H'PB'$. ②

作平行四边形 $HPCE$,则$\angle PCH = \angle CHE$. ③

注意到平行四边形 $BHED$, 则$\angle DHE = \angle HDB$. ④

从而$\triangle BPH \cong \triangle DCE$,有$\angle CDE = \angle PBH$. ⑤

及 $\angle BPH = \angle DCE$. ⑥

利用⑤,①与③,可知$\angle CDE = \angle CHE$,从而知 H,C,E,D 四点共圆,即有$\angle DCE = \angle DHE$. ⑦

再由⑥,⑦,④与②,知$\angle BPH = \angle H'PB'$.因此,$HH'$也通过$P$点,故 BB',CC',HH'三线共点.

图 15-17

注 上述证明中,也可将$\triangle PHB$平移至$\triangle CED$处,再证$\triangle B'H'P \backsim \triangle CHD$.

2. 发掘图形中三角形的垂心特性

例 8 如图 15-18,在锐角$\triangle ABC$中,以三边为直径分别在三角形外作三个半圆.O为$\triangle ABC$内一点,AO,BO,CO的延长线分别交所对半圆于A_1,B_1,C_1.若$\angle ACO = \angle ABO$,$\angle BCO = \angle BAO$,$\angle CAO = \angle CBO$,求证:$AB_1 = AC_1$,$BA_1 = BC_1$,$CA_1 = CB_1$.

证明 令$\angle ACO = \angle 1$,$\angle ABO = \angle 2$,$\angle CAO = \angle 3$,$\angle CBO = \angle 4$,$\angle BCO = \angle 5$,$\angle BAO = \angle 6$.由于$\angle 1 = \angle 2$,$\angle 3 = \angle 4$,$\angle 5 = \angle 6$,则$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = \angle 2 + \angle 4 + \angle 6 = 90°$,即$AA_1 \perp BC$.

故 O 为$\triangle ABC$的垂心.设 BB_1 交 AC 于 E,C_1C 交 AB 于 F,从而 B,F,E,C 四点共圆,有 $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AC_1B$ 中,$AC_1^2 = AF \cdot AB$;在 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C$ 中,$AB_1^2 = AE \cdot AC$,从而 $AC_1 = AB_1$.

同理,$BA_1 = BC_1$,$CA_1 = CB_1$.

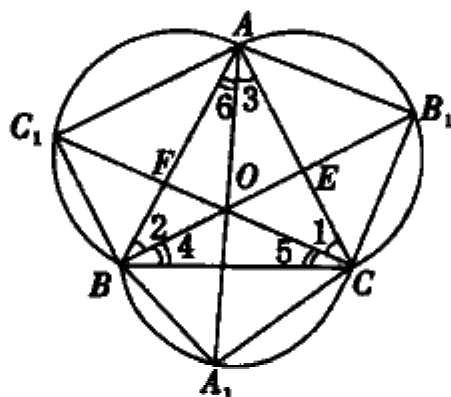


图 15-18

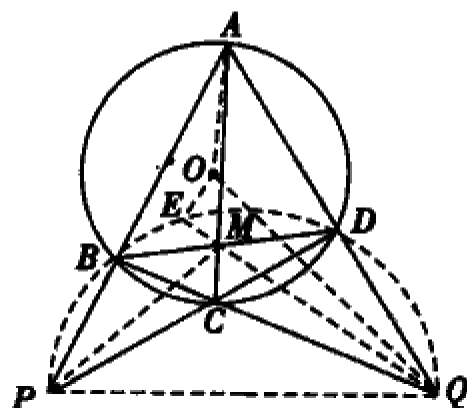


图 15-19

例 9 如图 15-19,$\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 的两组对边的延长线分别交于 P,Q,两对角线相交于 M.试证:圆心 O 恰为$\triangle PQM$的垂心.

证明 过 B,D,Q 三点作圆与 QM 的延长线交于 E,连 DE,则$\angle MED = \angle QBD = \angle MAD$,故 D,A,E,M 共圆.

设$\odot O$的半径为r,则$QM\cdot QE=QD\cdot QA=QO^2-r^2$,$QM\cdot ME=BM\cdot MD=r^2-MO^2$.此两式相加,并由$QM=QE-ME$,得$QO^2-QE^2=MO^2-ME^2$,故$QM\perp OE$.

连BE,OA,由$\angle QEO=90°$,有$\angle OEB=270°-\angle BEQ=270°-\angle BDQ$.

又$\angle BAO=90°-\angle ADB$,$\angle ADB+\angle BDQ=180°$,有$\angle BAO+\angle OEB=90°-\angle ADB+270°-\angle BDQ=360°-(\angle ADB+\angle BDQ)=180°$,所以,$A,B,E,O$四点共圆.

同理,C,D,O,E四点共圆(事实上,$\angle DEO=90°-\angle MED=90°-\angle MAD=90°-\frac{1}{2}\angle COD=\angle DCO$).而三圆$\odot BEOA$,$\odot CEOD$,$\odot O$两两相交,所得三公共弦(所在直线)$OE$,$AB$,$CD$或共点或互相平行.但$AB$与$CD$相交于$P$,故$OE$过点$P$,即$O,E,P$三点共线.又已证$QM\perp OE$,因此,$OM\perp OP$.同理,$PM\perp OQ$.故$O$为$\triangle PQM$的垂心.

注 若证$OM\perp PQ$,则可这样证明:设$\odot O$的半径为R,在射线QM上取一点E,使B,E,M,C四点共圆,此时$\angle BEQ=\angle BEM=180°-\angle BCM=180°-\angle BCA=180°-\angle BDA=180°-\angle BDQ$,从而$B,E,D,Q$四点共圆,$QE\cdot QM=BM\cdot DB=(R+OM)(R-OM)=R^2-OM^2$,$QM\cdot QE=QC\cdot QB=$切线长$^2=OQ^2-R^2$.两式相减,$MQ^2=OQ^2+OM^2-2R^2$,所以$OQ^2-MQ^2=2R^2-OM^2$.同理,有$OP^2-MP^2=2R^2-OM^2$.故$OQ^2-MQ^2=OP^2-MP^2$,即$OM\perp PQ$.

例10 如图15-20,设A,B,C,D是一条直线上依次排列的四个不同的点,分别以AC,BD为直径的两圆相交于X和Y,直线XY交BC于Z.若P为直线XY上异于Z的一点,直线CP与以AC为直径的圆直交于B及N,试证:AM,DN和XY三线共点.

(IMO-36试题)

证明 P点可在线段XY上或在其延长线上,设P点在线段XY上(在延长线上证明类似).

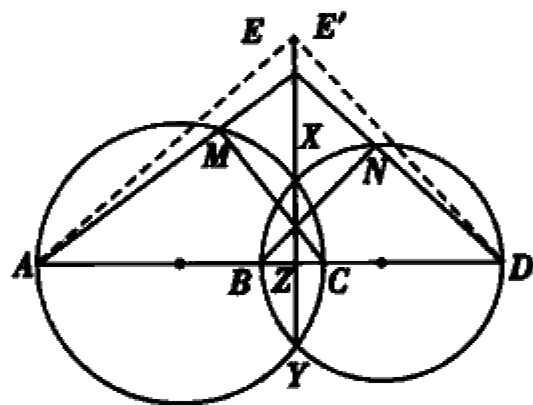


图15-20

过A点作$AE\parallel BN$交直线XY于E,过D点作$DE'\parallel CM$交直线XY于E'.

易知,$ZE:ZP=ZA:ZB$,$ZE':ZP=ZD:ZC$.

根据相交弦定理,有$ZA\cdot ZC=ZX\cdot ZY=ZB\cdot ZD$,由此得$ZE:ZP=ZE':ZP$,因而点$E$与点$E'$重合.

因为$\triangle ADE$的三条高线分别在直线AM,DN,XY上,所以这三条直线共点于$\triangle ADE$的垂心.

例11 自$\odot O$外一点P引$\odot O$的两条切线PA,PB,其切点为A,B.在劣弧$\overset{\frown}{AB}$上任取一点C,经过点C作$\odot O$的切线,分别交PA,PB于点D,E.又AB与OD,OE分别相交于G,F,DF与EG相交于H.求证:O,H,C三点共线.

证明 如图15-21,连OA,OB,OC,有$OA\perp AP$,$OB\perp BP$,$OC\perp DE$,$\angle OAP=$

$\angle OBP=\angle OCD=\angle OCE=90°$.

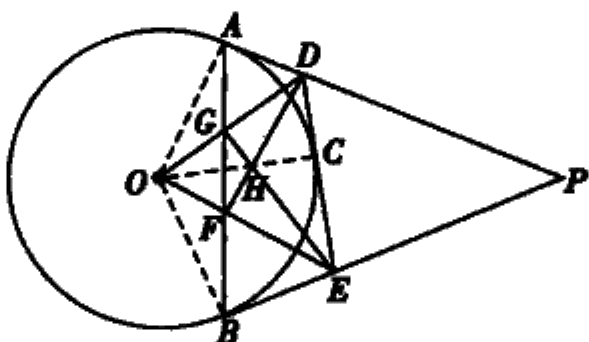


图 15－21

又 $PA=PB$, $DA=DC$, $EB=EC$，则 $\angle PAB=\angle PBA$, $\angle AOD=\angle COD$, $\angle BOE=\angle OCE$. 于是 $\angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}(180°-\angle P)$, $\angle DOE=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)=\frac{1}{2}\angle AOB=90°-\frac{1}{2}\angle P$，故 $\angle PAB=\angle DOE=\angle PBA$，即 $\angle DAF=\angle DOF=\angle EBG=\angle EOG$，所以 O,A,D,F 及 O,B,E,G 均四点共线，有 $\angle DFE=\angle OAP=\angle OBP=\angle EGD=90°$，故 $DF\perp OE$, $EG\perp OD$. 又 DF 与 EG 相交于 H，因而点 H 是 $\triangle DOE$ 的垂心，有 $OH\perp DE$. 又 DE 切⊙O 于 C，则 $OC\perp DE$. 故 OC, OH 重合，所以 O,H,C 三点共线.

例 12 设 O、H 分别为锐角$\triangle ABC$ 的外心和垂心，则 $S_{\triangle AOH}$、$S_{\triangle BOH}$、$S_{\triangle COH}$ 中，最大的一个等于其余两个之和.

证明 当直线 OH 通过$\triangle ABC$ 的某一顶点时，结论显然成立.

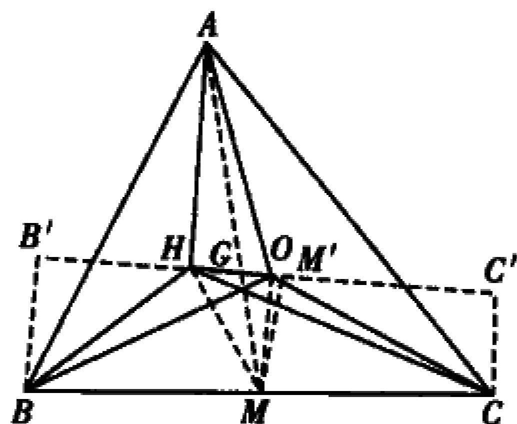


图 15－22

当直线 OH 与$\triangle ABC$ 的某两边相交时，如图 15－22，设直线 OH 与 AB、AC 相交.

取$\triangle ABC$ 的重心 G，由欧拉定理，知 G 必在 OH 上，且 G 在 O、H 之间. 连 AG 并延长交 BC 于 M，则 M 为 BC 的中点. 连 MO, MH，并设 B、M、C 到直线 OH 的距离分别为 BB'、MM'、CC'，则 MM'为梯形 $BB'C'C$ 的中位线. 即

$BB'+CC'=2MM'$，从而 $S_{\triangle BOH}+S_{\triangle COH}=2S_{\triangle MOH}$.

又 $AG=2MG$，则 $S_{\triangle AOH}=2S_{\triangle MOH}$.

故 $S_{\triangle AOH}=S_{\triangle BOH}+S_{\triangle COH}$.

这说明直线 OH 与顶点 A 有关的两边相交时，$S_{\triangle AOH}$最大.

同理可证得其他情形的结论.

例 13 设点 P 是锐角$\triangle ABC$ 所在平面上任意一点，u,v,w 分别为 A,B,C 点到点 P 的距离. 求证：$u^2\cdot\tan A+v^2\cdot\tan B+w^2\cdot\tan C\geqslant 4S_{\triangle}$，其中 $S_{\triangle}$为$\triangle ABC$ 的面积，并证明等号成立的充要条件是 P 为$\triangle ABC$ 的垂心.

证明 如图 15－23，取 BC 所在直线为 x 轴，过 A 的高线所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 设 A,B,C 的坐标分别为 $(0,a)$，$(-b,0)$，$(c,0)$ $(a,b,c>0)$，于是

$$\tan B=\frac{a}{b},\tan C=\frac{a}{c},\tan A=-\tan(B+C)=\frac{a(b+c)}{a^2-bc}.$$

由于$\angle A$为锐角,知 $a^2-bc>0$.

设点 P 的坐标为(x,y),则

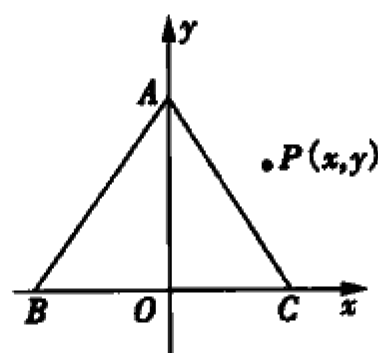


图 15-23

$u^2\cdot\tan A+v^2\cdot\tan B+w^2\cdot\tan C$

$=[x^2+(y-a)^2]\dfrac{a(b+c)}{a^2-bc}+\dfrac{a}{b}[(x+b)^2+y^2]+\dfrac{a}{c}[(x-c)^2+y^2]$

$=(x^2+y^2-a^2-2ay)\cdot\dfrac{a(b+c)}{a^2-bc}+\dfrac{a(b+a)}{bc}(x^2+y^2+bc)$

$=\dfrac{a(b+c)}{bc(a^2-bc)}[ax^2+(ay-bc)^2+2bc(a^2-bc)]\geqslant 2a(b+c)=4S_\triangle$.

故 $u^2\cdot\tan A+v^2\cdot\tan B+w^2\cdot\tan C\geqslant 4S_\triangle$.

上式等号成立的充要条件是 $x=0$ 且 $y=\dfrac{3c}{a}$,即点 P 为$\triangle ABC$ 的垂心$(0,\dfrac{bc}{a})$.

3. 注意垂足三角形性质的应用

三角形的垂心在三边的射影组成的三角形在此简称为垂足三角形.

设 $p,R,r,S_\triangle$分别为$\triangle ABC$ 的半周长、外接圆半径、内切圆半径及面积,$p_1,R_1,r_1,S'_\triangle$表示垂足$\triangle DEF$ 的半周长及其他相应元素,则有如下性质:

(Ⅰ)$p_1=\dfrac{r}{R}p$;

(Ⅱ)$S'_\triangle=2S_\triangle\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$;

(Ⅲ)$r_1\leqslant\dfrac{r^2}{R}$;

(Ⅳ)$R_1=\dfrac{1}{2}R$.

证明 (Ⅰ)如图 15-24,显然 B,C,E,F 四点共圆且该圆的直径为 $BC=a$,$\triangle ABC\backsim\triangle AEF$,从而

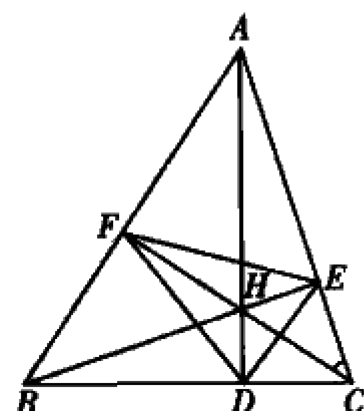


图 15-24

$EF=a\cdot\dfrac{AF}{AC}=a\cdot\sin\angle ACF=a\cdot\cos A$.

同理,$FD=AC\cdot\cos B=b\cos B$,$ED=AB\cdot\cos C=c\cdot\cos C$.

于是 $EF+FD+DE=a\cdot\cos A+b\cdot\cos B+c\cdot\cos C$

$=a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}{2abc}$

$$=\frac{16S_{\triangle}^{2}}{2abc}\quad(\text{注意 } 4S_{\triangle}R=abc)$$

$$=\frac{16S_{\triangle}^{2}}{8S_{\triangle}R}=\frac{2S_{\triangle}}{R}=\frac{(a+b+c)r}{R}.$$

故 $p_1=\frac{r}{R}p$.

(Ⅱ)由$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin\angle A}{\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\angle A}=\frac{c\cdot\cos A\cdot b\cdot\cos A}{bc}=\cos^2 A$.

同理,$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}=\cos^2 B$,$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ABC}}=\cos^2 C$.

于是 $\frac{S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ABC}}=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$,

从而 $\frac{S'_{\triangle}}{S_{\triangle}}=\frac{S_{\triangle}-(S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CED})}{S_{\triangle ABC}}=1-(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)$

$=2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.

(Ⅲ)由(Ⅱ)知 $S'_{\triangle}=2S_{\triangle}\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$,即 $p_1r_1=2pr\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$,又由(Ⅰ)有 $p_1=\frac{r}{R}p$,从而 $r_1=2R\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.

又 $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$,且 $p^2\leqslant 4Rr+4R^2+3r^2$(Grretsen 不等式),从而 $r_1=\frac{p^2-4R^2-4Rr-r^2}{2R}\leqslant\frac{4R^2+4Rr+3r^2-4R^2-4Rr-r^2}{2R}=\frac{r^2}{R}$.

(Ⅳ)设 $EF=a'$, $ED=b'$, $FD=c'$,于是有$\frac{S'_{\triangle}}{S_{\triangle}}=\frac{a'b'c'/4R_1}{abc/4R}$, $a'b'c'=abc\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$(见(Ⅰ)中证明),从而$\frac{S'_{\triangle}}{S_{\triangle}}=\frac{R}{R_1}\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.

又由(Ⅱ)有$\frac{S'_{\triangle}}{S_{\triangle}}=2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.故$\frac{R}{R_1}=2$,即 $R_1=\frac{1}{2}R$.

例 14 已知 D,E,F 为锐角$\triangle ABC$ 的内切圆切点,设 r,R 分别为$\odot DEF$ 与$\odot ABC$ 的半径,$\triangle DEF$ 的垂足三角形为$\triangle KMN$.求证:$S_{\triangle KMN}:S_{\triangle ABC}=r^2:4R^2$.

(第 21 届 IMO 加拿大训练题)

证明 如图 15-25,令 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则 $AE=AF=p-$

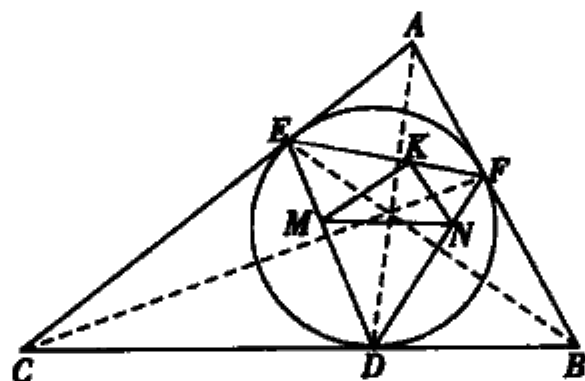


图 15-25

a, $BD = BF = p - b$, $CD = CE = p - c$, 且 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot AF \cdot \sin\angle A}{\frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\angle A} = \frac{(p-a)^2}{bc}$, $\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(p-b)^2}{ac}$, $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(p-c)^2}{ab}$,

从而 $\frac{S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BDF} + S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}$

$$= \frac{a(b+c-a)^2 + b(a+c-b)^2 + c(a+b-c)^2}{4abc}$$

$$= \frac{a(a^2-b^2-c^2) + b(b^2-a^2-c^2) + c(c^2-a^2-b^2) + 6abc}{4abc}$$

$$= \frac{a(-2bc\cdot\cos A) + b(-2ac\cdot\cos B) + c(-2ab\cdot\cos C) + 6abc}{4abc}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

故 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BDF} + S_{\triangle CDE})}{S_{\triangle ABC}} = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$.

由$\triangle KMN$为$\triangle DEF$的垂足三角形,有

$$\frac{S_{\triangle KMN}}{S_{\triangle DEF}} = 2\cos\angle EDF\cdot\cos\angle DFE\cdot\cos\angle FED.$$

注意到$\triangle DEF$为$\triangle ABC$的内切圆切点三角形,设I为$\triangle ABC$内心,知$\angle EID = 180° - \angle C$.又 $EI = ID$,有$\angle EDI = \angle DEI = \frac{1}{2}\angle C$.

同理,$\angle FDI = \angle DFI = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle FEI = \angle EFI = \frac{1}{2}\angle A$.

从而 $\angle EDF = \angle EDI + \angle FDI = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

同理,$\angle DFE = 90° - \frac{1}{2}\angle C$, $\angle FED = 90° - \frac{1}{2}\angle B$.

于是 $S_{\triangle KMN} : S_{\triangle DEF} = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$.

又 $2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{2R}$,则 $S_{\triangle KMN} : S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABC} = r : 2R$.

故 $S_{\triangle KMN} : S_{\triangle ABC} = r^2 : 4R^2$.

【模拟实战】

习题 A

1. 设锐角△ABC 的三条高 AD、BE、CF 相交于 H,若 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,则 $AH\cdot AD+BH\cdot BE+CH\cdot CF$ 的值是(   ).

   A. $\frac{ab+bc+ca}{2}$ B. $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

   C. $\frac{2(ab+bc+ca)}{3}$ D. $\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}$

2. 已知 H、O 分别为锐角△ABC 的垂心和外心,$OD\perp BC$,垂足为 D,则 $AH:OD=$____.

3. 设 H 是等腰△ABC 的垂心,在底边 BC 保持不变的情况下,让顶点 A 至底边 BC 的距离变小,这时乘积 $S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle HBC}$ 的值是变小、变大,还是不变?

4. 在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$, $CD\perp AB$,垂足为 D, I、I_2、I_2 分别是△ABC、△ACD、△BCD 的内心.求证:C 为△II_1I_2 的垂心.

5. 设 H、O 分别为锐角△ABC 的垂心和外心.证明:在 BC、CA、AB 上分别存在点 D、E、F,使得 $OD+DH=OE+EH=OF+FH$,且直线 AD、BE、CF 共点.

6. △ABC 的外接圆为⊙O,$\angle C=60°$,M 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,H 是△ABC 的垂心.求证:$OM\perp OH$.

7. 在△ABC 中,$AB=AC$,$AD\perp BC$ 于 D,$DF\perp AB$ 于 F,$AE\perp CF$ 于 E 且交 DF 于 M.求证:M 为 DF 的中点.

8. 在 Rt△ABC 中,CD 为斜边 AB 上的高,D 为垂足,O,O_1,O_2 分别为△ABC,△ACD,△BCD 的内心.求证:C 为△OO_1O_2 的垂心.

9. 试证:△ABC 外接圆上任一点 P 的西姆松线平分 P 与△ABC 的垂心 H 的连线.

10. 设 H 是锐角△ABC 的垂心,由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP,AQ,切点分别为 P,Q.求证:P,H,Q 三点共线.   (1996 年第 11 届冬令营试题)

11. 已知⊙O 的直径为 AB,AG 是弦,C 是弧$\overset{\frown}{AG}$的中点,$CD\perp AB$ 于 D 交 AG 于 E,BC 交 AG 于 F.求证:$AE=EF$.

12. 已知锐角△ABC,以 $\sin\angle A$,$\sin\angle B$,$\sin\angle C$ 为三边作一△$A'B'C'$,以 A',B',C' 为圆心,分别以 $\cos\angle A$,$\cos\angle B$,$\cos\angle C$ 为半径画圆,则三圆心交于一点 H,且 H 正好是△$A'B'C'$ 的垂心.

13. 在$\triangle ABC$中，H为垂心，$BC=a$，$\triangle ABC$的外接圆半径为R，且$a=2AH-2R$，求$\sin A$之值.
14. 在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$.
15. 已知H是锐角$\triangle ABC$的垂心，以AH为直径的圆交$\triangle ABC$的外接圆于N，NH交BC于M.求证：M是BC的中点.
16. 已知线段$AB=BC=CD$，$\odot O$分别与AB,BC,CD相切于点E,F,G，设AC交BD于P.求证：O,P,F三点共线.
17. 已知C,D是以AB为直径的半圆上任意两点，若AC与BD交于E，AD与BC交于F.求证：半圆过C,D的切线与EF三线共点.
18. 设锐角$\triangle ABC$的外接圆半径$R=1$，内切圆半径为r，它的垂足$\triangle A'B'C'$的内切圆半径为ρ.求证：$\rho\leqslant 1-\frac{1}{3}(1+r)^2$.　　(IMO－34预选题)

习题 B

1. 已知AD,BE,CF为锐角$\triangle ABC$的三条高，过D作EF的平行线RQ，RQ分别交AB和AC于R,Q，P为EF与CB的延长线的交点.证明：$\triangle PQR$的外接圆通过BC的中点M.
2. 在非等腰锐角$\triangle ABC$中，高AA_1和CC_1夹成的锐角的平分线分别与边AB和BC相交于点P和Q，角B的平分线同连结$\triangle ABC$的垂心和边AC之中点的线段相交于点R.证明：P,B,Q,R四点共圆.　　(第26届俄罗斯竞赛题)
3. 在$Rt\triangle ABC$中，AD是斜边上的高，连结$\triangle ABD$的内心与$\triangle ACD$的内心的直线分别与边AB及AC交于K,L.求证：$S_{\triangle ABC}\geqslant 2S_{\triangle AKL}$.　　(IMO－29试题)
4. 在$\triangle ABC$外接圆$\overset{\frown}{BC}$上取几个点$P_i(i=1,2,\cdots,n)$，作P_i关于AB的对称点M_i，P_i关于AC的对称点N_i.试证：n条直线M_iN_i共点.
5. 在锐角$\triangle ABC$中，$\angle C>\angle B$，点D是边BC上一点，使得$\angle ADB$是钝角，H是$\triangle ABD$的垂心，点F在$\triangle ABC$内部且在$\triangle ABD$的外接圆圆周上.求证：点F是$\triangle ABC$垂心的充分必要条件是：HD平行CF且H在$\triangle ABC$的外接圆圆周上.
(1999年中国奥林匹克题)
6. 在圆内接$\triangle ABC$中，H是$\triangle ABC$的垂心，分别作H点关于边BC,CA,AB的对称点H_1,H_2,H_3.若P是圆周上任意一点，连接PH_1,PH_2,PH_3分别与边BC,CA,AB或其延长线交于D,E,F.试证：D,E,F三点共线.

第十六章　三角形旁心的性质及应用

【基础知识】

与三角形的一边外侧相切,又与另两边的延长线相切的圆叫做三角形的旁切圆.如图 16-1,一个三角形有三个旁切圆,旁边圆的圆心简称为三角形的旁心.三角形的旁心有下列有趣的性质:

性质 1　三角形的旁心是其一内角的平分线(所在直线)和其他两角的外角平分线的交点.每一个旁心到三边的距离相等.

性质 2　三角形的三个旁心与内心构成一垂心组.反过来,一个三角形的顶点与垂心是高的垂足三角形的旁心与内心.

为了介绍后面的性质,我们记△ABC 的三边 BC, CA, AB 的边长分别为 a, b, c,令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.分别与 BC, CA, AB 外侧相切的旁切圆圆心记为 I_A, I_B, I_C,其半径记为 r_A, r_B, r_C. $S_\triangle$ 表示△ABC 的面积,R, r 分别为△ABC 的外接圆半径与内切圆半径.

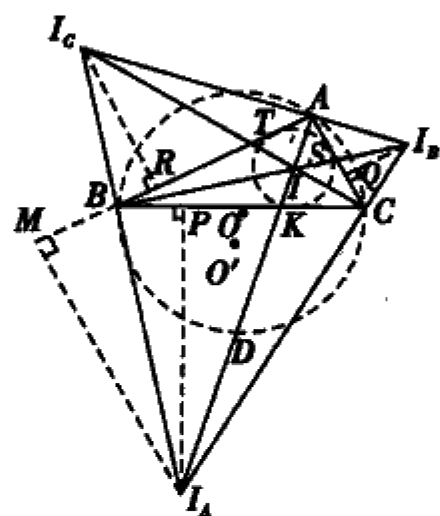


图 16-1

性质 3　$\angle BI_AC=90°-\frac{1}{2}\angle A$, $\angle BI_BC=\angle BI_CC=\frac{1}{2}\angle A$(对于顶角 B, C 也有类似的式子,略).

性质 4　$r_A=\frac{2S_\triangle}{-a+b+c}=4R\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\cos\frac{\angle B}{2}\cdot\cos\frac{\angle C}{2}=r\cdot\cot\frac{\angle B}{2}\cdot\cot\frac{\angle C}{2}$;

$$r_B=\frac{2S_\triangle}{a-b+c}=4R\cdot\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\cos\frac{\angle C}{2}\cdot\cos\frac{\angle A}{2}=r\cdot\cot\frac{\angle C}{2}\cdot\cot\frac{\angle A}{2};$$

$$r_C=\frac{2S_\triangle}{a+b-c}=4R\cdot\sin\frac{\angle C}{2}\cdot\cos\frac{\angle A}{2}\cdot\cos\frac{\angle B}{2}=r\cdot\cot\frac{\angle A}{2}\cdot\cot\frac{\angle B}{2}.$$

性质 5　$S_\triangle=(p-a)\cdot r_A=(p-b)\cdot r_B=(p-c)\cdot r_C$;

$$S_\triangle=\frac{r_Ar_Br_C}{\sqrt{r_Ar_B+r_Br_C+r_Cr_A}};$$

$$\frac{\sqrt{3}r_Ar_Br_C}{r_A+r_B+r_C}\leqslant S_{\triangle}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(r_Ar_Br_C)^{\frac{2}{3}}.$$

注 第三式由平均值不等式推证得.

性质6 (1) $I_BI_C=a\cdot\csc\frac{\angle A}{2}$, $I_CI_A=b\cdot\csc\frac{\angle B}{2}$, $I_AI_B=c\cdot\csc\frac{\angle C}{2}$;

(2) $II_A=a\cdot\sec\frac{\angle A}{2}$, $II_B=b\cdot\sec\frac{\angle B}{2}$, $II_C=c\cdot\sec\frac{\angle C}{2}$.

事实上,对于(1),由性质2,知 I 为$\triangle I_AI_BI_C$ 的垂心,$\triangle ABC$ 为$\triangle I_AI_BI_C$ 的垂足三角形,于是 I_C,B,C,I_B 四点共圆且 I_BI_C 为该圆直径,故由正弦定理知 $I_BI_C=BC\cdot\csc\angle BI_BC$.由 A,I,C,I_B 共圆知$\angle BI_BC=\angle IAC=\frac{1}{2}\angle A$,从而 $I_BI_C=a\cdot\csc\frac{\angle A}{2}$.同样可得其余两式.

对于(2),易知 I,B,I_A,C 四点共圆且 II_A 为该圆的直径,故 $II_A=BC\cdot\csc\angle BIC$.又$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$,故 $II_A=a\cdot\sec\frac{\angle A}{2}$.同样可得其余两式.

推论1 (1) $\frac{II_A\cdot I_BI_C}{a}=\frac{II_B\cdot I_CI_A}{b}=\frac{II_C\cdot I_AI_B}{c}=4R$;

(2) $\frac{I_BI_C\cdot I_CI_A\cdot I_AI_B}{abc}=\frac{4R}{r}$.

推论2 $\frac{S_{\triangle I_AI_BI_C}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2R}{r}$.

事实上,由 $I_BI_C\cdot II_A=I_BI_C(AI_A-AI)=2(S_{\triangle I_AI_BI_C}-S_{\triangle II_BI_C})$等三式相加,有

$II_A\cdot I_BI_C+II_B\cdot I_CI_A+II_C\cdot I_AI_B=4S_{\triangle I_AI_BI_C}$.

由推论1有 $II_A\cdot I_BI_C+II_B\cdot I_CI_A+II_C\cdot I_AI_B=4R(a+b+c)=4R\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{r}$,即证.

推论3 设$\triangle I_AI_BI_C$ 的外接圆半径为 R',则 $R'=2R$.

事实上,由 $2R'=I_BI_C\cdot\csc\angle BI_AC=I_BI_C\cdot\csc\left(90^\circ-\frac{\angle A}{2}\right)=a\cdot\csc\frac{\angle A}{2}\cdot\sec\frac{\angle A}{2}=2a\cdot\csc A=4R$,即证.或设 II_A 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D,连 BD,则$\angle BID=\angle BAI+\angle ABI=\angle CAI+\angle IBC=\angle CBD+\angle IBC=\angle IBD$,有 $DI=DB$,即 D 为 II_A 的中点.设 O'是 I 关于$\triangle ABC$ 外心 O 的对称点,则由三角形中位线性质知 $O'I_A=2OD=2R$.同理有 $O'I_B=O'I_C=2R$,即 O'为$\triangle I_AI_BI_C$ 的外心.

推论4 设$\triangle I_AI_BI_C$ 的内切圆半径为 r',则$\frac{I_BI_C+I_CI_A+I_AI_B}{a+b+c}=\frac{R'}{r'}$.

事实上,由 $r'(I_BI_C+I_CI_A+I_AI_B)=2S_{\triangle I_AI_BI_C}=\frac{4R\cdot S_{\triangle ABC}}{r}=\frac{R'\cdot 2S_{\triangle ABC}}{r}=R'(a+b+c)$即证.

推论 5 $\frac{1}{II_A^2}+\frac{1}{I_BI_C^2}=\frac{1}{a^2},\frac{1}{II_B^2}+\frac{1}{I_CI_A^2}=\frac{1}{b^2},\frac{1}{II_C^2}+\frac{1}{I_AI_B^2}=\frac{1}{c^2}$.

推论 6 (1)$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$;

(2)$IA+IB+IC\leqslant\sqrt{bc+ca+ab}$(Walber 不等式).

事实上,对于(1),由$\triangle IAC\backsim\triangle II_CI_A$及$\triangle IAB\backsim\triangle II_AI_B$,有$\frac{IA}{b}=\frac{II_C}{I_AI_C},\frac{IA}{c}=\frac{II_B}{I_AI_B}$,即$\frac{IA^2}{bc}=\frac{II_C\cdot II_B\cdot\sin(180^\circ-\angle I_BI_AI_C)}{I_AI_C\cdot I_AI_B\cdot\sin\angle I_BI_AI_C}=\frac{S_{\triangle II_BI_C}}{S_{\triangle I_AI_BI_C}}$.同理,$\frac{IB^2}{ca}=\frac{S_{\triangle II_CI_A}}{S_{\triangle I_AI_BI_C}},\frac{IC^2}{ab}=\frac{S_{\triangle II_AI_B}}{S_{\triangle I_AI_BI_C}}$,即证.

对于(2),由(1)及柯西不等式即证.

性质 7 设$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$分别切 BC,CA,AB 于 P,Q,R,内切圆$\odot I$分别切 BC,CA,AB 于 K,S,T,则 $BP=AQ=CK=p-c,PC=AR=BK=p-b,BR=CQ=AT=p-a$.

事实上,如图 16-1,可作 $I_AM\perp$直线 AB 于 M,则 $BM=BP$,而 $BM+AB=\frac{1}{2}(a+b+c)$,故 $BP=p-c=CK$.同理证其余式.

性质 8 设 AI_A 的连线交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D,则 $DI_A=DB=DC$(对于 BI_B,CI_C 也有同样的结论,略).

事实上,由性质 6 的推论 3 的证明即知结论成立.也可设 C_1 为 AB 延长线上的一点,由$\angle CBI_A=\angle C_1BI_A=\angle DI_AB+\angle I_AAB$,有$\angle DI_AB=\angle C_1BI_A-\frac{1}{2}\angle A=\angle CBI_A-\frac{1}{2}\angle A$,而$\angle CBD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle A$,则$\angle DBI_A=\angle CBI_A-\angle CBD=\angle CBI_A-\frac{1}{2}\angle A=\angle DI_AB$,故 $CD=BD=I_AD$.

性质 9 $\angle I_BI_AI_C=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$,

$\angle I_AI_BI_C=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C),\angle I_AI_CI_B=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$.

事实上,由$\angle I_BI_AI_C=\pi-\angle I_ABC-\angle I_ACB=\pi-\frac{\pi-\angle B}{2}-\frac{\pi-\angle C}{2}=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$,即得第一式.同理可推得其余两式.

性质 10 一个旁心与三角形三条边的端点连结所组成的三个三角形面积之比等于原三角形三条边长之比;三个旁心与三角形的一条边的端点连结所组成的三角形面

积之比等于三个旁切圆半径之比.

性质 11 过旁心 I_A 的直线交 AB,AC 所在直线分别于 P,Q,则

$$\frac{AB}{AP}\cdot\sin\angle B+\frac{AC}{AQ}\cdot\sin\angle C=-\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C.$$

事实上,可参见三角形内心的性质 7 即证.

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 16-2,在凸四边形 $ABCD$ 中,$AD\not\parallel BC$,从 A 点引内、外角平分线与从 B 点所引内、外角平分线相交于 K,L;又从 C 点引内、外角平分线与从 D 点引内、外角平分线相交于 P、Q.求证:K,L,P,Q 四点共线.

证明 由 $AD\not\parallel BC$,则可知 AD,BC 的延长线必相交,设交点为 E.就$\triangle ABE$ 来看,K 为其旁心,L 为其内心,因此,K,L,E 三点共$\angle AEB$ 的角平分线;就$\triangle CDE$ 来看,P 是其旁心,Q 是其内心,因此,P,Q,E 三点共$\angle DEC$ 的角平分线.故知 K,L,P,Q 共线于$\angle AEB$ 的角平分线.

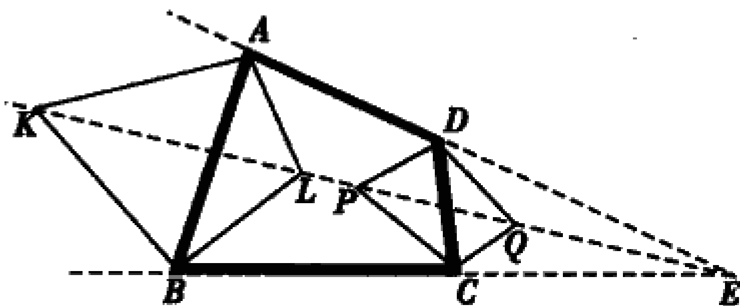


图 16-2

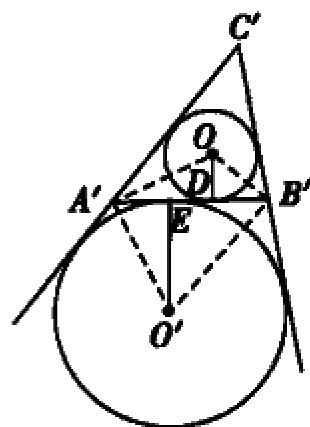


图 16-3

例 2 M 是$\triangle ABC$ 的边 AB 上的任意一点,r_1,r_2,r 分别是$\triangle AMC$,$\triangle BMC$,$\triangle ABC$ 内切圆的半径,q_1,q_2,q 分别是上述三角形在$\angle ACB$ 内部的旁切圆半径.证明:$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$.

(IMO-12 试题)

证明 如图 16-3,对任意的$\angle A'B'C'$,由正弦定理,知 $OD=OA'\cdot\sin\frac{1}{2}\angle A'=$

$$A'B'\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\angle B'}{\sin\angle A'OB'}\cdot\sin\frac{1}{2}\angle A'=A'B'\frac{\sin\frac{1}{2}\angle A'\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B'}{\sin\frac{1}{2}(\angle A'+\angle B')}.$$

同理,$O'E=A'B'\dfrac{\cos\frac{1}{2}\angle A'\cdot\cos\frac{1}{2}\angle B'}{\sin\frac{1}{2}(\angle A'+\angle B')}$.

从而$\frac{OD}{O'E}=\tan\frac{1}{2}\angle A'\cdot\tan\frac{1}{2}\angle B'$. (＊)

因此,在题设条件下,可应用(＊)式,即有

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\tan\frac{1}{2}\angle A\cdot\tan\frac{1}{2}\angle CMA\cdot\tan\frac{1}{2}\angle CMB\cdot\tan\frac{1}{2}\angle B$$

$$=\tan\frac{1}{2}\angle A\cdot\tan\frac{1}{2}\angle B=\frac{r}{q}.$$

例3 如图16-4,设⊙O是△ABC的边BC外侧相切的旁切圆,D,E,F分别是⊙O与BC,CA,AB所在直线的切点.若OD与EF相交于K,求证:AK平分BC.

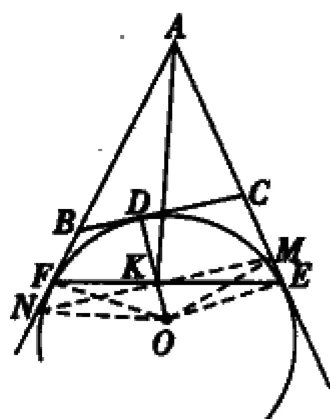


图16-4

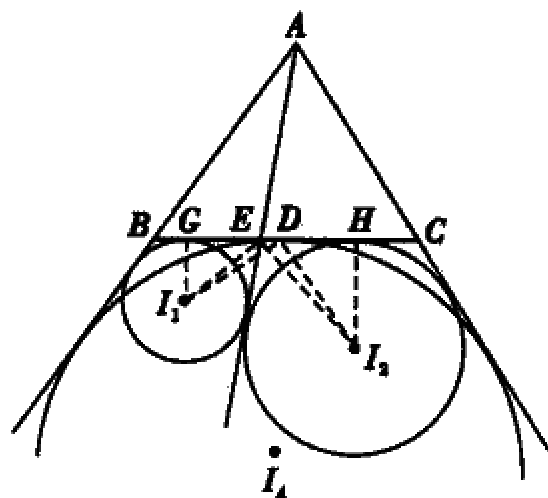
证明 过K作BC的平行线分别交AB,AC于N,M,连OE,OF,OM,ON.

由K,O,E,M四点共圆;O,K,F,N四点共圆,有$\angle OME=\angle OKE=\angle ONF$.而$OE=OF$,且$\angle OEM=\angle OFN=90°$,故

Rt△OEM≌Rt△OFN,从而$OM=ON$.

在等腰△OMN中,OK为底边MN上的高,从而$NK=KM$,即K为MN的中点,而$BC/\!/NM$,故知AK平分BC.

例4 如图16-5,D为△ABC的边BC外侧的旁切圆⊙I_A与BC的切点,E是BC上任一内点,△ABE及△ACE与BC边相切的旁切圆圆心分别为I_1,I_2.求证:$I_1D\perp I_2D$.



16-5

证明 设⊙I_1,⊙I_2分别切BC于G,H,连I_1E,I_1G,I_2E,I_2H,则有$I_1G\perp BC,I_2H\perp BC$.又$\angle I_1EI_2=\frac{1}{2}\angle BEC=90°$,故$I_1E\perp I_2E$.

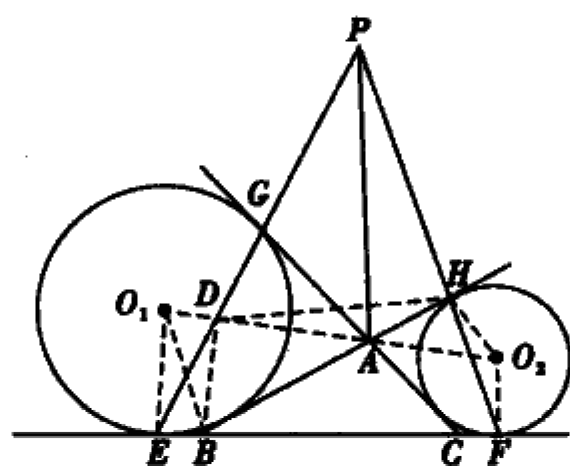
易知Rt△I_1GE∽Rt△EHI_2,从而$GE:I_2H=I_1G:EH$.

又设△ABE,△ACE,△ABC的半周长分别为p_1,p_1,p,则$BG=p_1-AB$,$BD=p-AB$,$p=p_1+p_2-AE$.于是$DG=BD-BG=p-p_1=p_2-AE=EH$.同理有$GE=DH$.

于是$I_2H:DH=DG:I_1G$,即有Rt△I_1GD∽Rt△DHI_2.故得$\angle I_1DG+\angle I_2DH=90°$,所以$\angle I_1DI_2=90°$,即$I_1D\perp I_2D$.

例5 如图16-6,⊙O_1与⊙O_2和△ABC的三边所在的三条直线都相切,E,F,G,H为切点,直线EG与FH交于点P.求证:$PA\perp BC$. (1996年全国高中联赛题)

证明 连 O_1O_2.由于$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 是$\triangle ABC$ 的两个旁切圆,显然 O_1O_2 过点 A.设 O_1O_2 与 EF 交于点 D,连 $O_1E, O_1B, BD, DH, O_2H, O_2F$.于是 $CE=CG$, $\angle CEG=90^\circ-\frac{1}{2}\angle C, BH=BF, \angle BHF=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B$.



16-6

又$\angle O_1DE=180^\circ-\angle ADE=180^\circ-(360^\circ-\angle DAB-\angle ABE-\angle BED)=-180+(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A)+(180^\circ-\angle B)+(90^\circ-\frac{1}{2}\angle C)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B=\angle O_1BE$,从而 O_1, E, B, D 四点共圆,即有$\angle O_1DB=180^\circ-\angle O_1EB=90^\circ$.

$\angle PDA=\angle O_1DE=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B=\angle BHF$,故由 A, H, P, D 四点共圆,有$\angle APH=\angle ADH, \angle O_2HB=\angle O_2FB=\angle O_2DB=90^\circ$,从而 B, D, H, O_2, F 五点共圆,即有$\angle ADH=\angle O_2FH$.

由$\angle APH=\angle O_2FH$,得 $PA/\!/O_2F$.

由 $O_2F\perp BC$,知 $PA\perp BC$.

例 6 如图 16-7,O, I 分别为$\triangle ABC$ 的外心和内心,AD 是 BC 边上的高,I 在线段 OD 上.求证:$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径. (1998 年全国高中联赛题)

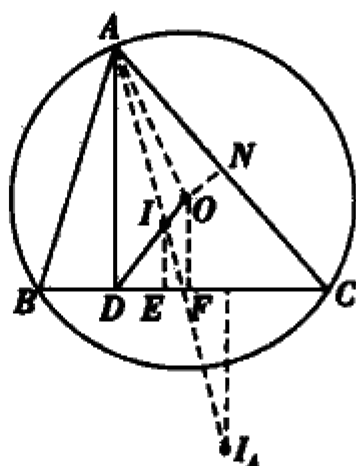


图 16-7

证明 连 AO,作 $IE\perp BC$ 于 E,作 $OF\perp BC$ 于 F.设 $BC=a$, $CA=b, AB=c$,外接圆、旁切圆半径分别为 R, r_A.

注意到 $AO=R$ 及 $2S_\triangle=r_A(b+c-a)$,再作 $ON\perp AB$ 于 N.由三角形外心性质,有$\angle AON=\angle ABD$,亦有$\angle BAD=\angle OAN$,即知 AI 平分$\angle DAO$(或由垂心性质 8).于是,由

$$\frac{R}{AD}=\frac{AO}{AD}=\frac{OI}{ID}=\frac{EF}{DE}=\frac{BF-BE}{BE-BD}\text{及}BF=\frac{a}{2}, BE=\frac{1}{2}(a+c-b),$$

$BD=c\cdot\cos\angle B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$,知

$$\frac{R}{AD}=\frac{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}(a+c-b)}{\frac{1}{2}(a+c-b)-\frac{1}{2a}(a^2+c^2-b^2)}=\frac{a}{b+c-a}.$$

从而 $R=\frac{a\cdot AD}{b+c-a}=\frac{a\cdot\frac{2S_{\triangle}}{a}}{b+c-a}=\frac{2S_{\triangle}}{b+c-a}=r_A$,即证.

例7 AD 是直角$\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高($AB<AC$),I_1、I_2 分别是$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心,$\triangle AI_1I_2$ 的外接圆$\odot O$ 分别交 AB、AC 于 E、F,直线 FE 与 CB 的延长线交于点 M.证明:I_1、I_2 分别是$\triangle ODM$ 的内心与旁心. (2008年江西省竞赛题)

证明 如图16-8,连 AI_1、DI_1、DI_2、BI_1、I_1F,由于$\angle EAF=90^\circ$,知圆心 O 在 EF 上,设直径 EF 交 AD 为 O'.

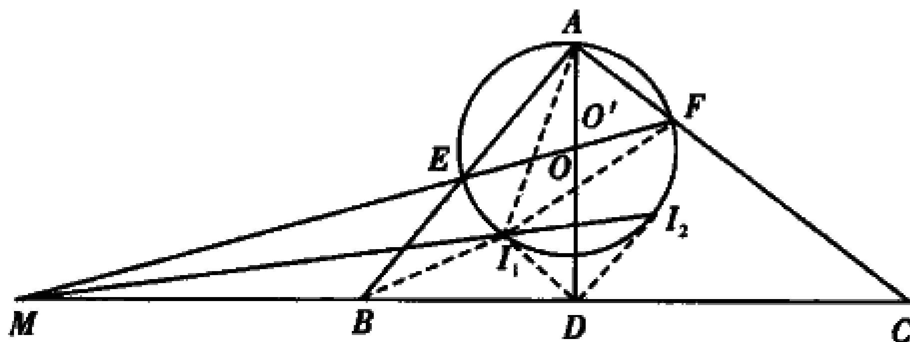


图16-8

由 Rt$\triangle ABD\backsim$ Rt$\triangle CAD$,

有 $\frac{DI_1}{DI_2}=\frac{DB}{DA}$,得 Rt$\triangle I_1DI_2\backsim$ Rt$\triangle BDA$,即有$\angle DI_1I_2=\angle B$.

由圆周角性质,有$\angle AI_1F=\angle AEF$,$\angle FI_1I_2=\angle FAI_2=\frac{1}{2}\angle B$.

由内心性质,有$\angle AI_1D=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B$.

于是由$\angle AI_1D=\angle AI_1F+\angle FI_1I_2+\angle DI_1I_2$,有

$90^\circ+\frac{1}{2}\angle B=\angle AEF+\frac{1}{2}\angle B+\angle B$.

从而$\angle AEF=90^\circ-\angle B=\angle C=\angle DAB$.因此 $O'E=O'A$.

同理,$O'F=O'A$,即知 O' 与 O 重合,即圆心 O 在 AD 上.

又$\angle EOD=\angle OEA+\angle OAE=2\angle OAE=2\angle C$,

$\angle EOI_1=2\angle EAI_1=\angle BAD=\angle C$,所以 OI_1 平分$\angle DOM$.

同理,OI_2 平分$\angle DOF$.

故 I_1 是$\triangle ODM$ 的内心,I_2 是$\triangle ODM$ 的一个旁心.

注 由此题还可得如下结论:①设$\odot O$ 交 AD 于 I_0,则 I_0 为$\triangle I_1I_2D$ 的内心;②EF 是$\odot I_1$、$\odot I_2$ 的公切线;③$\triangle DI_1I_2\backsim\triangle AFE$.

【解题思维策略分析】

1. 注意角平分线性质的应用

例 8 如图 16-9,在$\triangle ABC$中,已知$\angle B$内的旁切圆与CA相切于D,$\angle C$内的旁切圆与AB相切于E,过DE和BC的中点M,N作一直线.求证:直线MN平分$\triangle ABC$的周长,且与$\angle A$的角平分线平行.（1999年世界城市际竞赛题）

证明 过N作$D'E' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} DE$,使$N$点是$D'E'$的中点,则$DD' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} EE' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} MN$.

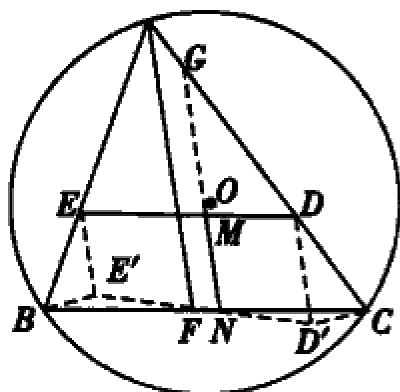


图 16-9

又因$BE=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)=CD$,且$BE' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} CD'$,所以$\triangle BEE' \cong \triangle CDD'$,即有$\angle BEE'=\angle CDD'$.

又$\angle BEE'+\angle CDD'=\angle BAC$,则$MN$平行$\angle A$的角平分线.

设$\angle A$的角平分线交BC于F,且设$AC \geqslant AB$,NM交CA于G,$\triangle ABC$的三条边长分别为$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,则$CN=\frac{a}{2}$,$CF=\frac{ab}{b+c}$(由$BF:FC=AB:AC$即得).

由于$NG /\!/ FA$,有$CG:CA=CN:CF$,即有$CG=b\cdot\frac{a}{2}/\frac{ab}{b+c}=\frac{b+c}{2}$,故$NC+CG=\frac{1}{2}(a+b+c)$,即$NG$平分$\triangle ABC$的周长.

2. 注意切线长定理的应用

例 9 如图 16-10,$\triangle ABC$中,$\angle A$内的旁切圆切$\angle A$的两边于A_1和A_2,$\angle B$内的旁切圆切$\angle B$的两边于B_1和B_2,直线A_1A_2与直线B_2B_1相交于C_3,直线A_1A_2与直线BC交于A_4;相似地定义A_3,B_3,B_4和C_1,C_2,C_4.求证:(1)A_4,B_4,C_4共直线;(2)$\triangle A_3B_3C_3$的外心是$\triangle ABC$的垂心.

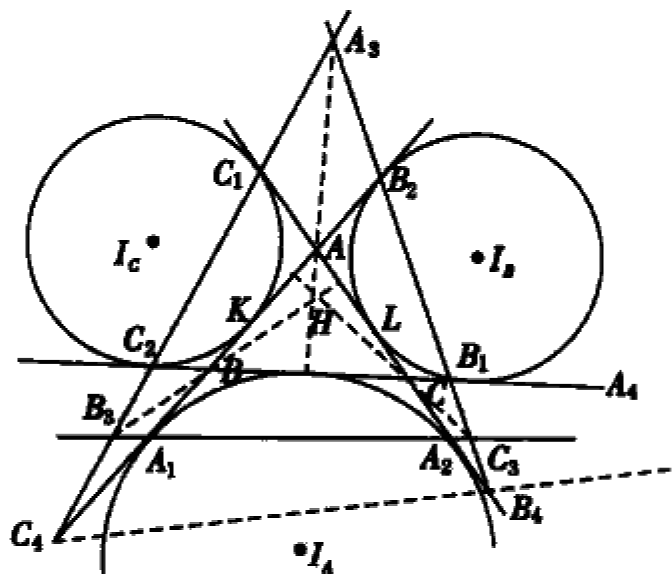


图 16-10

证明 (1)由切线长定理及梅涅劳斯定理,注意到C_i,B_i,A_i($i=1,2,4$)分别共线,则$\frac{AC_4}{BC_4}\cdot\frac{BC_2}{CC_2}\cdot\frac{CC_1}{AC_1}=1$,即$\frac{AC_4}{BC_4}=\frac{AC_1}{AC_2}$,$\frac{BA_4}{CA_4}\cdot\frac{CA_2}{AA_2}\cdot\frac{AA_1}{BA_1}=1$,即$\frac{BA_4}{CA_4}=$

$\frac{BA_1}{CA_2},\frac{CB_4}{AB_4}\cdot\frac{AB_2}{BB_2}\cdot\frac{BB_1}{CB_1}=1$，即$\frac{CB_4}{AB_4}=\frac{CB_1}{AB_2}$.

由此有$\frac{AC_4}{BC_4}\cdot\frac{BA_4}{CA_4}\cdot\frac{CB_4}{AB_4}=\frac{AC_1}{BC_2}\cdot\frac{BA_1}{CA_2}\cdot\frac{CB_1}{AB_2}$.　　(*)

记 AB 与$\odot I_C$ 相切于点 K，$\odot I_B$ 与 AC 相切于点 L，则由 $BB_1=BB_2$，可得 $BC_2=BK=\frac{1}{2}(B_1C_2-KB_2)$.

同理，$CB_1=CL=\frac{1}{2}(B_1C_2-LC_1)$，再由两内公切线长相等，即 $LC_1=KB_2$，便有 $BC_2=CB_1$.或直接由旁切圆性质 7，知 $BK=CL$，即知 $BC_2=CB_1$.

同理，$CA_2=AC_1$，$AB_2=BA_1$.将其代入(*)式，有$\frac{AC_4}{C_4B}\cdot\frac{BA_4}{A_4C}\cdot\frac{CB_4}{B_4C}=1$，故由梅涅劳斯定理之逆定理知 A_4,B_4,C_4 三点共直线.

对于上述结论，注意运用例 5 的结论，可简证如下：

由 $A_3A\perp BC$，$B_3B\perp CA$，$C_3C\perp AB$，即知 A_3A，B_3B，C_3C 为$\triangle ABC$ 的三条高所在的直线，从而 A_3A，B_3B，C_3C 三直线共点于$\triangle ABC$ 的垂心 H，亦即$\triangle ABC$ 与$\triangle A_3B_3C_3$ 的三组对应点的连线共点，故由戴沙格定理，知 A_4,B_4,C_4 三点共线.

(2)须证 $HA_3=HB_3=HC_3$.为证 $HB_3=HC_3$，须证$\angle HB_3C_3=\angle HC_3B_3$.但由 H 为$\triangle ABC$ 的垂心，知$\angle HBA=\angle HCA$，即$\angle B_3BA_1=\angle C_3CA_2$.

再由$\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1$(切线长定理)，便得$\angle HB_3C_3=\angle HC_3B_3$.

同理可证 $HA_3=HB_3$，故结论成立.

例 10　如图 16－11，半径为 ρ 的圆与$\triangle ABC$ 两边 AB，AC 相切，其圆心 K 到 BC 边的距离为 d.设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，r 与 p 分别表示$\triangle ABC$ 的内切圆半径和半周长.(1)证明：$a(d-\rho)=2p(r-\rho)$；(2)设$\angle A$ 内的$\triangle ABC$ 的旁切圆半径为 r_A，$\odot K$ 交 BC 边于 D，E，求证：

$DE=\sqrt{rr_A(\rho-r)(r_A-\rho)}/(r_A-r)$.　(IMO－31 预选题)

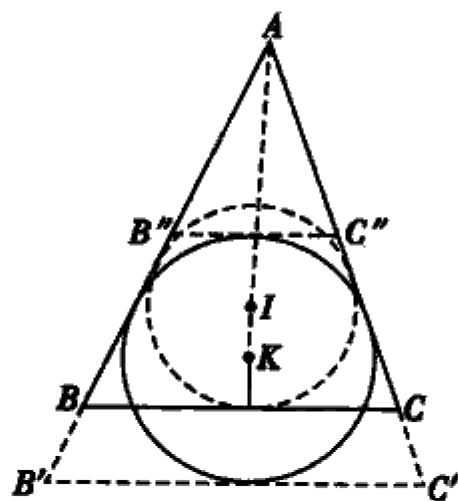


图 16－11

证明　(1)在$\odot K$ 的下方作$\odot K$ 的切线 $B'C'\parallel BC$，分别交 AB，AC 的延长线于 B'，C'，则$\triangle AB'C'\backsim\triangle ABC$，并且两个三角形的内切圆半径分别为 ρ，r.

设$\triangle ABC$，$\triangle AB'C'$ 的高分别为 h，h'，则 $\rho-d=h'-h=h(\frac{h'}{h}-1)=h(\frac{\rho}{r}-1)$，从而 $a(d-\rho)=ah(1-\frac{\rho}{r})=\frac{2S_{\triangle ABC}}{r}(r-\rho)=2p(r-\rho)$(其中

$p=\frac{1}{2}(a+b+c))$.

(2)显然有 $DE=2\sqrt{\rho^2-d^2}$,所以要证的等式即为

$$(\rho^2-d^2)(r_A-r)^2=4rr_A(\rho-r)(r_A-\rho). \quad (*)$$

在⊙K 的上方作⊙K 的切线 $B''C''\parallel BC$,分别交 AB,AC 于 B'',C''.设△$AB''C''$的高为 h'',其内切圆半径为 r',则由于⊙K 是△$AB''C''$的旁切圆,有 $\rho+d=h-h''=h(1-\frac{h''}{h})=h(1-\frac{r'}{r})=h(1-\frac{\rho}{r_A})$,所以

$$\rho^2-d^2=h^2(\frac{\rho}{r}-1)(1-\frac{\rho}{r_A})=\frac{h^2}{rr_A}(\rho-r)(r_A-\rho).$$

于是(*)式等价于 $h(r_A-r)=2rr_A$.

上式左边 $=h(\frac{S_{\triangle ABC}}{p-a}-\frac{S_{\triangle ABC}}{p})=\frac{ah\cdot S_{\triangle ABC}}{p(p-a)}=\frac{2S^2_{\triangle ABC}}{p(p-a)}=$ 右边.由此即证得结论成立.

例 11 如图 16-12,D 是△ABC 边 AB 上一点,圆 Γ_1 是△BCD 的角 B 内的旁切圆,分别切射线 BD 和射线 BC 于点 K,Q,圆 Γ_2 是△ACD 的角 A 内的旁切圆,分别切射线 AD 和射线 AC 于点 L,P,△ACD 的内切圆 Γ_3 分别切 AC,AD 于点 M 和 E,△BCD 的内切圆 Γ_4 分别切 BC 和 BD 于 N 和 F.(1)求证:$FK=EL=MP=NQ$;(2)若∠$ACB=90°$,确定点 D 的位置,使得凸四边形 $MNPQ$ 的面积最小. (1994 年保加利亚竞赛题)

解 (1)由切线长定理,知 $AE=AM$,$AP=AL$,$BK=BQ$,$BF=BN$.从而 $MP=AP-AM=AL-AE=EL$,$NQ=BQ-BN=BK-BF=FK$.

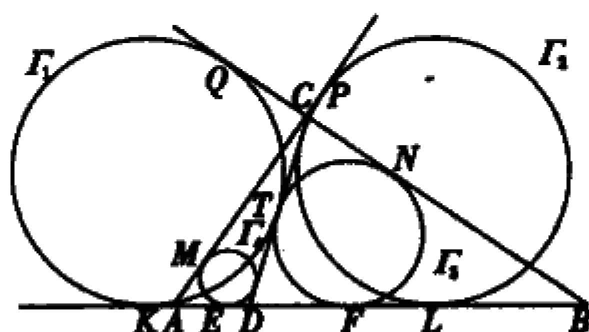


图 16-12

设圆 Γ_1 切 CD 于 T,则 $DT=DK$,$CT=CQ$,从而 $BK+BQ=(BD+DK)+(BC+CQ)=BD+BC+(DT+CT)=BD+BC+DC$.

从而 $BK=BQ=\frac{1}{2}(BD+BC+DC)$.

又 $BF=\frac{1}{2}(BF+BN)=\frac{1}{2}(BD+BC-CD)$,从而 $FK=BK-BF=CD$.

类似地,有 $EL=AL-AE$,而 $AL=\frac{1}{2}(AP+AL)=\frac{1}{2}(AC+AD+CD)$,$AE=\frac{1}{2}(AE+AM)=\frac{1}{2}(AD+AC-CD)$,故 $EL=CD$.

于是 $NQ=FK=CD=EL=MP$.

(2)由于$\angle ACB = 90°$,则 $NQ \perp MP$, $S_{MNPQ} = S_{\triangle MNP} + S_{\triangle MQP} = \frac{1}{2}(MP \cdot CN + MP \cdot CQ) = \frac{1}{2}MP \cdot NQ$.注意到结论(1),知 $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}CD^2$.故当且仅当 CD 最小时,S_{MNPQ}最小.由于$\triangle ABC$ 给定,当 $CD \perp AB$ 时,CD 长最小.即当点 D 是 C 在斜边 AB 上的射影时,S_{MNPQ}最小.

3. 注意旁心与内心的联系

从前面的旁心性质可以看到:关于三角形内心的一些性质,都有关于旁心的类似的性质;反过来也一样.其实旁心与内心有关结论之间存在一个转换原理:用 l_a, l_b, l_c 表示三角形各内角 A, B, C 的角平分线的长,$\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ 表示各对应外角平分线长,所以如字母前面定义.如果在任意一个三角形的公式中,作如下代换,就得到一个正确的公式.

a	b	c	p	$p-a$	$p-b$	$p-c$	用
a	$-b$	$-c$	$-(p-a)$	$-p$	$p-c$	$p-b$	取代;
r	r_A	r_B	r_C	R			用
r_A	r	$-r_C$	$-r_B$	$-R$			取代;
l_a	l_b	l_c	λ_a	λ_b	λ_c		用
$-l_a$	$-\lambda_b$	$-\lambda_c$	$-\lambda_a$	$-l_b$	$-l_c$		取代.

未列入的量可作类似的说明.这个表格,可以用前面的公式或其他地方的公式进行试验,证实它的正确性.

因此,有些涉及旁心的问题,若将旁心改为内心结论仍然成立;有些涉及内心的问题,若将内心改为旁心,结论也仍然成立.

例 12 设$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的 BC 边外侧的旁边圆,D, E, F 分别是$\odot O$ 与 BC, CA 和 AB 的切点.(1)若 OD 与 EF 相交于 K,求证:AK 平分 BC;(2)已知 $BC = a, AC = b, AB = c$,且 $b > c$.求 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BKC}$.

(1999 年四川省竞赛题)

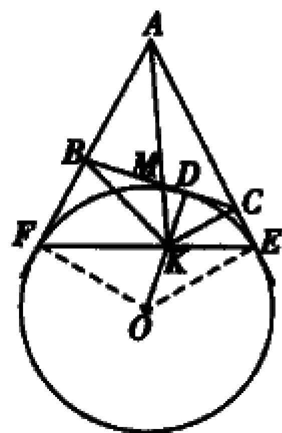


图 16-13

证明 (1)如图 16-13,设 AK 与 BC 交于 M 点,连 OE, OF.

$\because \angle ABC = \angle DOF = \angle B, \angle ACB = \angle DOE = \angle C$,

$\therefore \frac{FK}{KE} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$.

又$\frac{FK}{\sin\angle FAK} = \frac{AF}{\sin\angle AKF} = \frac{AE}{\sin\angle AKE} = \frac{KE}{\sin\angle KAE}$,

故有$\frac{\sin\angle B}{\sin\angle FAK} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle KAE}$.

由$\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{\frac{BM}{AM}}{\frac{CM}{AM}}=\dfrac{\sin\angle FAK/\sin\angle B}{\sin\angle KAE/\sin\angle C}=1$，即 $BM=MC$.

解 (2)作 $AH\perp BC$ 于 H，由$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BKC}}=\dfrac{AH}{KD}$，

$\triangle AHM\backsim\triangle KDM$，显然有$\dfrac{AH}{KD}=\dfrac{HM}{MD}$.

而 $HM=\dfrac{a}{2}-c\cdot\cos\angle B=\dfrac{a}{2}-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\dfrac{b^2-c^2}{2a}$，

$MD=\dfrac{a}{2}-\dfrac{a-b+c}{2}=\dfrac{b-c}{2}$，

故$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BKC}}=\dfrac{b+c}{a}$.

将上述问题中的“旁切圆”改为“内切圆”，结论仍然成立.

证明如下：如图 16 - 14，设 AK 的延长线交 BC 于 M，连 OE，OF，则$\angle B=\pi-\angle DOF$，$\angle C=\pi-\angle DOE$，故易知$\dfrac{FK}{EK}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$.

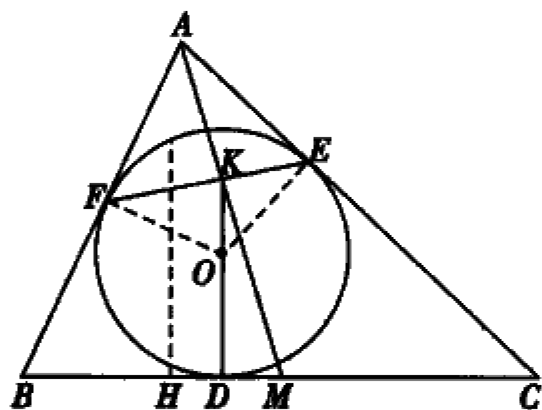


图 16 - 14

又$\dfrac{FK}{\sin\angle FAK}=\dfrac{AF}{\sin\angle AKF}=\dfrac{AE}{\sin\angle AKE}=\dfrac{EK}{\sin\angle KAE}$，

$\therefore\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle FAK}=\dfrac{\sin\angle C}{\sin\angle KAE}$.

从而$\dfrac{BM}{CM}=\dfrac{\frac{BM}{AM}}{\frac{CM}{AM}}=\dfrac{\frac{\sin\angle FAK}{\sin\angle B}}{\frac{\sin\angle KAE}{\sin\angle C}}=1$，故 $BM=CM$.

两个三角形面积比 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BKC}=(b+c):a$.

例 13 设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，其$\triangle ABC$ 内切圆切三边 BC，CA 和 AB 交于点 K，L，M，过 B 点平行于 MK 的直线分别交直线 LM 和 LK 于点 R 和 S. 求证：$\angle RIS$ 为锐角.

(IMO - 39 试题)

姊妹题 设 I 为$\triangle ABC$ 的旁心，其$\triangle ABC$ 旁切圆切边 AC 于点 L，切边 BA 和 BC 的延长线分别于点 M 和 K，过点 B 平行于 MK 的直线分别交直线 LM 和 LK 于点 R 和 S. 求证：$\angle RIS$ 为锐角.

证明 如图 16 - 15，连 BI，MI，KI.

在$\triangle BKS$ 与$\triangle LMK$ 中，$\angle LKM=\angle KSB$，$\angle BKS=\angle LMK$.

于是$\triangle BKS \backsim \triangle LMK$，从而$\frac{KS}{BK}=\frac{LK}{LM}$.

同理可证$\frac{BR}{BM}=\frac{LM}{LK}$.

于是 $BS\cdot BR=BK\cdot BM$.

又显然 $BI\perp MK$，$BK=BM$，从而 $BS\cdot BR=BM^2<BI^2$，即 $BS\cdot BR<BI^2$.这表明，在 BI 内存在点 P，使得 $BR\cdot BS=BP^2$.

在$\triangle RPS$ 中，应用射影定理的逆定理，可知$\angle RPS=90°$，于是点 I 在以 RS 为直径的圆外，从而$\angle RIS<90°$.

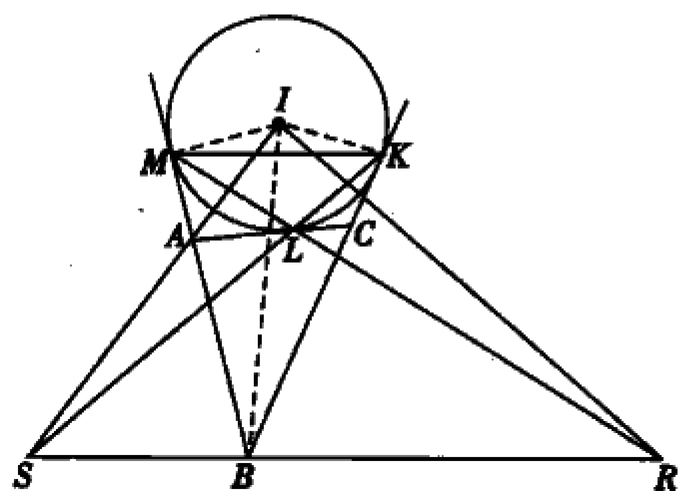


图 16－15

例 14 在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，连$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 的内心的直线分别交 AB，AC 于 K，L，$\triangle ABC$ 和$\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 和 T.求证：$S\geqslant 2T$.

（IMO－29 试题）

证明 如图 16－16，设$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心分别为 M，N.连 AM，AN，DM，DN，且连 CN 并延长交 AM 于 P，连 BM 并延长交 CP 于 H，交 AN 于 Q.

由于 M，N 分别是$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心，则 BH，CH 分别为$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线，H 为$\triangle ABC$ 的内心.

由 $AD\perp BC$，$AB\perp AC$，可得$\angle BAD=\angle ACD$.又因 AM，CN 分别为$\angle BAD$、$\angle ACD$ 的平分线，所以$\angle PAD=\angle PCD$，从而 P，A，C，D 四点共圆，$\angle APC=\angle APC=90°$，即 $CP\perp AM$.

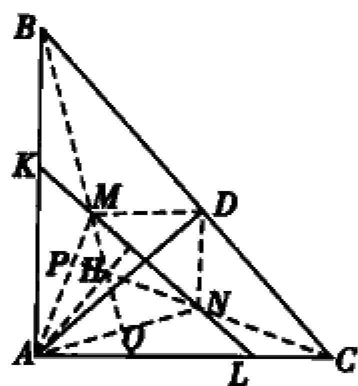


图 16－16

同理，可证 $BQ\perp AN$，因此 H 又为$\triangle AMN$ 的垂心.连结 AH，有 $AH\perp MN$，即 $AH\perp KL$.又$\angle KAH=\angle LAH$，所以 $AK=AL$，$\angle ALK=45°=\angle ADN$，从而$\triangle ADN\cong\triangle ADN$，$AD=AL$，于是 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC$，$T=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}AD^2=\frac{AB^2\cdot AC^2}{2(AB^2+AC^2)}\leqslant\frac{AB^2\cdot AC^2}{2\cdot 2AB\cdot AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}S$.故 $S\geqslant 2T$.

如果把$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心 M，N 都变成其旁心，就成为下面的问题.

姊妹题 在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，$\triangle ABD$ 中 AB 边的旁心为 M，$\triangle ACD$ 中 AC 边的旁心为 N，直线 MN 分别交 BA，CA 的延长线于 K，L.$\triangle ABC$，$\triangle AKL$ 的面积分别记为 S，T.求证 $S\geqslant 2T$.

证明 如图 16－17，作辅助线.因 M，N 分别为$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的旁心，所以 BH，CH 分别为$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的外角平分线，H 为$\triangle ABC$ 的旁心.

由$\angle BAD=\angle ACD$,得$\angle BAE=\angle ACF$(F为BC延长线上的点).

故$\angle BAM=\angle ACN$,从而$\angle MAD=\angle PCD$,A,P,C,D四点共圆,$\angle APC=180°-\angle ADC=90°$,$AP\perp PC$,即$MP\perp NH$.

同理,$NQ\perp AM$,因此A为$\triangle MNH$的垂心,$HA\perp MN$,即$HA\perp LK$.又$\angle LAG=\angle CAH$,$\angle KAG=\angle BAH$,而$\angle CAH=\angle BAH$,所以$\angle LAG=\angle KAG=45°$,进而$\angle ALK=45°$,$AK=AL$.另一方面,$\triangle ALN\cong\triangle ADN$,有$AL=AD$,从而$T=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}AD^2=\frac{AB^2\cdot AC^2}{2(AB^2+AC^2)}\leqslant\frac{AB^2\cdot AC^2}{2\cdot 2AB\cdot AC}\leqslant\frac{1}{2}S$.

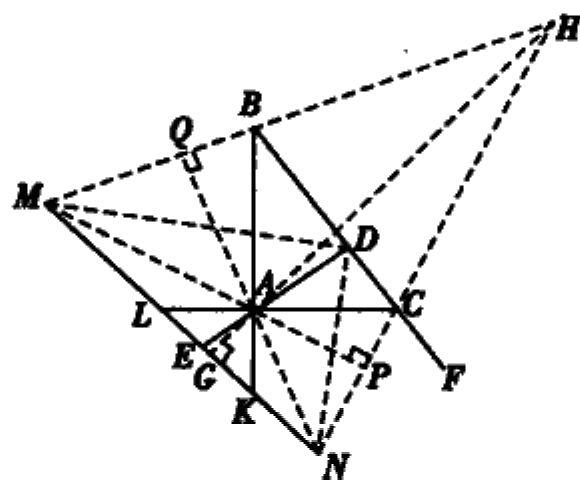


图 16-17

注 直角三角形有一系列有趣的数量关系,这可参见笔者著作《平面几何证明方法全书》,哈尔滨工业大学出版社2005年出版.

【模拟实战】

习题 A

1. PA,PB切$\odot O$于A,B两点,过OP与AB的交点Q任作$\odot O$的弦CD.求证:$\triangle PAB$与$\triangle PCD$有一个相同的旁心.
2. $\triangle ABC$的外接圆半径为R,$\angle A$内的旁切圆半径为r_A,两圆的圆心距为d_A.求证:$d_A^2=R^2+2Rr_A^2$.
3. 在锐角$\angle XAY$内部取一点D,便得$\angle ABC=\angle XBD$,$\angle ACB=\angle YCD$.证明:$\triangle ABC$的外心在线段AD上.
4. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,令$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,r,r_A,r_B,r_C分别表示其内切圆及与a,b,c边外侧相切的旁切圆半径.求证:(1)$p(p-c)=(p-a)(p-b)$;(2)$r+r_A+r_B+r_C=2p$.
5. $\triangle ABC$的内切圆$\odot O$切BC于D,DE为内切圆的直径,直线AE交BC于F.求证:$BD=CF$.
6. $\odot I$的外切四边形$ABCD$,分别延长BA与CD相交于E,分别延长AD与BC相交于F,且设$\angle BEC=\alpha$,$\angle AFB=\beta$.求证:$\frac{AD\cdot BC}{AB\cdot CD}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

习题 B

1. 给定$\triangle ABC$,令 $p=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$,圆 Γ_1 是角 A 内的旁切圆(切于线段 BC,与射线 AB 和射线 AC 相切的圆),圆 Γ 分别切圆 Γ_1 和$\triangle ABC$ 的内切圆 Γ_2 于点 Q 和 P,直线 PQ 和$\angle BAC$ 的内角平分线交于 R, RT 是圆 Γ 的切线.求证: $RT=\sqrt{p(p-a)}$,其中 $a=BC$. (1994 年冬保加利亚十二年级奥林匹克题)
2. 给定$\triangle ABC$, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $b\geqslant a$.点 O 是$\triangle ABC$ 内切圆 Γ 的圆心,$\triangle ABC$ 的角 C 内的旁切圆切 AB 于点 P,点 M 是 AB 的中点,点 Q 是直线 MO 与 BC 的交点.(1)求证: $PM=\frac{1}{2}(b-a)$;(2)求 PQ 的长. (1994 年春保加利亚九年级竞赛题)
3. 在$\triangle ABC$ 的内切圆 O 上作平行于三角形每一边的切线,这些切线从$\triangle ABC$ 截得的三个小三角形 AED, BGF, CIH(E, F 在 AB 上, G, H 在 BC 上, I, D 在 AC 上),它们的内切圆半径依次为 r_1, r_2, r_3,又$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r.求证: $r=r_1+r_2+r_3$.
4. A, B, C, D 四点共圆,另一圆心在 AB 上,且与四边形 $ABCD$ 的其余三边相切.求证: $AD+BC=AB$. (IMO-26 试题)

第十七章 关联三角形巧合点的性质及应用

三角形的巧合点在这里是指三角形的外心、内心、重心、垂心、旁心. 三角形的巧合点各自具有不同的有趣性质,我们已在前面各章做了介绍. 这里介绍关联这些巧合点中的某些点或全体点的一些性质及应用的实例.

【基础知识】

在前面有关章节中,也曾涉及两心或多心的有关结论,为了方便,有几条也重新罗列出来.

性质 1 三角形的任一顶点到垂心的距离,等于外心到对边的距离的两倍.

性质 2 三角形的外心是外心在各边上射影三角形的垂心.

性质 3 三角形的内心和任一顶点的连线与三角形外接圆相交,这个交点与外心的连线是这一顶点所对的边的中垂线.

性质 4 三角形的内心和任一顶点的连线,平分外心、垂心和这一顶点的连线所成的角.

性质 5 三角形的外心与垂心的连线的中点是九点圆的圆心.

性质 6 三角形的外心 O,重心 G,九点圆圆心 V,垂心 H,这四心共线,且 $OG:GH=1:2$, $GV:VH=1:3$.

性质 7 三角形内心与旁心构成一垂心组;三角形内心与旁心的九点圆是外接圆;三角形的外接圆平分内心与旁心的每一条连线段.

性质 8 设$\triangle ABC$ 的外心为 O,内心为 I,则 I 为旁心$\triangle I_AI_BI_C$ 的垂心,I 关于 O 的对称点 O' 是$\triangle I_AI_BI_C$ 的外心,$\triangle I_AI_BI_C$ 的欧拉线与直线 OI 重合.

性质 9 三角形的面积是其旁心三角形面积与内切圆切点三角形面积的等比中项.

性质 10 三角形的旁心三角形与内切圆切点三角形的欧拉线重合.

性质 11 设 H,G,I 分别为三边两两互不相等的三角形的垂心、重心、内心,则$\angle HIG>90°$.

事实上,不妨设 $BC>AC>AB$,过 G 作直线 $l\parallel BC$,这时易证射线 AI 必处于$\angle HAG$ 内部,点 I 在直线 l 上方,在 CH 下方. 于是 I 在以 GH 为直径的圆内,从而

$\angle HIG$ 是钝角或平角.

性质 12 锐角$\triangle ABC$ 中,外心 O 到三边距离之和记为 $d_{外}$,重心 G 到三边距离之和记为 $d_{重}$,垂心 H 到三边距离之和记为 $d_{垂}$,则 $1\cdot d_{垂}+2\cdot d_{外}=3\cdot d_{重}$.

事实上,如图 17-1,设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1,三个内角记为 A,B,C,易知

$d_{外}=OO_1+OO_2+OO_3=\cos A+\cos B+\cos C$,则 $2d_{外}=2(\cos A+\cos B+\cos C)$.

因 $AH_1=\sin B\cdot AB=2\sin B\cdot\sin C$. 同理得 AH_2, AH_3.

于是 $3d_{重}=3GG_1+3GG_2+3GG_3=AH_1+BH_2+CH_3=2(\sin B\cdot\sin C+\sin C\cdot\sin A+\sin A\cdot\sin B)$.

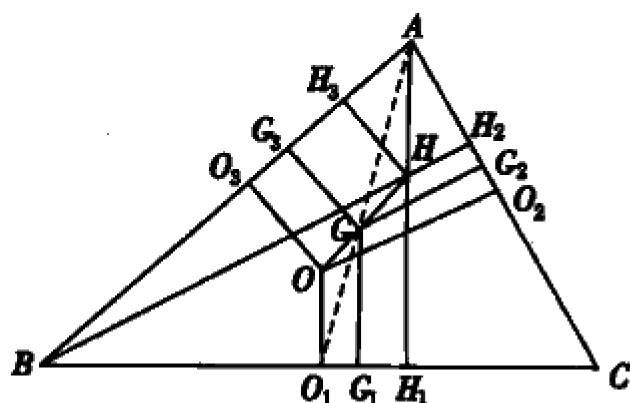


图 17-1

设 AH 的延长线交$\triangle ABC$ 的外接圆于 H',则

$BH=BH'=2\sin\angle BAH'=2\cos B$, $HH_1=BH\cdot\cos\angle BHH_1=BH\cdot\cos C=2\cos B\cdot\cos C$. 同理可得 HH_2, HH_3,从而

$d_{垂}=HH_1+HH_2+HH_3=2(\cos B\cdot\cos C+\cos C\cdot\cos A+\cos A\cdot\cos B)$,于是由 $\cos B\cdot\cos C+\cos C\cdot\cos A+\cos A\cdot\cos B-\sin B\cdot\sin C-\sin C\cdot\sin A-\sin A\cdot\sin B=\cos(B+C)+\cos(C+A)+\cos(A+B)=-(\cos A+\cos B+\cos C)$,即证.

性质 13 设$\triangle ABC$ 的外接圆、内切圆半径分别为 R,r,外心为 O,内心为 I,垂心为 H,重心为 G,顶点 A 所对的边的旁切圆的圆心为 I_A,半径为 r_A(其余类推),$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,则

(1) $OI^2=R^2-2Rr$;

(2) $IG^2=\frac{1}{6}(a+b+c)^2-\frac{5}{18}(a^2+b^2+c^2)-4Rr$

$$=r^2-\frac{1}{36}[6(ab+bc+ca)-5(a^2+b^2+c^2)];$$

(3) $OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$;

(4) $HG^2=4R^2-\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$;

(5) $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$;

(6) $IH^2=4R^2-\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c}=2r^2-4R^2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$;

(7) $II_A^2=4R(r_A-r)$, $II_B^2=4R(r_B-r)$, $II_C^2=4R(r_C-r)$;

(8) $I_AI_B^2=4R(r_A+r_B)$, $I_BI_C^2=4R(r_B+r_C)$, $I_AI_C^2=4R(r_A+r_C)$;



(9) $DI_A^2=R^2+2Rr_A$, $OI_B^2=R^2+2Rr_B$, $OI_C^2=R^2+2Rr_C$.

性质 14 有关字母同性质 8 所设，设 R^* 为 $\triangle I_AI_BI_C$ 的外接圆半径，O^* 为其外心，则 (1) $R^*=2R$；(2) $IO^*=2IO$.

性质 15 有关字母同性质 13 所设，令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则有心径公式

(1) $OA=OB=OC=R$；

(2) $HA=2R|\cos A|$, $HB=2R|\cos B|$, $HC=2R|\cos C|$；

(3) $IA=4R\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$，…等三式；

(4) $I_AA=4R\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=\frac{r_A}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{P}{\cos\frac{A}{2}}$，…等三式；

(5) $GA=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$，…等三式.

性质 16 设 P 为 $\triangle ABC$ 平面内的点，AP, BP, CP 所在直线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A', B', C'，则

(1)若 P 为 $\triangle ABC$ 的外心，对锐角三角形，有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle ABC'}$；

对非锐角三角形(不妨设 $\angle A\geqslant 90°$，下同)，有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'BC}-S_{\triangle AB'C}-S_{\triangle ABC'}$；

(2)若 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心，有同(1)的结论；

(3)若 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，有 $S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle ABC'}$，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号取得；

(4)若 P 为 $\triangle ABC$ 的内心，有同(3)的结论.

性质 17 在 $\triangle ABC$ 中，内心到外心的距离等于重心到外心的距离的充要条件是 $a^2+b^2+c^2=18Rr$.

性质 18 三角形的内心与外心之距离等于内心到垂心之距离的充要条件是有一个角为 60°.

性质 19 三角形的内心、外心、垂心与两顶点五点共圆的充要条件是另一顶点的内角为 60°.

性质 20 设 P 是 $\triangle ABC$ 的巧合点，连 AP 交 BC 于 D，过 P 的直线分别与 AB, AC 所在直线交于 E, F，则 $\frac{AD}{AP}=\frac{AB}{AE}\cdot\frac{CD}{BC}+\frac{AC}{AF}\cdot\frac{BD}{BC}$.

特别地，当 P 分别为外心 O，内心 I，垂心 H，重心 G，角 A 内的旁心 I_A 时，有

(1) $\frac{AB}{AE}\cdot\sin 2B+\frac{AC}{AF}\cdot\sin 2C=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$；

(2) $\frac{AB}{AE}\cdot\sin B+\frac{AC}{AF}\cdot\sin C=\sin A+\sin B+\sin C$;

(3) $\frac{AB}{AE}\cdot\tan B+\frac{AC}{AF}\cdot\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$;

(4) $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=3$;

(5) $\frac{AB}{AE}\cdot\sin B+\frac{AC}{AF}\cdot\sin C=-\sin A+\sin B+\sin C$.

事实上，由 $\frac{AD}{AP}=\frac{AD+DP}{AP}=\frac{S_{\triangle AEF}+S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{S_{\triangle AED}+S_{\triangle AFD}}{\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{AE}{AB}\cdot S_{\triangle ABD}+\frac{AF}{AC}\cdot S_{\triangle ACD}}{\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=\frac{AC}{AF}\cdot\frac{BD}{BC}+\frac{AB}{AE}\cdot\frac{CD}{BC}$，及 $\frac{AD}{AO}=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2B+\sin 2C}$，$\frac{AD}{AI}=\frac{AB+CA+BC}{AB+AC}$，$\frac{AD}{AH}=\frac{AD\cdot\tan A}{BC}$，$\frac{AD}{AG}=\frac{3}{2}$，$\frac{AD}{AI_A}=\frac{AB+AC-BC}{AB+AC}$等式，即可推得.

性质 21 设 P 是$\triangle ABC$ 的巧合点，直线 AD，BP，CP 分别与边 BC，CA，AB 或其延长线交于 D，E，F，则对于有向线段的比，有$\frac{PD}{AP}+\frac{PE}{BP}+\frac{PF}{CP}=1$.

事实上，当 P 为$\triangle ABC$ 所在平面内任一点上式均成立.引入三角形有向面积，运用面积比即证.

【典型例题与基本方法】

例 1 凸四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 M，点 P，Q 分别是$\triangle AMD$ 和$\triangle CMB$ 的重心，R，S 分别是$\triangle DMC$ 和$\triangle MAB$ 的垂心.求证：$PQ\perp RS$. （2003 年国家队训练题）

证明 如图 17－2，作▱$AMDX$ 与▱$CMBY$，连 MX，MY；SA，SB，SX，SY；RC，RD，RX，BY.

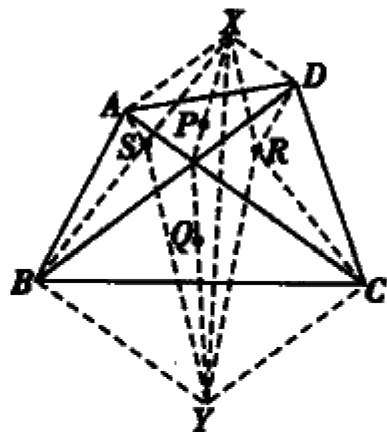


图 17－2

由重心的性质，知 P 在 MX 上且 $MP=\frac{1}{3}MX$，Q 在 MY 上且 $MQ=\frac{1}{3}MY$，所以 $PQ/\!/XY$ 或 P，Q，X，Y 四点共线.

又因为 R 是$\triangle CDM$ 的垂心，故 $DR\perp CM$，结合 $DX/\!/CM$，可知 $DR\perp DX$.同理 $CR\perp CY$，$AS\perp AX$，$BS\perp BY$.所以 $(SX^2+RY^2)-(RX^2+SY^2)=(AS^2+AX^2+CR^2+CY^2)-(DR^2+DX^2+SB^2+BY^2)=(AS^2+BM^2-BS^2-AM^2)+(CR^2+DM^2-DR^2-CM^2)=0$.

于是 $SX^2+RY^2=RX^2+SY^2$，故 $RS\perp XY$，$RS\perp PQ$.

例 2 如图 17－3，在非等边△PQR 中，X，Y，Z 分别是 QR，RP，PQ 的中点，△PQR 的垂心是 H，外心是 M，△XYZ 的外心是 O，则△XYZ 的垂心也是 M，并且 O 为 MH 的中点.

证明 连 PX，QY，RZ 交于点 G，则 G 为△PQR 与△XYZ 之重心.

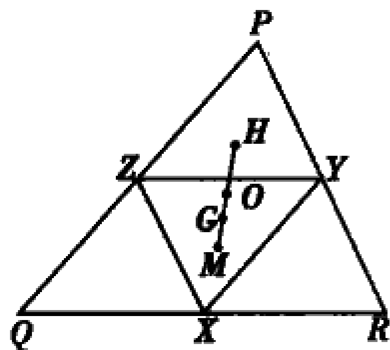


图 17－3

因为 $PG:GX=QG:GY=RG:GZ=2:1$，所以△PQR 与△XYZ 是以 G 为似位中心，且位似比为 2:1 的位似形.

因为 $MP=MQ$，所以 $MZ\perp PQ$，因此 $MZ\perp XY$.

同理 $MY\perp XZ$，所以 M 为△XYZ 的垂心.

由位似性质知 $MG=2GO$ 且 G 在线段 MO 上，$HG=2GM$ 且 G 在线段 MH 上，所以 O 为 MH 的中点.

例 3 如图 17－4，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，对角线 $AC\perp BD$，$OE\perp AB$ 于 E. 求证：$OE=\frac{1}{2}CD$.

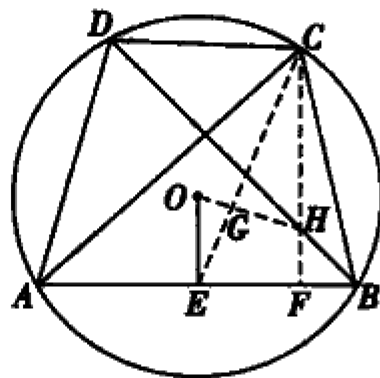


图 17－4

证明 作 $CF\perp AB$ 于 F，CF 交 BD 于 H，则 H 为△ABC 的垂心. 连 CE 交 OH 于 G，因 O 为△ABC 的外心，则 G 为△ABC 的重心，且 $GH:OG=2:1$.

由 $OE/\!/CF$，有 $CH:OE=GH:OG=2:1$.

又$\angle ACD=\angle ABD=\angle ACF$，则 $CD=CH$，从而 $CD:OE=2:1$. 即 $OE=\frac{1}{2}CD$.

【解题思维策略分析】

1. 注意巧合点各自性质的联用

例 4 如图 17－5，在△ABC 中，$\angle ACB=30°$，$\angle ABC=50°$，M 为形内一点，$\angle MAC=40°$，$\angle MCB=20°$. 求$\angle MBC$ 的度数. （《数学通报》1999 年 9 期 1208 号问题）

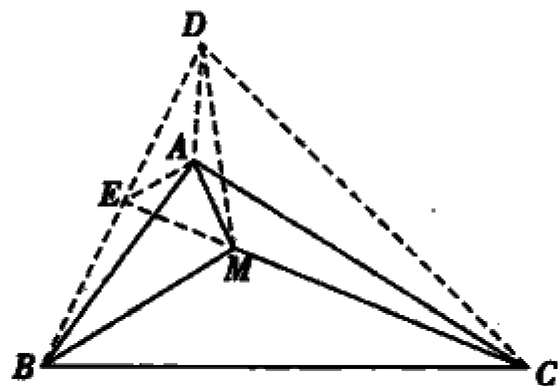


图 17－5

解 在 CM 的延长线上取一点 E，使$\angle EBC=60°$，在 BE 延长线上取一点 D，使$\angle DCB=40°$，连 DA，DM，DC，EA. 易知 $CA\perp DB$，$BA\perp DC$，即 A 为△BCD 的垂心，可知$\angle ADB=30°$.

在△CDE 中，易知$\angle ECD=20°$，$\angle BDC=80°$，可知$\angle DEC=80°=\angle EDC$. 又 $EC=DC$，且 AC 为$\angle DCE$ 的平分线，即 AC 为 DE 的中垂线，从而 $AD=AE$，$\angle AED=30°$，$\angle AEM=50°$. 又$\angle AME=\angle MAC+\angle MCA=50°$，故 $AM=AE=AD$，即 A 为△DEM 的外

心，于是$\angle MDE=\frac{1}{2}\angle MAE=40^\circ$.

由$\angle BDC=80^\circ$，可知 DM 平分$\angle BDC$．又 CM 平分$\angle BCD$，知 M 为$\triangle BCD$ 的内心，故$\angle MBC=\frac{1}{2}\angle DBC=30^\circ$.

例 5 如图 17－6，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=30^\circ$，O 是外心，I 是内心，边 AC 上的点 D 与边 BC 上的点 E 使得 $AD=BE=AB$．求证：$OI\perp DE$，$OI=DE$.

（1988 年中国奥林匹克集训题）

证明 作$\angle DAO$ 的平分线交 BC 于 K，连 AI，BI，DI，EI，AO，易证$\triangle AID\cong\triangle AIB\cong\triangle EIB$，$\angle AID=\angle AIB=\angle EIB$，而$\angle AIB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C=105^\circ$，则$\angle DIE=360^\circ-105^\circ\cdot 3=45^\circ$.

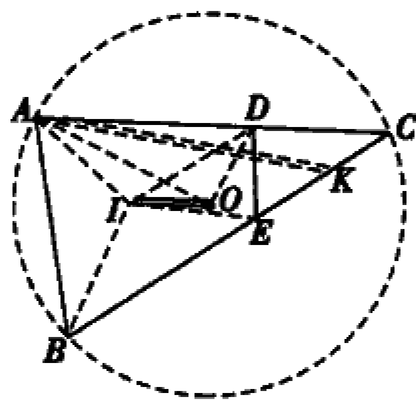


图 17－6

又$\angle AKB=30^\circ+\frac{1}{2}\angle DAO=30^\circ+\frac{1}{2}(\angle BAC-\angle BAO)=\frac{1}{2}\angle BAC=\angle BAI=\angle BEI$，知 $AK\,/\!/\,IE$．又由 $AO=AB=AD$，可证 $DO\perp AK$，于是 $DO\perp IE$．同理 $EO\perp ID$．故 O 是$\triangle DIE$ 的垂心，从而 $IO\perp DE$．由$\angle DIE=\angle IDO$ 及垂心性质（$\triangle IDE$ 与$\triangle IOD$ 的外接圆是等圆），可证 $OI=DE$.

2．注意巧合点关联性质的运用

例 6 如图 17－7，$\triangle ABC$ 是一个直角三角形，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，$\angle B>\angle A$．O 是$\triangle ABC$ 的外心，I 是其内心．求证：$\angle BIO$ 是一个直角当且仅当$\frac{BC}{3}=\frac{CA}{4}=\frac{AB}{5}$.

（1994 年中国奥林匹克集训题）

证明 因$\angle BIO=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow IO\perp BI\Leftrightarrow BI^2+IO^2=BO^2$

$$\overset{\text{性质13,15}}{\Leftrightarrow}\frac{r^2}{\sin^2\frac{B}{2}}+(R^2-2Rr)=R^2$$

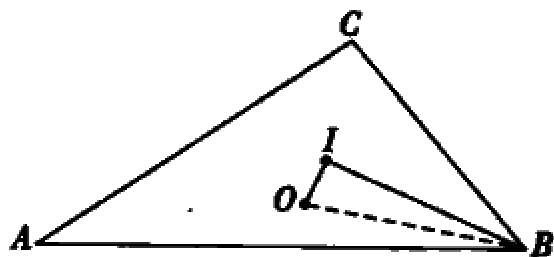


图 17－7

$\Leftrightarrow r=2R\cdot\sin^2\frac{B}{2}\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}$（其中用到 $r=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$）

$$\Leftrightarrow\cos\frac{1}{2}(A-C)=2\sin\frac{B}{2}. \quad ①$$

注意到 $2\sin\frac{1}{2}(A+C)\cdot\cos\frac{1}{2}(A-C)=2\sin\frac{1}{2}(A+C)\cdot 2\sin\frac{B}{2}=2\sin B$,

则 ①$\Leftrightarrow \sin A+\sin C=2\sin B\Leftrightarrow a+c=2b$. ②

当$\angle c=\frac{\pi}{2}$时,令 $a=b-d,c=b+d$,代入 $a^2+b^2=c^2$,化简得 $b=4d$,从而

$a=3d,c=5d$. ③

从③也可推得②,故命题获证.

例7 如图 17-8,一个锐角$\triangle ABC$,$\angle BAC=60°$,三点 H,O,I 分别是$\triangle ABC$ 的垂心、外心和内心.如果 $BH=OI$,求$\angle ABC$ 和$\angle ACB$. (1994 年保加利亚竞赛题)

解 因 H 为$\triangle ABC$ 的垂心,连 AH,CH,则知$\angle BCH=\angle BAH=90°-\angle ABC$,故$\angle B=90°-\angle BCH$. ①

由$\angle BAC=60°$及 $BH=OI$,知 H,I,O 三点两两不重合,且由性质 13,14 知 $IO=IH=BH,B,H,I,O,C$ 五点共圆,从而有$\overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{HI}=\overset{\frown}{IO}$,故有$\angle BCH=\angle HCI=\angle ICO=\frac{1}{3}\angle BCO$.

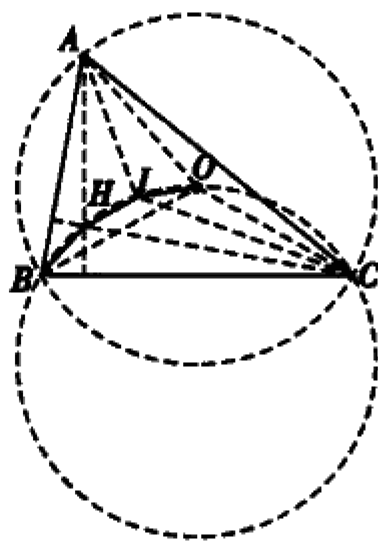


图 17-8

在$\triangle OBC$ 中,$\angle BOC=2\angle BAC=120°$,而 $OB=OC$,于是$\angle BCO=30°$,从而$\angle BCH=10°$,故由①式知$\angle ABC=80°$.

此时,$\angle ACB=180°-\angle A-\angle ABC=40°$.

例8 如图 17-9,锐角$\triangle ABC$ 中,H 是垂心,O 是外心,I 是内心.已知$\angle C>\angle B>\angle A$,求证:$I$ 在$\triangle BOH$ 的内部.

(第 39 届 IMO 中国国家队选拔考试题)

证明 设$\angle B$ 的平分线交 OH 于 P,则 BP 也是$\angle OBH$ 的平分线.设$\angle A$ 的平分线交 OH 于 Q,则 AQ 也是$\angle OAH$ 的平分线.从而有$\frac{BH}{BO}=\frac{HP}{OP},\frac{AH}{AO}=\frac{HQ}{OQ}$.

作 $CH\perp AB$ 于 E,由$\angle B>\angle A$,得 $AC>BC,AE>BE$,故 $AH>HB$.而 $AO=BO$,于是$\frac{HQ}{OQ}>\frac{HP}{OP}$.故 Q 在 O,P 之间,AQ 与 BP 的交点 I 必在$\triangle BOH$ 内.

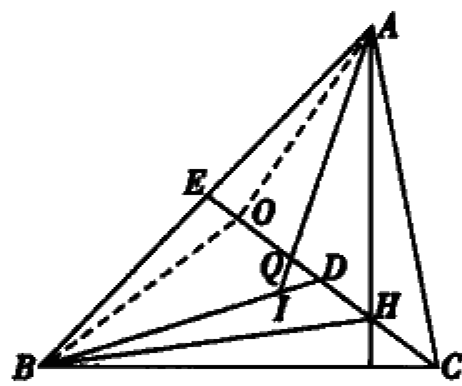


图 17-9

例9 设 O 是锐角$\triangle ABC$ 的外心,分别以$\triangle ABC$ 三边的中点为圆心作过点 O 的圆,这三个圆两两相交于异于 O 的交点,分别为 K、L、M.求证:点 O 是$\triangle KLM$ 的内心.

证法 1 如图 17-10,设 A'、B'、C'分别为边 BC、CA、AB 的中点,由于 $OA'\perp BC$,$B'C/\!/BC$,所以 $OA'\perp B'C'$.

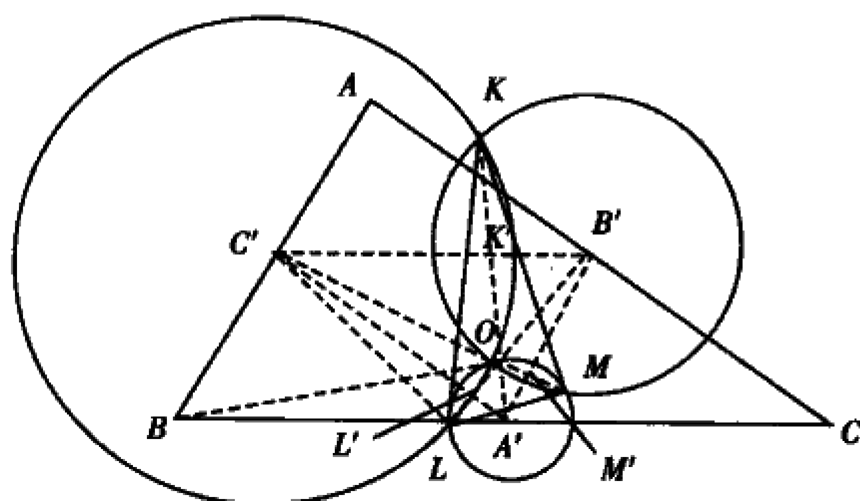


图 17-10

同理，$OB' \perp A'C'$. 从而点 O 为$\triangle A'B'C$ 的垂心.

又 $B'C'$是KO 的中垂线，于是 KO 的中点 K'是点 O 在 $B'C'$上的射影.

同理，LO、MO 的中点 L'，M' 也是点 O 在 $A'C'$、$C'B'$ 上的射影，即$\triangle K'L'M'$ 为$\triangle A'B'C'$的垂心的垂足三角形，从而点 O 为$\triangle K'L'M'$的内心.

注意到$\triangle KLM$ 与$\triangle K'L'M'$是位似图，且位似中心为 O，位似比为 2，故 O 为$\triangle KLM$ 的内心.

证法 2 如图 17-10，连结 BO、$C'L$、$C'O$，在$\odot C'$中，有$\angle LKO = \frac{1}{2}\angle OC'L$.

而$\triangle OC'A' \cong \triangle LC'A'$，有$\angle OC'A' = \angle LC'A'$.

由 O、C'、B、A'共圆，知$\angle A'BO = \angle A'C'O' = \frac{1}{2}\angle OC'L = \angle LKO$.

同理，$\angle A'CO = \angle MKO$. 而$\angle A'BO = \angle A'CO$，从而$\angle LKO = \angle MKO$.

即 OK 平分$\angle LKM$.

同理，LO 平分$\angle KLM$. 故 O 为$\triangle KLM$ 的内心.

例 10 在锐角$\triangle ABC$ 中，$AB \neq AC$，H、G 分别为该三角形的垂心和重心. 则$\angle AGH = 90°$的充要条件是$\frac{1}{S_{\triangle HAB}} + \frac{1}{S_{\triangle HAC}} = \frac{2}{S_{\triangle HBC}}$.

证明 必要性：如图 17-11，作$\triangle ABC$ 的三条高线 AA'、BB'、CC'，则它们相交于点 H.

设 O 为$\triangle ABC$ 的外心，则由欧拉定理，知 O、G、H 共线. 延长 AG 交 BC 于 M，则 $AG = \frac{2}{3}AM$.

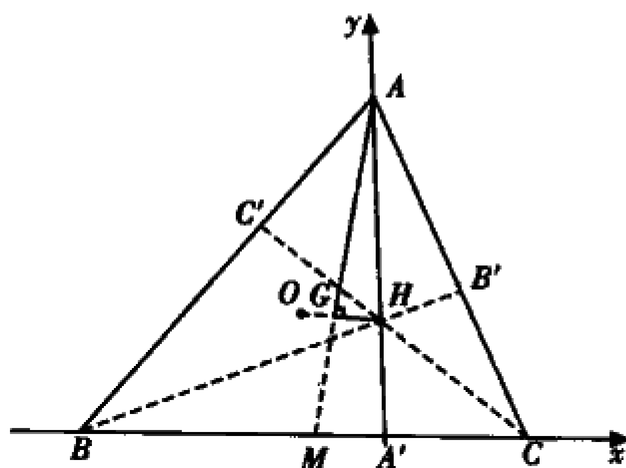


图 17-11

此时，A、B、A'、B'，B、C、B'、C'，C、A、C'、A'分别四点共圆，从而有 $AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$.

令 $BC=a, CA=b, AB=c$，$\odot O$ 的半径为 R.

则 $\frac{1}{S_{\triangle HAB}}+\frac{1}{S_{\triangle HAC}}=\frac{2}{S_{\triangle HBC}}\Leftrightarrow\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle HAB}}+\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle HAC}}=\frac{2S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle HBC}}$

$\Leftrightarrow\frac{CC'}{HC'}+\frac{BB'}{HB'}=2\frac{AA'}{HA}\Leftrightarrow\frac{CC'}{HC'}\cdot CH\cdot HC'+\frac{BB'}{HB'}\cdot BH\cdot HB'=2\cdot\frac{AA'}{HA'}\cdot AH\cdot HA'$

$\Leftrightarrow CC'\cdot CH+BB'\cdot BH=2AA'\cdot AH.$ ①

下面证明①式在条件$\angle AGH=90°$下成立.

由于 $CC'\cdot CH+BB'\cdot BH=CB\cdot CA'+BC\cdot BA'$

$=BC(CA'+BA')=a^2.$

由$\angle AGH=90°$，有 $2AA'\cdot AH=2AG\cdot AM=2\cdot\frac{2}{3}AM^2=\frac{2}{3}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2).$ ②

由三角形垂心性质知，$\triangle HCA$ 与$\triangle ABC$ 的外接圆是等圆，则有$\frac{AH}{\sin\angle ACH}=2R$，即

$AH=2R\cdot\cos A$，且 $AA'=c\cdot\sin B$.

从而 $AA'\cdot AH=c\cdot\sin B\cdot 2R\cdot\cos A=bc\cdot\cos A$

$=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2).$

又 $AG\cdot AM=\frac{2}{3}AM^2=\frac{1}{3}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2)$.注意到 $AA'\cdot AH=AG\cdot AM$，

则由$\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{3}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2)$，有 $b^2+c^2=2a^2$.

于是②化简为 $2AA'\cdot AH=\frac{2}{3}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2)=a^2$，故①式获证.

充分性：参见图 17－11，以 BC 所在直线为 x 轴，AH 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系 $xA'y$.设 $B(-m,0)$，$C(n,O)$，$A(0,h)$，则由重心坐标公式得 $G(\frac{n-m}{3},\frac{h}{3})$.由 $Rt\triangle BA'H\backsim Rt\triangle AA'C$ 得 $H(0,\frac{mn}{h})$.从而

$\angle AGH=90°\Leftrightarrow AG\perp GH\Leftrightarrow k_{AG}\cdot k_{GH}=-1$

$\Leftrightarrow\frac{\frac{2}{3}h}{\frac{m-n}{3}}\cdot\frac{\frac{mn}{h}-\frac{h}{3}}{\frac{m-n}{3}}=-1\Leftrightarrow 2h^2=m^2+4mn+n^2.$

而 $S_{\triangle HBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(m+n)\cdot mn}{h}$，$S_{\triangle HAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m(h^2-mn)}{h}$，$S_{\triangle HAC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(h^2-mn)}{h}$.

其中由$\triangle ABC$ 为锐角三角形，有 $h^2>mn$.

故$\frac{1}{S_{\triangle HAB}}+\frac{1}{S_{\triangle HAC}}=\frac{2}{S_{\triangle HBC}}\Leftrightarrow\frac{h}{m(h^2-mn)}+\frac{h}{n(h^2-mn)}=\frac{2h}{mn(m+n)}$

$\Leftrightarrow\frac{2(h^2-mn)}{mn(m+n)}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\Leftrightarrow 2h^2=m^2+4mn+n^2.$

从而充分性获证.

注 此题充分性为2003年国家队集训测试题．必要性由黄全福老师给出作为《中等数学》2009年1期奥林匹克问题高240号.

例11 三角形某个顶点与内心连线垂直于外心与内心连线的充要条件是三边成等差数例(某顶点对的边为等差中项).

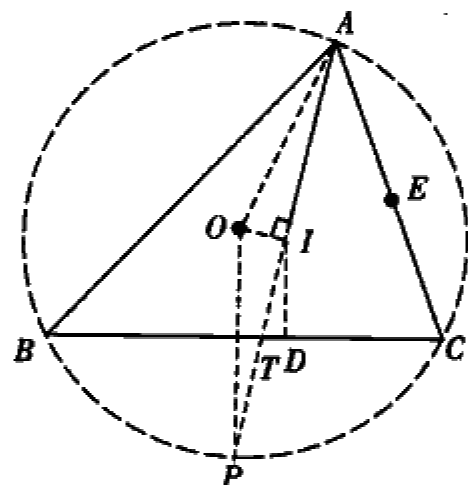


图 17－12

证法1 如图17－12,设$\triangle ABC$的外心、内心分别为O、I,延长AI交$\triangle ABC$的外接圆于点P,连结AO、OP,则$OA=OP$,且由内心的性质知$IP=BP=PC$.

令$BC=a,CA=b,AB=c$,则在圆内接四边形$ABPC$中应用托勒密定理,有

$a\cdot AP=b\cdot BP+c\cdot CP=IP(b+c).$

于是c、a、b成等差数例$\Leftrightarrow AP=2IP\Leftrightarrow I$为$AP$中点$\Leftrightarrow OI\perp AI$.

证法2 如图17－12,设O、I分别为$\triangle ABC$的外心、内心,令$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. 设AI的延长线交于BC于T,由角平分线的性质,有

$\frac{BT}{TC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$,即得$BT=\frac{ac}{b+c}$,$TC=\frac{ab}{b+c}$.

设I在BC、CA边上的射影分别为D、E,则$DT=|BT-BD|=|p-b-\frac{ac}{b+c}|$.

由圆幂定理,有$OA^2-OT^2=R^2-OT^2=BT\cdot TC$($R$为$\triangle ABC$外接圆半径).

则$AI^2=AE^2+IE^2=(p-a)^2+r^2$($r$为$\triangle ABC$内切圆半径),

$IT^2=TD^2+ID^2=(p-b-\frac{ac}{b+c})^2+r^2$.

从而$AI\perp IO\Leftrightarrow OA^2-OT^2=BT\cdot TC=IA^2-IT^2$

$$\Leftrightarrow\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}=(p-a)^2-(p-b-\frac{ac}{b+c})^2\Leftrightarrow b+c=2a.$$

例12 三角形的内心与重心的连线平行于三角形的某一边的充要条件是三角形三边成等差数列(某一边为等差中项).

证法1 如图17－13,设$\triangle ABC$的重心、内心分别为G、I,连AG并延长交BC于M,作$GD\perp BC$于D,作$AH\perp BC$于H.

设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，则

由 $\frac{GD}{AH}=\frac{1}{3}$ 及 $\frac{a\cdot AH}{2}=\frac{(a+b+c)\cdot r}{2}$，有

$$GI /\!/ BC \Leftrightarrow GD=r \Leftrightarrow AH=3r \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)r}{2}=\frac{3a\cdot r}{2}$$

$$\Leftrightarrow b+c=2a.$$

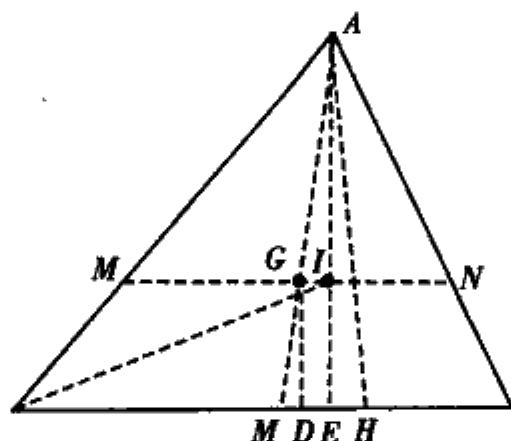


图 17－13

证法 2 过 $\triangle ABC$ 的内心 I 作与边 BC 平行的直线分别交 AB、AC 于 M、N.

设 $AM=\lambda AB$，则 $AN=\lambda AC$，且有 $MN=\lambda BC$.

从而 $BM=(1-\lambda)AB$, $NC=(1-\lambda)AC$.

连 BI，可推得 $BM=MI$. 同理 $IN=NC$，于是

$$AB+CA=2BC \Leftrightarrow \frac{BM}{1-\lambda}+\frac{NC}{1-\lambda}=\frac{BM+NC}{1-\lambda}=\frac{MI+IN}{1-\lambda}=\frac{MN}{1-\lambda}=\frac{\lambda BC}{1-\lambda}=2\cdot BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda}=2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3} \Leftrightarrow MN \text{ 过}\triangle ABC\text{ 的重心} \Leftrightarrow GI /\!/ BC.$$

证法 3 连 AI 并延长交 BC 于 E，连 AG 并延长交 BC 于 M，

则 $\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{EC}=\frac{AB+AC}{BE+EC}=\frac{2BC}{BC}=2 \Leftrightarrow \frac{AI}{IE}=\frac{AC}{EC}=2, \frac{AG}{GM}=2 \Leftrightarrow \frac{AG}{GM}=\frac{AI}{IE} \Leftrightarrow GI /\!/ BC.$

例 13 锐角 $\triangle ABC$ 的某顶点与重心的连线垂直于内心与外心连线的充要条件是三角形三边的倒数成等差数例(某顶点所对的边的倒数为等差中项).

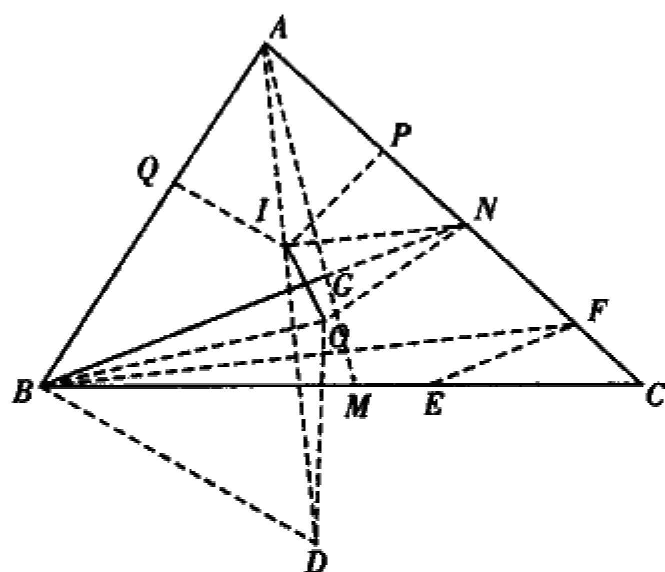


图 17－14

证法 1 设 G、I、O 分别为 $\triangle ABC$ 的重心、内心和外心.

令 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

延长 BG 交 AC 于点 N，设内切圆切 BC 边于点 P，切 AB 边于点 Q，其半径为 r，则

$$BO^2-ON^2=AO^2-ON^2=AN^2=\frac{1}{4}b^2.$$

$$BI^2=BQ^2+r^2=(p-b)^2+r^2,$$

$$IN^2=PN^2+r^2=\left[\frac{b}{2}-(p-a)\right]^2+r^2=\left(\frac{c-a}{2}\right)^2+r^2.$$

于是 $BG\perp IO \Leftrightarrow BN\perp IO \Leftrightarrow BI^2-IN^2=BO^2-ON^2$

$$\Leftrightarrow(p-b)^2+r^2-\left(\frac{c-a}{2}\right)^2-r^2=\frac{1}{4}b^2\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}.$$

证法 2 在$\triangle ABC$中,不妨设AB边最短,因而可在BC、AC上取点E、F,使$BE=AF=AB$,则可证$IO\perp EF$.

事实上,设M为BC的中点,延长OM交直线AI于D,则D在$\triangle ABC$的外接圆上.又$\angle BOD=\angle BAF$,$BO=DO$,$BA=AF$,则$\triangle BOD\backsim\triangle BAF$.

由内心性质知$BD=DI$,从而$\frac{BO}{AB}=\frac{BD}{BF}$,即$\frac{DO}{BE}=\frac{DI}{BF}$,亦即$\frac{DO}{DI}=\frac{BE}{BF}$.

由$OD\perp BC$,$BF\perp AD$,有$\angle FBE=\angle IDO$,即有$\triangle BFE\backsim\triangle DIO$,故$OI\perp EF$.

回到原题证明,设AC边的中点为N,连IN、ON,则

$$BG\perp IO\Leftrightarrow BG/\!/EF\Leftrightarrow BN/\!/EF\Leftrightarrow\frac{CN}{CF}=\frac{BC}{EC}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{b}{2}}{c-b}=\frac{a}{a-c}\Leftrightarrow 2ac=ab+bc\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}.$$

例 14 在$\triangle ABC$中,$\angle A=60°$(即$\angle A$为$\angle B$和$\angle C$的等差中项),O、I、H分别为$\triangle ABC$的外心、内心、垂心,则有下列结论成立:

(1)B、O、I、H、C五点共圆;

(2)$AH=AO=R$,$OI=IH$;若OH所在直线交AB、AC分别于P、Q,则$PO=HQ$;

(3)$OH=|AB-AC|$($AB\neq AC$时),$OH=\frac{|HB-HC|}{\sqrt{3}}$($AB\neq AC$时);

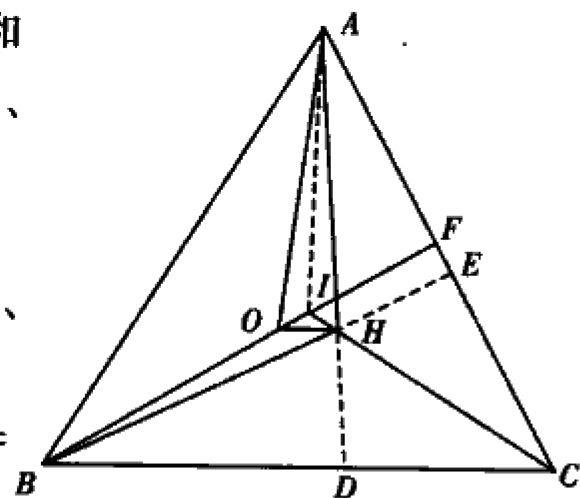


图 17-15

(4)设直线BI交AC于F,则$\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}=\frac{1}{IF}$.

证明 如图 17-15.

(1)由$\angle BOC=2\angle A=120°$,$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle A=120°$,$\angle BHC=\angle B+\angle C=180°-\angle A=120°$,即知$B$、$O$、$I$、$H$、$C$五点共圆.

(2)延长BH交AC于E,则$\frac{AE}{AH}=\cos\angle EAH=\cos(90°-\angle DBE)=\sin B$,

有$AH=\frac{AE}{\sin B}=\frac{AB\cdot\cos A}{\sin B}=\frac{AB}{\sin B}\cdot\frac{1}{2}=2R\cdot\frac{1}{2}=R=AO$.

连接AI,则由$\triangle AOI\cong\triangle AHO$知$OI=IH$,由$\triangle AOP\cong\triangle AHQ$知$PO=HQ$.

(3)设$\odot O$的半径为R,则$OB=OC=R$,$BC=\sqrt{3}R$.

由 B、O、H、C 四点共圆，在此圆中应用托勒密定理，有

$OH\cdot BC+BH\cdot OC=BO\cdot HC$，即$\sqrt{3}R\cdot OH=R\cdot BH-R\cdot HC$（当 $AB>AC$ 时），

从而 $OH=\dfrac{BH-HC}{\sqrt{3}}=\dfrac{|BH-HC|}{\sqrt{3}}$.

令 $AB=c$，$AC=b$，当 $AB>AC$ 时，$c-b=2R\cdot(\sin C-\sin B)$.

$$\begin{aligned}\text{而 } OH&=BC\cdot\frac{\sin\angle OCH}{\sin\angle CHB}=2R\cdot\sin A\cdot\frac{\sin\angle OCH}{\sin\angle CHB}=2R\cdot\sin 60^\circ\cdot\frac{\sin\angle OCH}{\sin 120^\circ}\\&=2R\cdot\sin\angle DCH=2R\cdot\sin(\angle OCA-\angle HCA)\\&=2R\cdot\sin(A-B)=2R\cdot\sin(C-60^\circ).\end{aligned}$$

于是 $c-b=OH\Leftrightarrow\sin C-\sin(120^\circ-C)=\sin(C-60^\circ)$

$\Leftrightarrow 2\cdot\cos 60^\circ\cdot\sin(C-60^\circ)=\sin(C-60^\circ)$恒成立，故结论获证.

(4) 由 $ab\cdot\sin^2\dfrac{C}{2}=ab\cdot\dfrac{1}{2}(1-\cos C)=(p-a)(p-b)$，有 $\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$，其中 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

同理，$\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$，$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

$$\text{于是，}\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}=\frac{1}{IF}\Leftrightarrow 1+\frac{IB}{IC}=\frac{IB}{IF}\Leftrightarrow 1+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{a+c}{b}$$

$$\Leftrightarrow bc=4(p-a)(p-c)\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ.$$

注 三角形三角成等差数列以及三角形三边成等差数列的问题还有许多有趣的结论，可参见笔者新著《几何瑰宝》(哈尔滨工业大学出版社 2009 年 3 月出版).

【模拟实战】

习题 A

1. 在锐角$\triangle ABC$ 中，$\angle B=30^\circ$，AD，BE 是两条高，H 是垂心，G 为$\triangle ABH$ 的重心，直线 CG 交 AB，AD 于 M，N. 求证：$\triangle AMN$ 为正三角形.
2. 在锐角$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60^\circ$，I，O，H 分别为$\triangle ABC$ 的内心、外心、垂心. 求证：$OI=IH$.
3. 在$\triangle ABC$ 中，G 为重心，I 为内心. 试证：$\triangle AGI$，$\triangle BGI$，$\triangle CGI$ 中，最大的一个的面积

等于其余两个面积之和.

4. 设$\triangle ABC$中，$AB=AC$，O为$\triangle ABC$的外心，D是AB的中点，E是$\triangle ACD$的重心.证明：$OE\perp CD$.
5. O，H分别为锐角$\triangle ABC$的外心和垂心，M，N分别在AB，AC上，且$AM=AO$，$AN=AH$，R为外接圆半径.求证：$MN=R$.
6. 设G，H分别为锐角$\triangle ABC$的重心和垂心，若$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$成等差数列，则$GH\,/\!/\,AC$.
7. 设O，I分别为$\triangle ABC$的外心和内心，若CA，BC，AB成等差数列，则$OI\perp IA$.
8. 设O为锐角$\triangle ABC$的外心，作BC边上的高，CA边上的中线和$\angle C$的平分线并延长交$\odot O$于A'，B'，C'.求证：$S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle ABC'}$.

(1991年中国奥林匹克集训测试题)

9. 锐角$\triangle ABC$中，A角的等分线与三角形的外接圆交于另一点A_1，点B_1，C_1与此类似，直线AA_1与B，C两角的外角等分线相交于A_0，点B_0，C_0与此类似.求证：(1)$\triangle A_0B_0C_0$的面积是六边形$AC_1BA_1CB_1$面积的2倍；(2)$\triangle A_0B_0C_0$的面积至少是$\triangle ABC$面积的4倍.

(IMO-30试题)

10. $\triangle ABC$的$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的内角平分线分别与外接圆交于A_1，B_1，C_1.证明：$S_{\triangle A_1B_1C_1}\geqslant S_{\triangle ABC}$.

(IMO-29预选题)

11. 已知$\triangle ABC$的三个顶点A，B，C分别在$\triangle A_1B_1C_1$的边B_1C_1，C_1A_1，A_1B_1上，使得$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$，$\angle BCA=\angle B_1C_1A_1$，$\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$.证明：$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$的垂心与$\triangle ABC$的外心一样远.

习题 B

1. $\odot O$为$\triangle ABC$的外接圆，三边满足$2BC=AB+AC$，M，N各是AB，AC的中点，G，I各是$\triangle ABC$的重心、内心.试证：直线GI与$\triangle AMN$的外接圆必相切.
2. 在等腰$\triangle ABC$中，$AC=BC$，O是它的外心，I是它的内心，点D在边BC上，使得OD与BI垂直.证明：直线$ID\,/\!/\,AC$.

(第22届全俄竞赛题)

3. 在一个非钝角$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$\angle B=45°$，O和I分别是$\triangle ABC$的外心和内心，且$\sqrt{2}\,OI=AB-AC$.求$\sin A$.

(1998年CMO试题)

4. 在圆内接五边形中，由任意三个顶点构成的三角形的重心向另外两顶点的连线引垂线，这样的十线交于一点.

第十八章　几何变换的性质及应用

【基础知识】

平面几何中的几何变换主要有合同(包括平移、旋轴、轴对称)、相似(包括位似)、仿射和反演变换.

在平面到自身的一一变换下,如果任意线段的长和它的象的长总相等,那么这种变换叫做合同变换.合同变换具有下述基本性质:

性质1　在合同变换下,直线变为直线,线段变为线段,射线变为射线;两直线的平行性、垂直性,所成的角度都不变;共线点变为共线点,且保持顺序关系不变;直线上A、B、C三点的简比$\frac{AC}{BC}$不变.

性质2　在合同变换下,三角形、多边形和圆分别变为与它们全等的三角形、多边形和圆;封闭图形的面积不变.

在平面到自身的一一变换下,若任意一对对应点A,A'连结的有向线段等于定向量$\vec{a}$,则这种变换叫做平移,记为$T(\vec{a})$.$\vec{a}$叫平移向量,$\vec{a}$的方向叫做平移方向,其长度叫平移距离.

在平面到自身的一一变换下,若每对对应点A,A'所连结的线段,都被定直线l所垂直平分,则这种变换叫做关于直线l的轴对称或轴反射,记为$S(l)$.直线l叫做对称轴或反射轴,点A'叫做点A关于轴l的对称点.

在平面到自身的一一变换下,若任意一对对应点A,A'与平面上一定点O的距离总相等,且$\angle AOA'$等于定角θ,这种变换叫做关于点O的旋转,记为$R(O,\theta)$.点O叫做旋转中心,θ叫做旋转角.

特别地,旋转角$\theta=180°$的旋转变换称为中心对称变换或点反射,记为$C(O)=R(O,180°)$.

性质3　在平移变换下,直线(线段)变成与它平行(或重合)的直线(线段);在轴对称变换下,P为对称轴l上任一点,则一对对应点所成的角$\angle APA'$被l所平分;在旋转变换下,对应直线的交角总等于旋转角;在中心对称变换下,对应点连线段过对称中心且被它平分,对应线段相等且反向平行或共线,不过对称中心的直线与其对应的直线平行.

在平面到自身的一一变换下，若线段 $A'B'$ 是 AB 的象，且 $A'B':AB=k$（k 为正的常数），则这种变换叫做相似变换，记为 $H(k)$．常数 R 叫做相似系数或相似比．

特别地，若 $k=1$，则为合同变换；$k=-1$，则为中心对称变换．

性质 4 在相似变换下，直线变为直线，线段变为线段，射线变为射线；点与直线的结合关系不变，点在直线上的顺序关系不变；直线上三点的简比不变，两直线的夹角不变，两相似多边形面积比不变且等于相似比的平方．

在平面到自身的一一变换下，若对于任一对对应点 A,A' 与平面上一定点 O，都有 $OA':OA=k$（k 为非零常数），则这种变换叫做位似变换，记为 $H(O,k)$．点 O 叫做位似中心，k 叫做位似比．

特别地，当 $k>0$ 时，A,A' 在点 O 同侧，这种变换叫顺（或正或外）位似；$k<0$ 时，A,A' 在点 O 两侧，这种变换叫逆（或反或内）位似．

性质 5 在位似变换下，对应线段之比相等，对应角相等且转向相同；不过位似中心的对应直线平行．

在平面到自身的一一变换下，若对于任一对对应点 A,A' 与平面上一定点 O，都有 $OA':OA=k$（k 为正的常数），且 $\angle AOA'=\theta$（θ 为有向的定角），则这种变换叫做位似旋转变换，记为 $S(O,\theta,k)$．点 O 叫做位似中心，k 叫做位似比，θ 叫做旋转角，

且 $S(O,\theta,k)=H(O,k)\cdot R(O,\theta)=R(O,\theta)\cdot H(O,k)$；

$S(O,0,k)=H(O,k)$；$S(O,\pi,k)=H(O,-k)$；$S(O,\theta,1)=R(O,\theta)$．

性质 6 在位似旋转变换下，把两个相似形中的一个变到另一个；具有共同中心的两个位似旋转变换之积仍是一位似旋转，即有

$S(O,\theta_1,k_1)\cdot S(O,\theta_2,k_2)=S(O,\theta_1+\theta_2,k_1\cdot k_2)$．

在平面到自身的一一变换下，若满足任意共线三点的对应点仍共线，且其三点的简比保持不变，则称此变换为仿射变换．

显然，若建立平面坐标系，仿射坐标系与直角坐标系的差别就在于两轴间的夹角及轴上单位长度不相同．若两轴夹角仍为 $90°$，则称为伸缩变换：$(x,y)\to(k_1x,k_2y)$，其中 $k_1>0,k_2>0$．

性质 7 在仿射变换下，点变成点，直线变成直线；保持点和直线的结合关系；保持直线的平行关系；保持两平行（共线）线段的长度比；任一封闭凸曲线所围成的图形的面积 S 和它对应图形所围成的面积 S' 之比为常数．

性质 8 在仿射变换下，任一三角形变成正三角形；梯形变为等腰梯形；任一平行四边形变成正方形；任一椭圆变为圆，相应地椭圆中心变成圆心，椭圆直径变成圆的直径，椭圆的切线变成圆的切线．

设 O 是平面上一定点，对于一个变换，若任一对对应点 A,A'（异于 O），都有 $\overrightarrow{OA'}\cdot$

$\overrightarrow{OA}=k$（k 为非零常数），则称此变换为反演变换，记为 $I(O,k)$．O 点称为反演中心，k 为反演幂．

显然，$k<0$ 时，A，A' 在点 O 两侧，可经以 O 为中心对称变换变成 $k>0$ 的情形．故只考虑 $k>0$ 的情形，且令 $k=r^2$．此时，反演变换的几何意义为，满足"以 O 为圆心，r 为半径的圆中直角三角形的射影定理形式：$r^2=OP^2=OA\cdot OA'$"的图形，并称这个圆叫反演变换的基圆．

性质 9 在反演变换下，基圆上的点仍变为自己；基圆内的点（除中心外）变为基圆外的点．反之亦然．

性质 10 在反演变换下，过反演中心的直线是不变直线（除中心）；过反演中心的圆变为不过反演中心的直线；过反演中心的相切两圆（或一圆一直线）变为不过反演中心的两平行直线；过反演中心的两相交圆变为不过反演中心的相交直线．反之亦然．

性质 11 在反演变换下，不过反演中心的圆变为不过反演中心的圆；以反演中心为圆心的圆变为同心圆；不过反演中心相切（交）的圆变为不过反演中心的相切（交）的圆；不共线的任意两对对应点必共圆；圆和圆、圆和直线、直线和直线的交角保持不变．

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 18－1，设 A'，B'，C' 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 的中点，O_1，O_2，O_3，I_1，I_2，I_3 分别是 $\triangle AB'C'$，$\triangle A'BC'$，$\triangle A'B'C$ 的外心和内心．求证：$\triangle O_1O_2O_3\cong\triangle I_1I_2I_3$．

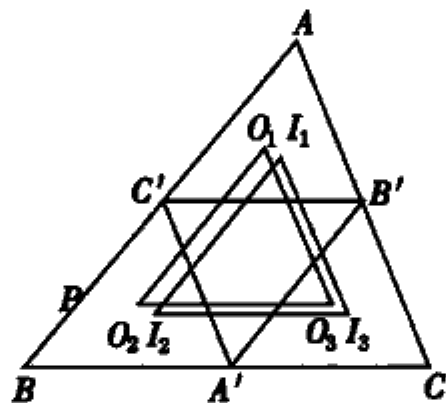


图 18－1

证明 由三角形中位线性质，知 $\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{AC'}$，故

$\triangle AB'C'\xrightarrow{T(\overrightarrow{AC'})}\triangle C'A'B$．

于是 $O_1\xrightarrow{T(\overrightarrow{AC'})}O_2$，$I_1\xrightarrow{T(\overrightarrow{AC})}I_2$，

所以 $\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{I_1I_2}$．

同理，$\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{I_1I_3}$，$\overrightarrow{O_2O_3}=\overrightarrow{I_2I_3}$．

故 $\triangle O_1O_2O_3\cong\triangle I_1I_2I_3$．

例 2 设 $\triangle DPQ$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂足三角形（即 D，P，Q 分别为三条高线的垂足）．求证：$\triangle DPQ$ 是 $\triangle ABC$ 中周长最短的内接三角形．

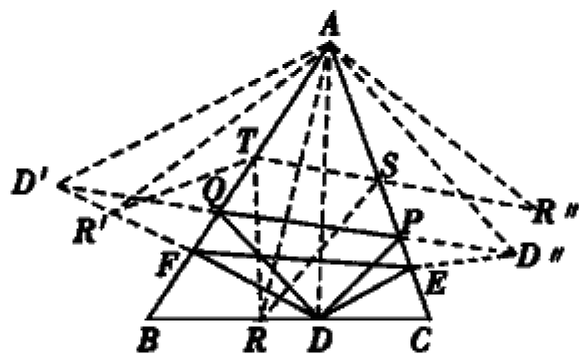


图 18－2

证明 由题设，如图 18－2，AD，BP，CQ 分别是 $\triangle DPQ$ 的内角平分线．令 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 中以 D 为一顶点的任一内接三角形，且 $D\xrightarrow{S(AB)}D'$，$D\xrightarrow{S(AC)}D''$，

则 D'，D''落在直线 PQ 上，且 $D'Q=DQ$，$D''P=DP$，线段 $D'D''$之长等于$\triangle DPQ$ 之周长.

连 $D'E$，$D''F$，则折线 $D''EFD'$之长等于$\triangle DEF$ 之周长，显然 $D'D''\leqslant D''E+EF+FD'$.不难计算 $D'D''=\sqrt{2AD^2-2AD^2\cdot\cos2\angle A}=2AD\cdot\sin\angle BAC$.

若$\triangle RST$ 是$\triangle ABC$ 的任一内接三角形，则用类似方法可以证得$\triangle RST$ 的周长大于或等于 $2AR\cdot\sin\angle BAC$.由于 $AR\geqslant AD$，从而$\triangle RST$ 的周长$\geqslant\triangle DPQ$ 的周长，即垂足三角形$\triangle DPQ$ 的周长最短.

例 3 在$\triangle ABC$ 内有一点 P，满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$.求证：$P$ 是到三顶点距离之和最小的点(即费马点).

证明 由$\angle CPA=\angle BPC=120°$，故对$\triangle APC$ 施行旋转变换 $R(C,-60°)$，则$\triangle APC\xrightarrow{R(C,-60°)}\triangle EP'C$.

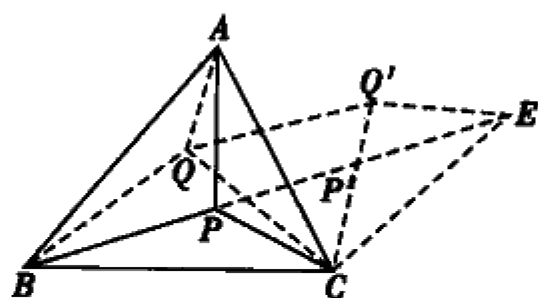


图 18－3

由于$\angle P'PC=\angle PP'C=60°$，则 B，P，P'，E 共线，且 $BE=BP+PP'+P'E=BP+CP+AP$.

对于$\triangle ABC$ 内任一点 Q，令$\triangle AQC\xrightarrow{R(C,-60°)}\triangle EQ'C$，则 $QQ'=QC$，$Q'E=QA$，于是 $QA+QB+QC=Q'E+QQ'+QB\geqslant BE=BP+CP+AP$，故 P 点是到三顶点距离之和最小的点.

例 4 如图 18－4，在$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$\angle A$ 的一个外角的平分线交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 E，过 E 作 $EF\perp AB$，垂足为 F.求证：$2AF=AB-AC$.

(1989 年全国高中联赛题)

证明 $\angle AEF=90°-\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC$.

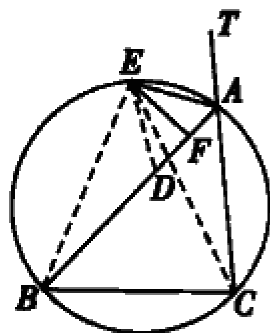


图 18－4

作 A 关于 F 的对称点 D，则$\angle AED=\angle CAB$，且 $EA=ED$.

又$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EC}$(因$\angle EBC=\angle EAT=\angle EAB$)，则 $EB=EC$，且$\angle CEB=\angle CAB=\angle AED$，所以可将$\triangle AEC$ 绕 E 点旋转$\angle AED$ 到$\triangle DEB$ 处，从而 $AC=DB$.故 $AB-AC=AD=2AF$.

例 5 如图 18－5，$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形，现固定$\triangle ABC$，而将$\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转.试证：不论$\triangle ADE$ 旋转到什么位置，线段 EC 上必有点 M 使$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形. (1987 年全国高中联赛题)

证法 1 先证$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形，再证 M 为 EC 上.

作 A 关于 BD 的对称点 A'，则$\angle A'DB=\angle ADB$.由$\angle ADE=90°-2\angle BDM$，有$\angle EDM=\angle A'DM=|45°-\angle A'DB|=|90°-45°-\angle ADB|$.

而 $DA'=DA=DE$，则 A'是 E 关于 DM 的对称点.

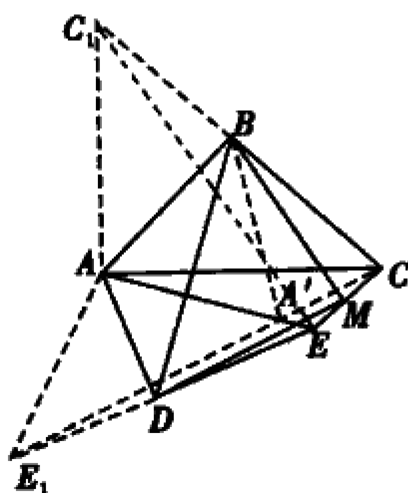


图 18 - 5

同理，A' 也是 C 关于 BM 的对称点．

从而$\angle EMD=\angle A'MD$，$\angle CMB=\angle A'MB$，而$\angle BMD=90°$，故$\angle CME=180°$，即 M 在 BC 上．

证法 2 先取 EC 中点 M，再证$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形．作 AC 关于 AB 的对称线段 AC_1，连 BC_1，EC_1，将$\triangle AC_1E$ 绕 A 点顺时针方向旋转 90°到$\triangle ACE_1$ 的位置如图 18－5，则 $C_1E\perp CE_1$，$\triangle AC_1E\cong\triangle ACE_1$，且$\angle C_1AC=\angle EAE_1=90°$，从而由 $AE=AE_1$ 有$\angle ADE=\angle ADE_1$，即知 E，D，E_1 三点共线且 D 为 EE_1 中点．

再由 $BM \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}C_1E$，$DM \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}CE_1$ 及 $C_1E\perp CE_1$，即证．

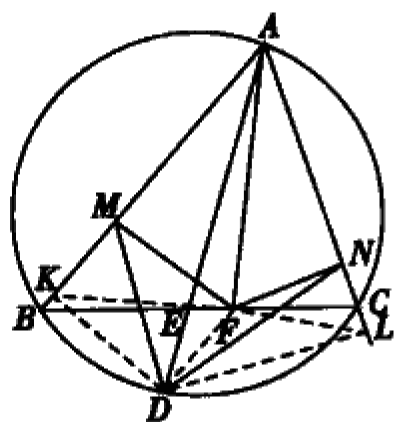


图 18 - 6

例 6 如图 18－6，在锐角$\triangle ABC$ 的 BC 边上有两点 E，F，满足$\angle BAE=\angle CAF$，作 $FM\perp AB$ 于 M，作 $FN\perp AC$ 于 N，延长 AE 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D．证明：四边形 $AMDN$ 与$\triangle ABC$ 的面积相等．（2000 年全国高中联赛题）

证明 作 $DK\perp AB$ 于 K，作 $DL\perp AC$ 于 L，则只需证明

$S_{\triangle FBM}+S_{\triangle FCN}=S_{\triangle FDM}+S_{\triangle FDN}$.

利用 $S_{\triangle FDM}=S_{\triangle FKM}$，$S_{\triangle FDN}=S_{\triangle FLN}$，只需证明 $S_{\triangle FBM}+S_{\triangle FCN}=S_{\triangle FKM}+S_{\triangle FLN}$，即 $FM\cdot BM+FN\cdot CN=FM\cdot MK+FN\cdot NL$．因此，只需证明 $FM(BM-MK)=FN(NL-CN)$，即 $FM\cdot BK=FN\cdot CL$．

设$\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，利用$\triangle BKD\backsim\triangle CLD$，有

$\frac{BK}{CL}=\frac{DK}{DL}=\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}=\frac{FN}{FM}$.

故结论成立．

例 7 如图 18－7，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 外切于点 A，半径分别为 r_1 和 r_2，PB，PC 分别为$\odot O_1$，$\odot O_2$ 的切线，B，C 为切点，且 $PB:PC=r_1:r_2$，又 PA 交$\odot O_2$ 于 E 点．求证：$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$．

证法 1（相似证法） 连线 BO_1，PO_1，PO_2，EO_2，CO_2．注意到 O_1，A，O_2 三点共线，由 $PB:PC=r_1:r_2$ 有 $\mathrm{Rt}\triangle PBO_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle PCO_2$，从而 $PO_1:PO_2=O_1A:O_2A$．由角平分线性质定理的逆定理，知$\angle BPO_1=\angle O_2PA$．

又$\angle O_2AP=\angle O_2EA$，有$\angle O_1AP=\angle O_2EP$，从而$\triangle O_1AP\backsim\triangle O_2EP$，则 $PA:PE=r_1:r_2$，即 $PA:PE=PB:PC$．

而$\angle BPA=\angle CPE$，故$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$．

证法2(位似证法) 考虑以 A 为位似中心的变换,把 $\odot O_1$ 变到 $\odot O_2$, $\triangle PAB$ 变到 $\triangle P'AC'$,则 $P'C'$ 切 $\odot O_2$ 于 C'.由 $PB:P'C'=r_1:r_2=PB:PC$,知 $P'C'=PC$.

延长 $P'C'$ 与 PC 的延长线相交于点 Q,如图 18-7,由 $QC'=QC$,知 $\triangle PQP'$ 为等腰三角形.

连 QO_2 并延长交 AE 于 F,则 $QF\perp AE$,故 QF 平分 AE,则 $AP'=PE$.由此知 $\triangle PEC\cong\triangle P'AC\backsim\triangle PAB$.

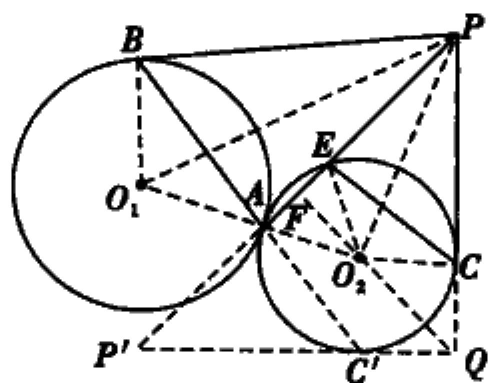


图 18-7

例8 如图 18-8,设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, L,M,N 分别是 BC,CA,AB 边的中点. D,E,F 分别是三条高的垂足, P,Q,R 分别是 HA,HB,HC 的中心.试证: L,M,N,D,E,F,P,Q,R 九点共圆(九点圆定理).

证明 由于 P,Q,R 分别是 HA,HB,HC 的中点,故以 H 为位似中心,位似比为 2 的位似变换把 $\odot PQR$ 变成 $\odot ABC$.因此,要证 L,M,N,D,E,F 在 $\odot PQR$ 上,只要证明这些点在上述位似变换下的象点均在 $\odot ABC$ 上即可.

作 $H\xrightarrow{C(D)}D'$, $H\xrightarrow{C(L)}L'$,则 D',L' 在 $\odot ABC$ 上.同理 E,M,F,N 的象点也在 $\odot ABC$ 上.再由上述位似变换之逆即证得结论成立.

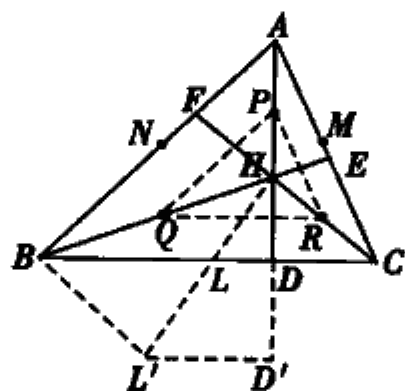


图 18-8

例9 如图 18-9, $AB\parallel CD_2$, $AC\parallel BD_1$, A 在 D_1D_2 上.求证: $S^2_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD_1}\cdot S_{\triangle ACD_2}$.

证明 因为梯形是仿射不变形,所以题设中的两个梯形可由两个特殊梯形经仿射变换后得到.设梯形 $C'B'A'D'_2$ 和梯形 $C'B'D'_1A'$ 皆为直角梯形,且 $C'D'_2=D'_2A'=MB'=1$.梯形 $A'D'_2C'B'\xrightarrow{仿射}$梯形 AD_2CB,梯形 $A'C'B'D'_1\xrightarrow{仿射}$梯形 $ACBD_1$,则 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'B'\cdot MC'=1$, $S_{\triangle A'B'D'_1}=\frac{1}{2}A'B'\cdot A'D'_1=2$, $S_{\triangle A'C'D'_2}=\frac{1}{2}$.从而 $S^2_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle A'B'D'_1}\cdot S_{\triangle A'C'D'_2}$.故 $S^2_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD_1}\cdot S_{\triangle ACD_2}$.

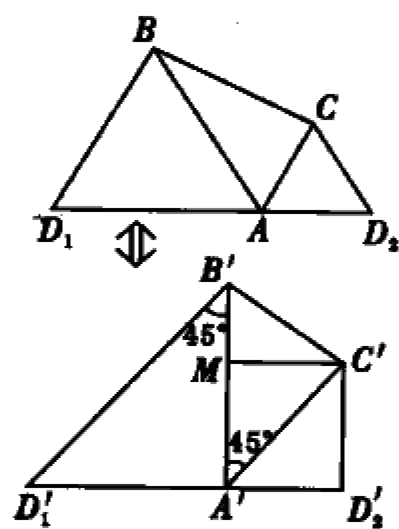


图 18-9

例10 在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 BC 上取点 E 和 F,使线段 DE 和 DF 把 AC 三等分,已知 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 的面积等于四边形面积的 $\frac{1}{4}$.求证: $ABCD$ 是平行四边形.

(第 16 届全俄竞赛题)

证明 题中条件与结论均满足仿射变换不变性特性.将 $\triangle ABC$ 变换成图 18-10 所示直角三角形,设 $|AB|=|BC|=3$,则 $A(3,0)$, $C(0,3)$, $P(2,1)$, $Q(1,2)$.

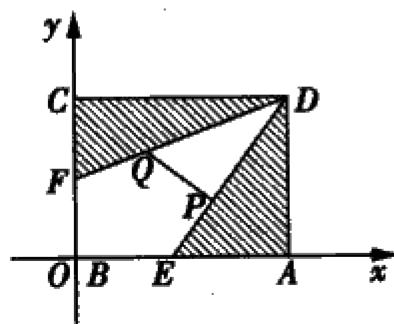


图 18 - 10

设 $D(a,b)$ 为所求，则直线 DE 的方程为

$y-1=\frac{b-1}{a-2}(x-2)$. 令 $y=0$ 得 $x_E=\frac{2-a}{b-1}+2$.

于是 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}|AE|\cdot y_D=\frac{1}{2}(3-\frac{2-a}{b-1}-2)\cdot b$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-3}{b-1}\cdot b.$$

同理，得 $S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-3}{a-1}\cdot a$.

$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot b+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot a=\frac{3}{2}(a+b)$.

由已知易得 $\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-3}{b-1}\cdot b=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-3}{a-1}\cdot a=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}(a+b)$.

解得 $a=b=3$. 即 $D(3,3)$，故 $ABCD$ 为平行四边形.

例 11 如图 18 - 11，H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是 $\triangle ABC$ 内任一点，由 H 分别向 PA，PB，PC 引垂线 HL，HM，HN 与 BC，CA，AB 的延长线相交于 X，Y，Z，其中 L，M，N 为垂足. 求证：X，Y，Z 三点共线.

证明 由于 H 是一特殊点，将其作为反演中心，则只须证 X，Y，Z 的象点(或反点)与 H 共圆.

设 $\triangle ABC$ 的高线分别交 BC，CA，AB 的垂足为 D，E，F，则 $HA\cdot HD=HB\cdot HE=HC\cdot HF$. 又 A，D，L，X 共圆，有 $HL\cdot HX=HA\cdot HD$.

同理，$HM\cdot HY=HB\cdot HE$，$HN\cdot HZ=HC\cdot HF$.

以 H 为反演中心，则 L 与 X，N 与 Z，M 与 Y 均为反点. 又 L，P，N，H 共圆，L，P，M，H 共圆，有 L，N，M，H 共圆，故 X，Z，Y 三点共直线.

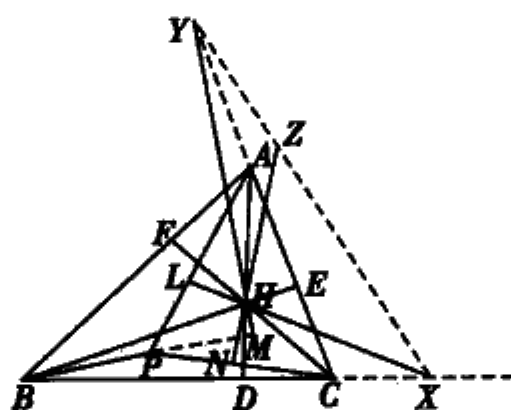


图 18 - 11

例 12 如图 18 - 12，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P. 设三角形 ABP，BCP，CDP 和 DAP 的外接圆心分别是 O_1，O_2，O_3，O_4. 求证：OP，O_1O_3，O_2O_4 三直线共点. （1990 年全国高中联赛题）

证明 由于本题涉及的圆很多，于是可考虑反演变换. 取 P 为反演中心，P 关于圆 O 的幂为反演基圆半径，则圆 O 反演为本身，$\odot O_i(i=1,2,3,4)$ 反演为四边形 $ABCD$ 各边所在直线，过点 P 的直线也反演为本身.

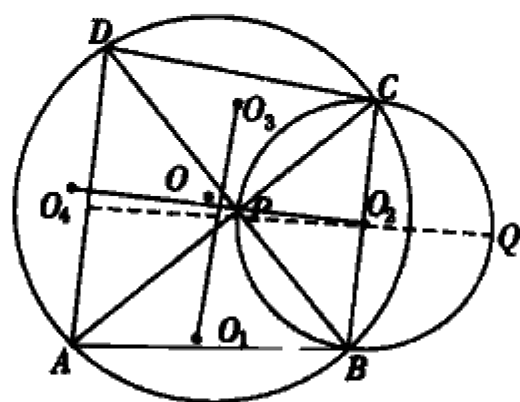


图 18 - 12

由直线 PO_2 与 $\odot O_2$ 正交,可知它们的反形也正交,即 $PO_2 \perp AD$.又易知 $O_4O \perp AD$,所以 $PO_2 /\!/ O_4O$.

同理,$PO_4 /\!/ O_2O$.所以 PO_2OO_4 为平行四边形,PO,O_2O_4 互相平分.

同理,PO,O_1O_3 也互相平分,命题得证.

【解题思维策略分析】

1.注意同一类变换的多次运用

例 13 如图 18－13,凸四边形 $ABCD$ 的边是位于形外的、两两相似的等腰$\triangle APB$、$\triangle BQC$,$\triangle CRD$、$\triangle DSA$ 的底边.已知 $PQRS$ 是矩形,且 $PQ \neq QR$.证明:$ABCD$ 是菱形.

(第 15 届全俄第三阶段赛题)

证明 设这些相似的等腰三角形的顶角为 $\theta(\neq 90^\circ)$.

考虑一系列的旋转变换:点 A 绕点 P 转 θ 角到点 B,点 B 绕点 Q 转 θ 角到点 C,合成为点 A 绕点 E 转 2θ 角到点 C.同理点 C 绕点 F 转 2θ 角到点 A,其中$\angle EPQ = \angle PQE = \angle FRS = \angle RSF = \frac{1}{2}\theta$.从而 $EA = EC$,$FA = FC$,$\angle AEC = \angle AFC = 2\theta \neq 180^\circ$.于是$\triangle AEC \cong \triangle AFC$,$AECF$ 是菱形.又由于 $PQ = SR$,则$\triangle PEQ \cong \triangle SFR$.因此,$E$,$F$ 在矩形 $PQRS$ 的中位线上,从而 AC 被该中位线垂直平分于矩形中心 O 点.同理 BD 也被矩形 $PQRS$ 的另一中位线垂直平分于矩形中心 O 点.故 $ABCD$ 是菱形.

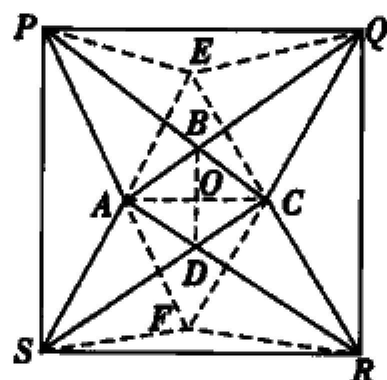


图 18－13

若 $\theta = 90^\circ$,则 E,F 都与矩形 $PQRS$ 的中心 O 重合,且$\angle POQ = \angle ROS = 90^\circ$,从而知 $PQRS$ 是正方形,矛盾.所以 $\theta \neq 90^\circ$.

例 14 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,$AB = BC = CD$,$DE = EF = FA$,$\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$,$G$,$H$ 是六边形内两点,使$\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$.求证:$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$.

(IMO－36 试题)

证明 如图 18－14,分别以 AB,DE 为边向六边形外作正$\triangle ABM$ 和$\triangle DEN$,将$\triangle AGB$ 绕 A 逆时针方向旋转 60° 到$\triangle AG'M$,则$\triangle AGG'$ 为正三角形.故 $AG = GG'$,$GB = G'M$.

同样,将$\triangle EHD$ 绕 E 点顺时针方向旋转 60° 到$\triangle EH'N$,则$\triangle EHH'$ 为正三角形.于是 $EH = HH'$,$HD = H'N$.

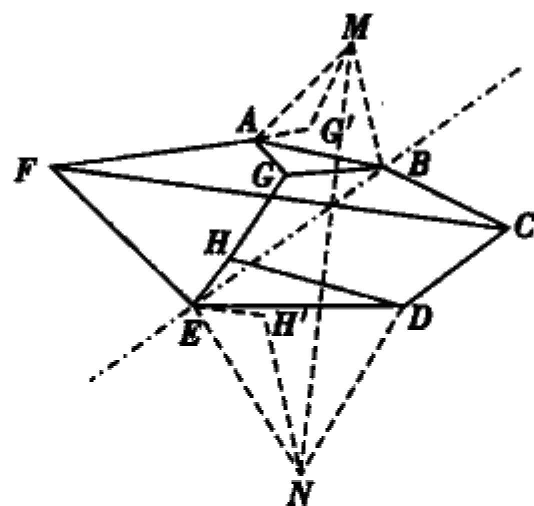


图 18－14

连 MN，则多边形 $AMBCDEF$ 关于轴 BE 对称，$MN=CF$. 另一方面，由"两点间线段最短"有

$$AG+GB+GH+DH+HE=MG'+G'G+GH+HH'+H'N'\geqslant MN=CF.$$

2. 注意几类变换的配合运用

例 15 平面上有两个直角三角形，其斜边上的中线互相平行. 证明：一个三角形的一条直角边与另一个三角形的某条直角边之间的（小于直角的）夹角小于两条斜边之间的夹角.

（第 19 届全俄竞赛题）

证明 平行移动两个给定的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ 中的一个，使两三角形的直角顶点 C 与 C' 重合，并以点 C 为中心，作位似变换，使得两三角形的中线重合，如图 18－15. 那么以 E 为圆心，CE 为半径的圆将外接这两个三角形，并且它们斜边之间的夹角是圆心角，而它是相应的圆周角的两倍，这圆周角是直角边之间（小于直角）的夹角（图中 $\angle AEA'=2\angle ACA'$），注意到上述的平移及位似变换均不改变直线间的夹角，于是结论获证.

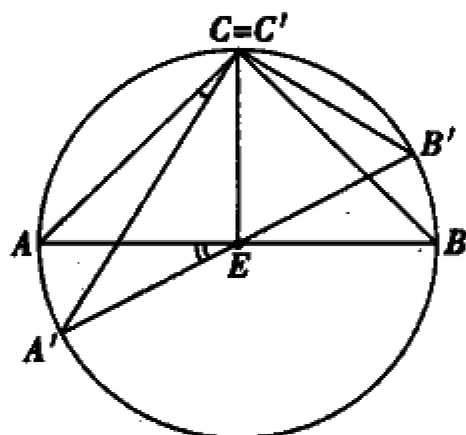


图 18－15

例 16 如图 18－16，$\triangle ABC\backsim\triangle LMN$，且 $AC=BC$，$LN=MN$，顶点按逆时针顺序排列，并在同一平面内，而且 $AL=BM$. 证明：CN 平行于 AB 和 LM 中点的连线.

（第 19 届全俄第 3 阶段竞赛题）

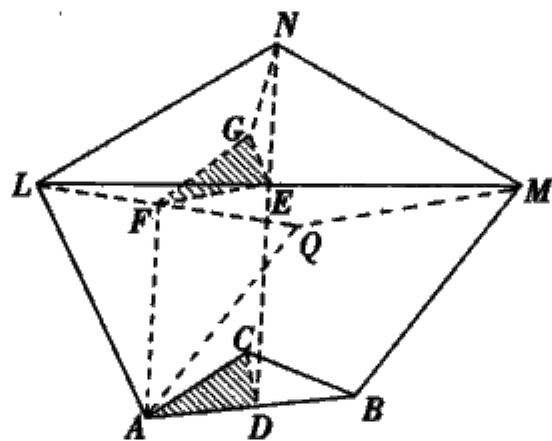


图 18－16

证明 平移线段 AB 到 QM，因 $AL=BM$，$BM=AQ$，则 $AL=AQ$，即 $\triangle ALQ$ 为等腰三角形. 若 F 为 LQ 的中点，则 $AF\perp LQ$. 设 E 为 LM 的中点，D 为 AB 的中点，则 FE 是 $\triangle QLM$ 的中位线，$FE=\frac{1}{2}QM=\frac{1}{2}AB=AD$ 及 $FE/\!/QM/\!/AD$，因此 $AFED$ 是平行四边形，即 $AF/\!/DE$，$AF=DE$. 又 $AF\perp LQ$，故 $DE\perp LQ$.

平移 $\triangle ABC$，使 A 点重合于 F 点，D 点重合于 E 点，则 C 点移到 G 点，$\triangle ADC\cong\triangle FEG$，$AF/\!/CG/\!/DE$ 及 $CG=DE$.

由 $\triangle ADC\backsim\triangle LEN$，得 $\triangle FEG\backsim\triangle LEN$ 且 $\frac{FE}{LE}=\frac{CE}{NE}$. 又因 $\angle GEF=\angle NEL=90°$，故 $\angle GEN=\angle LEF$，进而 $\triangle FEL$ 可由 $\triangle GEN$ 绕 E 点逆时针旋转 90°并经位似变换而得到. 由此得 $GN\perp LF$，即 $GN\perp LQ$. 又 $GC\perp LQ$，即 G,C,N 都在垂直于 LQ 的一条直线上. 因此，$CN/\!/AF$，亦即 $CN/\!/DE$，原命题得证.

【模拟实战】

习题 A

1. 给定以 O 为圆心，AB 为直径的半圆周，在其上取点 K 和 M，在直径上取点 C，使得 $\angle KCA = \angle MCB$. 证明：K, C, O, M 四点共圆.　　(第 18 届全俄竞赛题)
2. 在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$. 任意延长 CA 到 P，再延长 AB 到 Q，使 $AP = BQ$. 求证：$\triangle ABC$ 的外心 O 与 A, P, Q 四点共圆.　　(1994 年全国初中联赛题)
3. 在半径为 1 的圆周上给定弦 AB，其长小于$\sqrt{2}$，不与圆相交的直线 l 与弦 AB 成 45°. 用圆规和直尺在直线 l 上作出点 C，使得线段 DE 与 AB 垂直(C, E 分别是 CA, CB 与圆的交点).　　(第 16 届全俄竞赛题)
4. $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 2$，BC 边上有 100 个不同的点 $P_1, P_2, \cdots, P_{100}$，记 $m_i = AP_i^2 + BP_i \cdot P_iC (i = 1, 2, \cdots, 10)$，求 $m_1 + m_2 + \cdots + m_{100}$ 的值.　　(1990 年全国初中联赛题)
5. 从以 AD 为直径的半圆周上的点 B, C 分别作 BE, CF 垂直于 AD 于 E, F. 线段 AC 与 BD 相交于 P，线段 BF 与 CE 相交于 Q. 求证：直线 $PQ \perp AD$.　　(第 17 届全俄第 3 阶段竞赛题)
6. 设两个等圆相交，由其对称中心引出两条射线，它们交圆周于不在同一直线上的四点. 证明：这四点共圆.　　(第 19 届全俄竞赛题)
7. 在矩形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 上分别取异于顶点的点 K, L, M, N. 已知 $KL /\!/ MN$，$KM \perp NL$ 于 O. 证明：KM 和 LN 的交点在矩形的对角线 BD 上.　　(第 25 届全苏竞赛题)
8. $\triangle ABC$ 的中线 AE, BF 和 CD 相交于 M. 已知 E, C, F 和 M 共圆，且 $CD = n$. 求线段 AB 的长度.　　(第 18 届全俄竞赛题)
9. 等边$\triangle ABC$ 和$\triangle KMN$(顶点按逆时针顺序)在同一平面内，且$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{NB}$. 证明：线段 CM 和 AN 互相垂直，且$\dfrac{CM}{AN} = \sqrt{3}$.　　(第 19 届全俄竞赛题)
10. 运用位似旋转变换证明例 5.
11. 四边形 $ABCD$ 中，以一对对边的比 $AB:CD$ 内分另一对对边 AD, BC 于 E, F，延长 BA, CD 与 EF 的延长线分别相交于 G, Q. 试证：$\angle BGF = \angle FQC$.
12. 四边形 $ABCD$ 的对边 AD, BC 延长交于 E，AB, CD 延长交于 F. O 为其对角线交点，过 O 作 AB 的平行线 OQ 交 EF 于 Q. 求证：$OG = GQ$.

习题 B

1. 已知平面上三个半径相等的圆$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$两两相交于A,B,C,D,E,F，如图 18－17.证明：弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{EF}$的和等于$180°$.

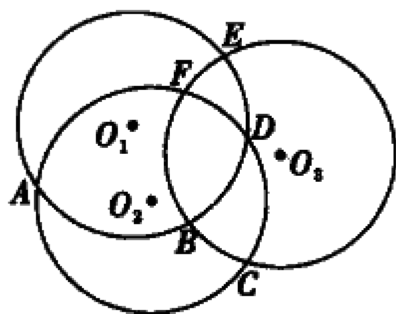


图 18－17

2. 如图 18－18，$\triangle A_1B_1C_1$在$\triangle ABC$内，且$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.作$B_1D \perp AC$于$D$，$C_1E \perp AB$于$E$，$A_1F \perp BC$于$F$.求证：$A_1F \cdot BC + B_1D \cdot AC + C_1E \cdot AB = 2S_{\triangle ABC}$.

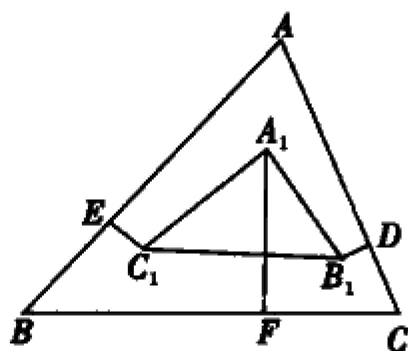


图 18－18

3. 设D是锐角$\triangle ABC$内部的一点，使得$\angle ADB = \angle ACB + 90°$，并有$AC \cdot BD = AD \cdot BC$.(1)计算比值$\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$；(2)求证：$\triangle ACD$的外接圆和$\triangle BCD$的外接圆在$C$点的切线互相垂直.（IMO34－2 试题）

4. BK是锐角$\triangle ABC$的高，以BK为直径作圆分别交AB，BC于E，F.过E，F分别引所作圆的切线.证明：两切线的交点在过顶点B的$\triangle ABC$的中线所在的直线上.（第 21 届俄罗斯竞赛题）

5. 在梯形$ABCD$中，腰$AB = CD$.将$\triangle ABC$绕点C转过一个角度，而得到$\triangle A'B'C$.证明：线段$A'D$，BC和$B'C$的中点共线.（第 23 届全苏竞赛题）

6. $\triangle A_1B_1C_1$是不等边锐角$\triangle ABC$的垂足三角形，A_2，B_2，C_2是$\triangle A_1B_1C_1$的内切圆分别切B_1C_1，C_1A_1，A_1B_1的切点.证明：$\triangle A_2B_2C_2$与$\triangle ABC$的欧拉线重合.（第 7 届巴尔干地区竞赛题）

7. 在钝角$\triangle ABC$（$\angle C$为钝角）的BC边上选取点D（异于B，C点）.过线段BC（异于D）的内点M引直线AM，交$\triangle ABC$的外接圆S于点N.经过点M，D和N作圆，交圆S于N及另一点P，问点M在何位置时，线段MP的长度最短？（第 22 届全苏竞赛题）

8. $ABCD$是一个四边形，且$BC /\!/ AD$，M是CD的中点，P是MA的中点，Q是MB的中点，直线DP，CQ交于点N.求证：点N不在$\triangle ABM$外部的充要条件是上下底边长之比在$[\frac{1}{3},3]$上.（IMO－35 预选题）

9. 在$\triangle ABC$中，$AB = 12$，$AC = 16$，M是BC的中点，E，F分别在AB，AC上，EF交AM于G，且$AE = 2AF$.求比值$\dfrac{EF}{GF}$.（IMO－29 预选题）

10. 三个全等的圆有一个公共点 Q，并且都在一个已知三角形内，每一个圆与三角形的两条边相切．求证：三角形的内心 I，外心 O 与已知点 Q 共线． (IMO－22 试题)

11. $\triangle A_1A_2A_3$ 是一个非等腰三角形，它的边长分别为 a_1, a_2, a_3，其中 a_i 是 A_i 的对边 $(i=1,2,3)$，M_i 是边 a_i 的中点，$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆 $\odot I$ 切边 a_i 于 T_i 点，S_i 是 T_i 关于 $\angle A_i$ 的平分线的对称点．求证：M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 三直线共点．(IMO－23 试题)

12. 设 A 是两个不相等的，分别以 O_1 与 O_2 为圆心而共面的圆 C_1 与 C_2 的两个不同交点之一．一条外公切线切 C_1 于 P_1，切 C_2 于 P_2；另一条公切线切 C_1 于 Q_1，切 C_2 于 Q_2．设 M_1 是 P_1Q_1 的中点，M_2 是 P_2Q_2 的中点．证明：$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$．

(IMO－24 试题)

13. 已知两相切圆 C_1, C_2，点 P 在根轴上，即与两圆连心线垂直的公切线上．试用圆规和直尺作所有的圆 C，使得 C 与 C_1, C_2 相切，且过 P 点．(1991 年亚太地区竞赛题)

14. 给定两个圆，其中一个圆在另一个内部，且两圆相切于点 N．外圆的弦 BA 和 BC 分别与内圆相切于点 K 和 M．外圆的弦 BA 和 BC 分别与内圆相切于点 K 和 M．设不包含点 N 的弧 $\overparen{AB}$ 和 $\overparen{BC}$ 的中点分别是 Q 和 P．$\triangle BQK$ 和 $\triangle BPM$ 的外接圆的第二个交点为 B_1．证明：BPB_1Q 为平行四边形． (第 26 届俄罗斯竞赛题)

15. 四边形 $ABCD$ 外切于圆 ω，边 AB 和 CD 所在的直线相交于点 O．圆 ω_1 与边 BC 相切于点 K，且与边 AB 和 CD 所在的直线都相切；圆 ω_2 与边 AD 相切于点 L，且亦与边 AB 和 CD 作在的直线都相切．现知点 O, K, L 共线，证明：边 BC 和 AD 的中点以及圆 ω 的圆心三点共线． (第 26 届俄罗斯竞赛题)

第二篇 立体几何问题

第十九章 空间射影图的性质及应用

【基础知识】

空间中一点在某直线或在某平面上的射影，就是从该点向直线或平面所作垂线段的垂足.

空间一条直线在一平面内的射影可能是一条直线，也可能为一点，因而空间两异面直线之间的距离，可以转化成两异面直线在某一平面的射影或是两条平行直线，或是一点与一条直线而求.

空间图形有如下一系列有趣的性质：

性质 1 从空间一点向一个平面所引的斜线段中，斜线段相等其射影相等，斜线段较长的其射影也较长.反之亦真.

性质 2 长度为 l 的线段与其射影线段的长 l_0 有如下关系：$l_0 = l\cdot\cos\alpha$.其中 α 为长度为 l 的线段所在直线与射影线段所在直线的夹角.

性质 3 长度为 l 的线段在与其共面的两相互垂直的直线上的射影长 l_1,l_2 有如下关系式：$l^2 = l_1^2 + l_2^2$.

注 此式即为三角形中的勾股定理.

性质 4 长度为 l 的线段，与它在三条两两互相垂直的直线上的射影长 l_1,l_2,l_3 有如下关系式：$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$.

注 长方体对角线长的公式是其特例.

性质5 长度为 l 的线段 AB 的两端点 A,B 分别属于一个角度为 θ 的二面角的两个半平面 α 与 β，AB 与平面 α 所成的角为 θ_1，与平面 β 所成的角为 θ_2，点 A,B 到这个二面角的棱的距离分别为 l_1,l_2，则 $\frac{l_2}{\sin\theta_1}=\frac{l_1}{\sin\theta_2}=\frac{l}{\sin\theta}$.

证明 如图19-1，设 AC 垂直于二面角的棱，作 $AO\perp\beta$ 于 O，则 CO 为 AC 在平面 β 上的射影，知 $\angle ACO=\theta$. 又 BO 为 AB 在 β 上的射影，知 $\angle ABO=\theta_2$，于是

$AO=AC\cdot\sin\theta=l_1\cdot\sin\theta$，$AO=AB\cdot\sin\beta=l\cdot\sin\theta_2$，故有

$$\frac{l_1}{\sin\theta_2}=\frac{l}{\sin\theta}.$$

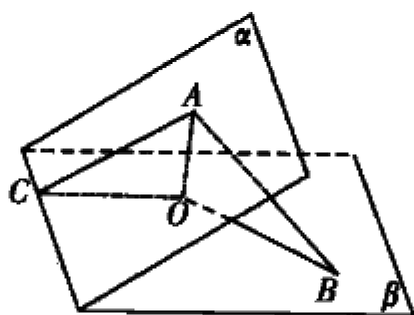


图19-1

同理可得，$\frac{l_2}{\sin\theta_1}=\frac{l}{\sin\theta}$. 故 $\frac{l_2}{\sin\theta_1}=\frac{l_1}{\sin\theta_2}=\frac{l}{\sin\theta}$.

注 若 AB 与二面角的棱垂直时，上式即为三角形中的正弦定理.

性质6 设 $\angle APB=\theta(0<\theta<\pi)$ 在平面 M 的一侧，顶点 M 在平面 M 上，边 PA，PB 与平面 M 所成的角分别为 $\theta_1,\theta_2(0\leqslant\theta_1,\theta_2<\frac{\pi}{2})$，在平面 M 上的射影分别为 PA_1，PA_2，$\angle A_1PB_1=\alpha(0<\alpha<\pi)$，平面 APB 与平面 M 所成的二面角为 $\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$，则

$$\cos\alpha=\frac{\cos\theta-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}.$$

证明 不妨设 $AA_1<BB_1$，$PA=a$，$PB=b$，过 A 引 $AC/\!/A_1B_1$ 交 BB_1 于 C，则有 $\cos\alpha=\frac{PA^2+PB_1^2-A_1B_1^2}{2PA_1\cdot PB_1}=\frac{PA_1^2+PB_1^2-AC^2}{2PA_1\cdot PB_1}$，而 $AC^2=AB^2-BC^2$，$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$，$BC=b\cdot\sin\theta_2-a\cdot\sin\theta_1$，从而

$$\begin{aligned}AC^2&=(a^2+b^2-2ab\cos\theta)-(b\sin\theta_2-a\cdot\sin\theta_1)^2\\&=a^2\cdot\cos^2\theta_1+b\cdot\cos^2\theta_2-2ab(\cos\theta-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2).\end{aligned}$$

又 $PA_1=a\cdot\cos\theta_1$，$PB_1=b\cdot\cos\theta_2$，由此即可证.

性质7 已知 $\angle BAC$ 的两边与平面 M 相交于 B,C 两点，点 A 在平面 M 内的射影为 A'，且 A',B,C 不共线. 设直线 AB 和 AC 与平面 M 所成的角分别为 θ_1,θ_2，那么当且仅当 $\cos\angle BAC\gtreqqless\frac{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{1-\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}$ 时，有 $\cos\angle BAC\lesseqqgtr\angle BA'C$.

证明 如图19-2，在 $\text{Rt}\triangle AA'B$ 中，$A'A^2=AB^2-A'B^2$.

同理，$A'A^2=AC^2-A'C^2$.

在$\triangle ABC$中，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$.

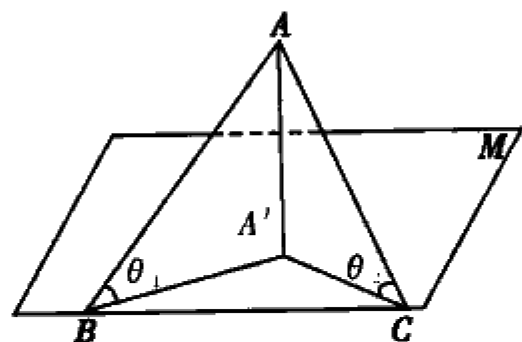


图 19－2

从而，在$\triangle A'BC$中，$\cos\angle BA'C=\dfrac{A'B^2+A'C^2-BC^2}{2A'B\cdot A'C}=$

$\dfrac{AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC-A'A^2}{A'B\cdot A'C}$.

又 $AA'=AB\cdot\sin\theta_1$，$A'B=AB\cdot\cos\theta_1$，$A'A=AC\cdot\sin\theta_2$，$A'C=AC\cdot\cos\theta_2$，从而

$$\cos\angle BA'C=\frac{AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC-AB\cdot\sin\theta_1\cdot AC\cdot\sin\theta_2}{AB\cdot\cos\theta_1\cdot AC\cdot\cos\theta_2}=\frac{\cos\angle BAC-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}.$$

因此，有$\angle BAC\lesseqqgtr\angle BA'C\Leftrightarrow\cos\angle BAC\gtreqqless\cos\angle BA'C$

$$\Leftrightarrow\cos\angle BAC\gtreqqless\frac{\cos\angle BAC-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}$$

$$\Leftrightarrow(1-\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2)\cdot\cos\angle BAC\lesseqqgtr\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2$$

$$\Leftrightarrow\cos\angle BAC\lesseqqgtr\frac{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{1-\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}.$$

注 (1)性质7中条件"A'，B，C不共线"可放宽为"A'与B，C都不重合".

(2)若已知$\angle BAC$的两边与平面M相交于B，C两点，点A在平面M内的射影为A'，且A'，B，C不共线．令$\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$，平面ABC与平面M所成二面角的大小为$\varphi(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$，则当且仅当$\cos\varphi\lesseqqgtr-\cot\alpha\cdot\cot\beta$时，有$\angle BAC\gtreqqless\angle BA'C$.（此结论的证明可见《数学通报》2001年4期P22页）

性质8 在二面角的一个半平面上的任意多边形的面积S与这个二面角度数$\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的余弦之乘积，等于这个多边形在此二面角的另一个半平面上射影多边形的面积S'．即$S'=S\cdot\cos\varphi$.

性质9 设顶点P在平面M内，两边PA，PB分别与M在同侧所成角为θ_1，θ_2，且$\angle APB=\theta(0<\theta<\pi)$的两边$PA$，$PB$在平面$M$上的射线分别为$PA_1$，$PB_1$，$\angle A_1PB=\alpha$，平面$APB$与平面$M$所成的二面角为$\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$，则$\cos\varphi=\dfrac{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\sin\alpha}{\sin\theta}$.

证明 由性质8，有$S_{\triangle PA_1B_1}=S_{\triangle PAB}\cdot\cos\varphi$.

$$于是，\cos\varphi=\frac{S_{\triangle PA_1B}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{\frac{1}{2}PA\cdot\cos\theta_1\cdot PB\cdot\cos\theta_2\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}PA\cdot PB\cdot\sin\theta}=\frac{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\sin\alpha}{\sin\theta}.$$

由性质 8 并注意性质 5，即得如下两个推论：

推论 1 $\sin^2\varphi=\dfrac{\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

推论 2 $\tan^2\varphi=\dfrac{\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2-2\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

性质 10 面积为 S 的平面多边形与它在三个两两互相垂直的平面上的射影面积 S_1,S_2,S_2 有关系式：$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 19－3，在△ABC 中，P、Q、R 将其周长三等分，且 P、Q 在 AB 边上.求证：$\dfrac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\dfrac{2}{9}$.

（1988 年全国高中联赛题）

证明 不妨设周长为 1，设 L、H 分别为 C、R 在 AB 上的射影.

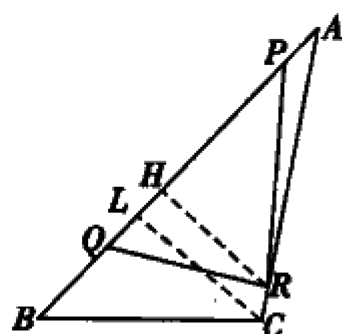


图 19－3

则$\dfrac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}PQ\cdot RH}{\frac{1}{2}AB\cdot CL}=\dfrac{PQ\cdot AR}{AB\cdot AC}$.

$\because\quad PQ=\dfrac{1}{3},AB<\dfrac{1}{2},\therefore\quad \dfrac{PQ}{AB}>\dfrac{2}{3}$.

$\because\quad AP\leqslant AP+BQ=AB-PQ<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$,

$AR=\dfrac{1}{3}-AP>\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6},AC<\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\quad \dfrac{AR}{AC}>\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3},\dfrac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$.

例 2 如图 19－4，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 的中点，F 在 AA_1 上，且 $A_1F:FA=1:2$.求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角.

（1985 年全国高中联赛题）

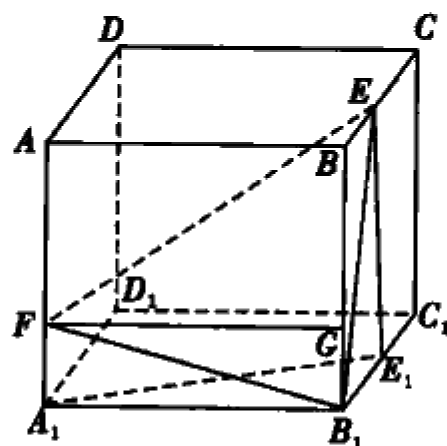


图 19－4

解 作 $EE_1\perp B_1C_1$ 于 E_1，设$\angle FB_1A_1=\theta_1$，$\angle EB_1E_1=\theta_2$，则 $\tan\theta_1=\dfrac{1}{3}$，$\tan\theta_2=2$.易知$\angle A_1B_1E_1$ 为$\angle FBE$ 在平面 A_1C_1 上的射影角，即$\angle A_1B_1E_1=\alpha=90°$.由性质 9 的推论 2，

有 $\tan^2\varphi=\dfrac{(\frac{1}{3})^2+2^2-2\cdot\frac{1}{3}\cdot 2}{12}=\dfrac{37}{9}$，故平面 B_1EF 与底面所成二面角为$\arctan\dfrac{\sqrt{37}}{3}$.

例3 设 AA_1B_1B 为圆柱的轴截面，C 为底面圆周上一点，$AA_1=1$，$AB=4$，$\angle BAC=60°$.求平面 A_1CB_1 与圆柱底面 AB 所成的二面角.

解 如图 19－5，设$\angle A_1CA=\theta_1$，$\angle B_1CB=\theta_2$，$\angle A_1CB_1=\theta$.由 $AB=4$，$\angle BAC=60°$，所以 $AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$.又因 $AA_1=1$，故 $A_1C=\sqrt{5}$，$B_1C=\sqrt{13}$，则 $\cos\theta_1=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$，$\cos\theta_2=\dfrac{2}{13}\sqrt{39}$.

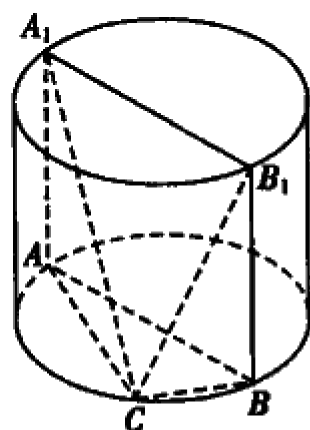


图 19－5

于是 $\cos\theta=\dfrac{A_1C^2+B_1C^2-A_1B_1^2}{2A_1C\cdot B_1C}=\dfrac{\sqrt{65}}{65}$，由此得 $\sin\theta=\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.

显然，$\angle BAC=\alpha=90°$，以此代入性质 9 中结论，得

$\cos\varphi=\dfrac{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\sin\alpha}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\varphi=30°$.

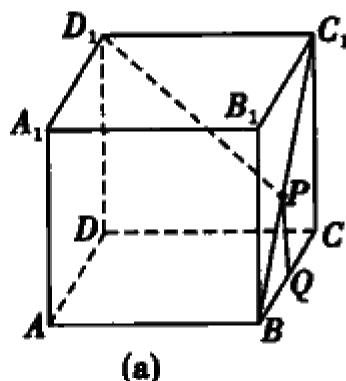
故平面 A_1CB_1 与底面成 30°的二面角.

【解题思维策略分析】

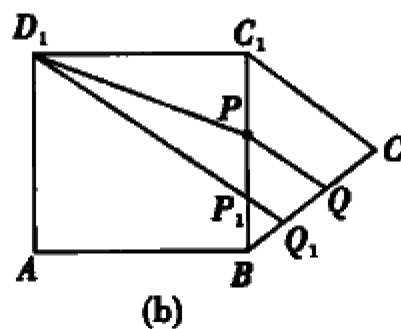
1. 射影——空间通往平面的桥梁

一些空间元素间的距离，或者线、面之间所成的角，常常可以通过射影的方式，把要求的数据通过它们在某一平面的影象而获得.

例4 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 是面对角线BC_1 上一动点，Q 是底面 $ABCD$ 上一动点.试求 D_1P+PQ 的最小值. （1998 年“希望杯”竞赛题）



(a)



(b)

图 19－6

解 由题设，知 D_1P+PQ 最小时，点 Q 必定是点 P 在底面上的射影，如图 19－6(a)，D_1P 与 PQ 是在二面角 D_1-BC_1-C 的两个面内，为此将$\triangle BC_1C$ 绕 BC_1 旋转 90°，使$\triangle BC_1C$ 与对角面 ABC_1D_1 在同一个平面内，如图 19－6(b).

由 $PQ\perp BC$，故当 D_1，P，Q 共线且与 BC_1 垂直时，D_1P+PQ 最小，可求得 $D_1Q_1=$

$D_1P_1+P_1Q_1=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.故所求最小值为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 5 在四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是凸四边形,$AC\perp BD$,且 AC 与 BD 的交点 O 恰是顶点 S 在底面上的射影.证明:O 点在四棱锥各侧面上的射影在同一圆周上.

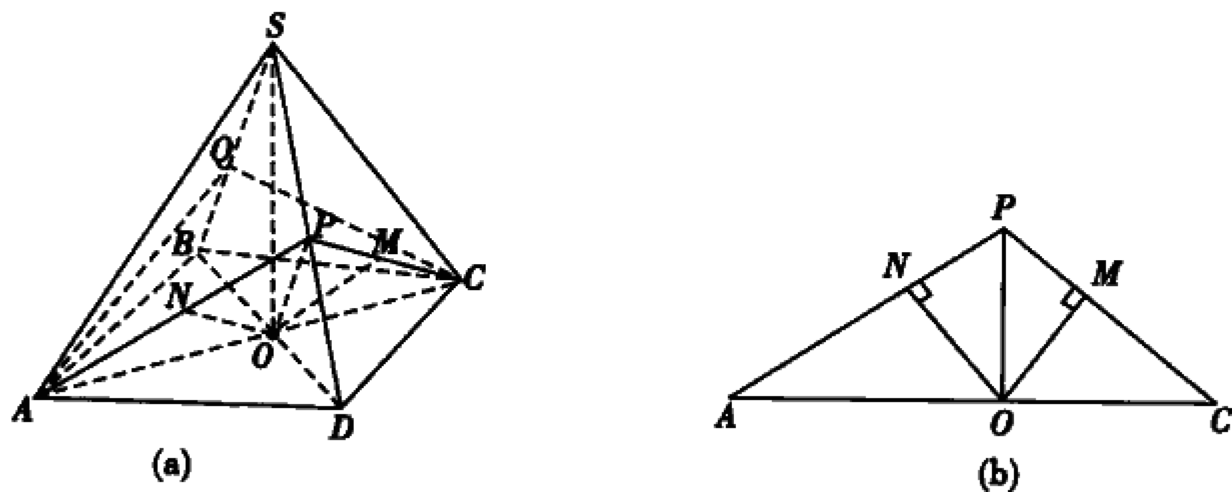


图 19-7

证明 如图 19-7(a),设 K,L,M,N 分别是 O 点在侧面 SAB,SBC,SCD,SDA 上的射影.在侧面 SCD 内,连 CM 并延长交 SD 于 P 点.由 $OC\perp SO$ 及 $OC\perp OD$,得 $OC\perp SD$.因 $OM\perp$面 SCD,CM 是 OC 在面 SCD 内的射影,故 $SD\perp CM$.同理 $DM\perp SC$,因而 M 是$\triangle SCD$ 的垂心.

同理,K,L,M 分别是各相应侧面三角形的垂心.

连 PO,由三垂线定理得 $OP\perp SD$.连 AP,同理得 $AP\perp SD$.从而 AP 过$\triangle SAD$ 的垂心 N.

同样地,分别在$\triangle SAB$,$\triangle SBC$ 内引棱 SB 上的高 AQ,CQ,它们分别过点 K,L,且交 SB 于 Q 点.

在$\triangle APC$ 中,$PO\perp AC$,$ON\perp AP$,$OM\perp PC$,如图 19-7(b).设 $OA=a$,$OC=b$,$OP=c$,则 $OA^2=NA\cdot AP$,$OP^2=PN\cdot AP$,从而$\frac{PN}{NA}=\frac{OA^2}{OP^2}=\frac{a^2}{c^2}$.同理$\frac{CM}{MP}=\frac{b^2}{c^2}$.

设 $OQ=d$,类似可得$\frac{AK}{KQ}=\frac{a^2}{d^2}$,$\frac{QL}{LC}=\frac{d^2}{b^2}$.

点 K,L,M 和 N 分别在四面体 $AQCP$ 的棱 AQ,QC,CP 和 PA 上,且$\frac{AK}{KQ}\cdot\frac{QL}{LC}\cdot\frac{CM}{MP}\cdot\frac{PN}{NH}=\frac{a^2}{d^2}\cdot\frac{d^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{d^2}=1$.

由四面体中的梅涅劳斯定理,知 K,L,M,N 在同一平面(记为 α)内.

以 SO 为直径作球,因为$\angle SKO=\angle SLO=\angle SMO=\angle SNO=90°$,所以 K,L,M 和 N 均在上述球面上.因此,K,L,M 和 N 同在平面 α 与球面相交的圆周上.

例 6 设有立方体 $ABCD-A'B'C'D'$（相对的面是 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$，其中 $AA'\parallel BB'\parallel CC'\parallel DD'$）. 点 x 以恒速在正方形 $ABCD$ 的周界上按 A、B、C、D 的顺序运动，点 y 以同样的恒速在正方形 $B'C'CB$ 的周界上按 B'、C'、C、B 的顺序运动. 点 x 和 y 分别从点 A 和 B' 同时出发，求线段 xy 的中点 Z 的轨迹.

（IMO－4 试题）

解 设棱 AA' 的中垂面交立方体于正方形 $A_0B_0C_0D_0$，并设 Z_1 为 A_0B_0 之中点，Z_2 为 B_0C_0 之中点，Z_3 为 BD 之中点，如图 19－8.

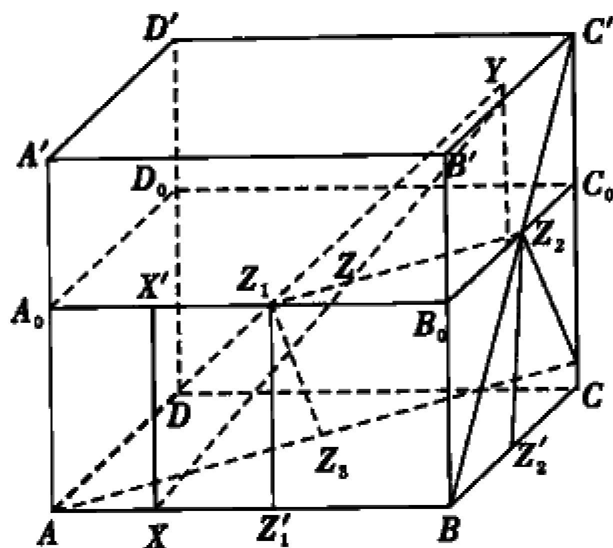


图 19－8

(i)当点 X 从点 A 出发遍历线段 AB，点 Y 从点 B' 出发以相同的速度遍历线段 $B'C'$，线段 XY 的中点 Z 则由线段 AB' 的中点 Z_1 出发到线段 BC' 的中点 Z_2. 设线段 $X'Y'$ 表示线段 XY 在平面 $A_0B_0C_0D_0$ 内的射影，则知线段 XY 的中点 Z 也是线段 $X'Y'$ 的中点. 因此中点 Z 在平面 $A_0B_0C_0D_0$ 上. 显然，线段 Z_1Z_2 是中点 Z 的轨迹.

(ii)当点 X 由点 B 到 C 遍历线段 BC 时，则点 Y 由点 C' 到 C 遍历线段 $C'C$. 由于速度相同，所有在平面 BCC' 上的直线 XY 都平行于线段 BC'，且点 X 和 Y 同时到达点 C，因此线段 Z_2C 是线段 XY 的中点 Z 的轨迹.

(iii)同理，当点 X 遍历线段 CD，同时点 Y 遍历线段 CB 时，则所有在平面 ABC 上的直线 XY 都平行于线段 BD，且点 X 和 Y 同时分别达到 D 和 B，因此线段 Z_3C 是线段 XY 的中点 Z 的轨迹.

(iv)最后，当 X 沿线段 DA 返回点 A，同时点 Y 沿线段 BB' 返回点 B' 时，则只要适当地交换正方体的棱就可知道位置与情况(i)相同，因此线段 XY 的中点 Z 遍历线段 Z_3Z_1.

由于线段 Z_1Z_2、Z_2C、CZ_3、Z_3Z_1 和 Z_3Z_2 的长都等于一侧面的对角线之半. 另外，线段 Z_1Z_2 在平面 ABC 内的射影 $Z'_1Z'_2$ 平行于 Z_3C，得线段 $Z_1Z_2\parallel Z_3C$，因此四边形 $Z_1Z_2CZ_3$ 是一个平行四边形，而且是菱形，其中一个角如 $\angle Z_3CZ_2=60°$.

2. 灵活运用性质求解问题

例 7 应当怎样放置长方体，才能使它在水平面的投影面积最大？

（1962 年莫斯科竞赛题）

解 长方体在水平面上的投影是六边形，设为 $ABCDEF$ 如图 19－9. 因为长方体每个侧面在水平面上的投影都是平行四边形，所以 $\triangle ACE$ 的面积是整个长方体投影面积的一半. 设 $\triangle ACE$ 是长方体内 $\triangle A'C'E'$ 的投影，设 φ 为 $\triangle A'C'E'$ 所在平面与水平面的

夹角,则由性质 8,知 $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle A'C'E'}\cdot\cos\varphi$.显然,要使得长方体的投影面积最大,应当 $S_{\triangle ACE}$最大,因而必须有 $\cos\varphi = 1$,即 $\varphi = 0°$.这表明,当长方体中的$\triangle A'C'E'$所在平面与水平面平行时,长方体的投影面积达到最大.

因此,应当这样放置长方体,使得经过它的自同一个顶点出发的 3 条棱的另一端点 A',C',E'的平面与水平面平行.

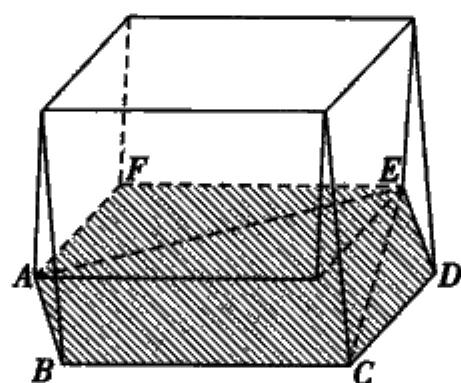


图 19-9

例 8 如图 19-10,四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为直角梯形,$AB /\!/ CD$,$AB\perp AD$,侧面 SAD 垂直于底面,设$\angle ASB = 30°$,$\angle DCS = 45°$.求当侧面 SAD 与侧面 SBC 所成的二面角为 60°时,求$\angle BSC$ 及$\angle ASD$ 的大小.

解 因侧面 $SAD\perp$底面 $ABCD$,$AB /\!/ CD$,$AB\perp AD$,故 AB,CD 均垂直于侧面 SAD,则$\angle ASB$,$\angle CSD$ 分别为 SB,SC 与平面 SAD 所成的角,于是$\angle ASB = \theta_1 = 30°$,$\angle CSD = \theta_2 = 45°$.已知 $\varphi = 60°$,由性质 9 的推论 1,有

$$\sin^2 60° = \frac{\sin^2 30° + \sin^2 45° - 2\sin 30°\cdot\sin 45°\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

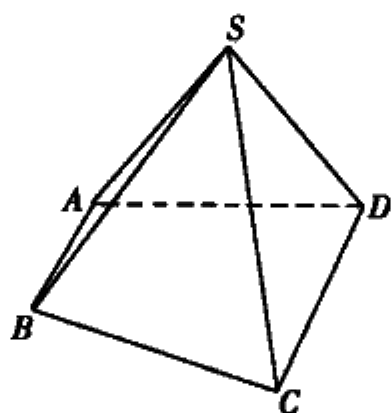


图 19-10

从而,$3\sin^2\theta = 3 - 2\sqrt{2}\cos\theta$,那 $\cos\theta(3\cos\theta - 2\sqrt{2}) = 0$.

于是 $\cos\theta_1 = 0$,$\cos\theta_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.故 $\theta_1 = 90°$,$\theta_2 = \arccos\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

又由性质 6,当 $\theta_1 = 90°$时,$\cos\alpha = \frac{-\sin 30°\cdot\sin 45°}{\cos 30°\cdot\cos 45°} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $\alpha_1 = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;而当

$\theta_2 = \arccos\frac{2}{3}\sqrt{2}$时,$\cos\alpha = \dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{9}\sqrt{3}$,所以 $\alpha_2 = \arccos\frac{5}{9}\sqrt{3}$.

故$\angle BSC = 90°$,$\angle ASD = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\angle BSC = \arccos\frac{2}{3}\sqrt{2}$,$\angle ASD = \arccos\frac{5}{9}\sqrt{3}$.

例 9 如图 19-11,平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 在二面角 $\alpha - MN - \beta$ 的棱 MN 上,点 B,C,D 都在 α 上,且 $AB = 2AD$,$\angle DAN = 45°$,$\angle BAD = 60°$,求二面角 $\alpha - MN - \beta$ 的平面角 φ 的余弦值,使平行四边形 $ABCD$ 在半平面 β 上的射影是:(Ⅰ)菱形;(Ⅱ)矩形.

解 由性质 2,知 AD,BC 在平面 β 内的射影长度相等,AB,CD 在 β 内的射影长度也相等,从而,平行四边形 $ABCD$ 在 β 内的射影也为平行四边形(或一线段).

又由性质 8,知其射影面的面积为 $S_{ABCD}\cdot\cos\varphi$.

设 AD 与平面 β 所成的角为 x,则由性质 5,知

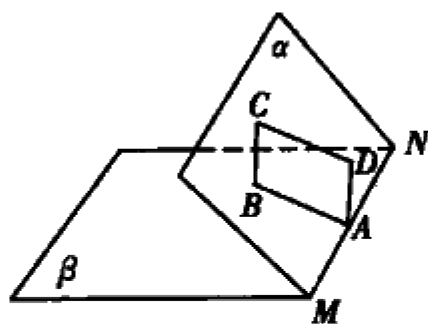


图 19－11

$\frac{AD}{\sin\varphi}=\frac{AD\cdot\sin45^\circ}{\sin x}$，即 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$．

其中用到 AD 与 MN 的夹角为 45°（从而 D 到 MN 的距离为 $AD\cdot\sin45^\circ$）．于是，设 B,C,D 在平面 β 内的射影分别为 B',C',D' 时，则有 $AD'=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\cdot AD$．

同理，$AB'=\sqrt{1-\sin^2 75^\circ\cdot\sin^2\varphi}\cdot AB$．

（Ⅰ）如果 $AB'C'D'$ 为菱形，则 $AB'=AD'$，即

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\cdot AB=\sqrt{1-\sin^2 75^\circ\cdot\sin^2\varphi}\cdot AB.$$

即 $1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi=4(1-\sin^2 75^\circ\cdot\sin^2\varphi)=4-2(1-\cos150^\circ)\cdot\sin^2\varphi$．

于是 $\sin^2\theta=4\sqrt{3}-6$，故 $\cos\theta=2-\sqrt{3}$ 为所求．

（Ⅱ）如果 $AB'C'D'$ 为矩形，则应有 $S_{AB'C'D'}=AB'\cdot AD'$．于是 $S_{ABCD}\cdot\cos\varphi=AB'\cdot AD'$，即

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\cdot AB\cdot AD=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\sin^2 75^\circ\cdot\sin^2\varphi}\cdot AB\cdot AD.$$

进而有 $\frac{3}{4}\cos^2\varphi=(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)\cdot(1-\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\sin^2\varphi)$．

于是，令 $t=\sin^2\varphi$，则 $(2+\sqrt{3})t^2-2(1+\sqrt{3})t+2=0$，

即 $t=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})}=\sqrt{3}-1$，从而 $\cos\theta=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 为所求．

【模拟实战】

习题 A

1．设 AM 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的中线，任作一条直线分别交 AB、AC、AM 于 P、Q、N．求证：$\frac{AB}{AP}$、$\frac{AM}{AN}$、$\frac{AC}{AQ}$ 成等差数列．（1978 年辽宁省竞赛题）

2．已知三角形 $P_1P_2P_3$ 和其内的任意一点，设直线 P_1P、P_2P、P_3P 交三角形的对边于 Q_1、Q_2、Q_3．证明：在比值 $\frac{P_1P}{PQ_1}$、$\frac{P_2P}{PQ_2}$、$\frac{P_3P}{PQ_3}$ 中，至少有一个不大于 2，也至少有一个不小于 2．（IMO－3 试题）

3. 已知$\triangle OAB$中$\angle AOB<90°$,从$\triangle OAB$中任一点$M(\neq 0)$分别作OA、OB的垂线MP,MQ.设H为$\triangle OPQ$的垂心,当点M遍历线段AB时,点H的轨迹是什么?

(IMO-7试题)

4. 长方体$A'C$中,$AB=5$,$BC=4$,$B'B=6$,且E是AA'的中点,求异面直线BE与$A'C'$间的距离.

5. 正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面的三条对角线AB_1、BC_1、CA_1中,若$AB_1\perp BC_1$,求证:$A_1C\perp AB_1$.

(1985年北京市高一竞赛题)

6. 棱长为12的正方体,被过A、E、F三点的平面α所截.若$BE=DF=9$,求正方体被平面α所截的截面面积.

(1979年辽宁省竞赛题)

7. 线段AB,CD夹在两个平行平面α与β之间,$AC\subset\alpha$,$BD\subset\beta$,$AB\perp\alpha$,$AC=BD=5$,$AB=12$,$CD=13$,E,F分别分AB,CD为1:2.求线段EF的长.

8. 过$\triangle ABC$的两个顶点A,B分别作平面ABC的同一侧垂线AD,BE,得到正三角形CDE,设$AD=1$,$BE=2$,$DE=3$.求平面CDE与平面ABC所成的二面角.

9. 在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$AB=AA_1$,试确定BB_1上的点E,使平面A_1EC与平面$A_1B_1C_1$所成的二面角为45°.

10. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为3,点P,Q,R分别是棱AA_1,BB_1,C_1D_1上的点,且$A_1P=1$,$B_1Q=2$,$C_1R=1$.设平面PQR与平面$ABCD$所成的二面角(锐角)为α,求α.

习题B

1. 已知四面体$ABCD$四个侧面的面积相等.求证:此四面体的三对对棱的长度相等.

2. 在三棱锥$S-ABC$中,$SA\perp$面ABC,$AB\perp BC$,点E为SC的中点,D为AC上的点,且$DE\perp SC$.又$SA=AB$,$SB=BC$,求以BD为棱,以BDE和BDC为面的二面角的大小.

3. 已知正四棱锥$P-ABCD$的侧面与底面所成的二面角的大小为α,相邻两个侧面所成二面角的大小为β.求证:$\cos\beta=-\cos^2\alpha$.

第二十章 空间向量法及应用

【基础知识】

空间向量法是以平面向量法为基础求解立体几何问题，以向量为工具的求解方法.

1. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别为异面直线 a,b 的方向向量，则由向量的数量积可知，异面直线 a、b 的夹角由 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$ 给出，且 $a\perp b\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

2. 设 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面的法向量，其方向一个指向内侧，另一个指向外侧，则向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 的夹角 θ，就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角：$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$. 据此，只要求得二面角两个半平面的异侧法向量，即可得到二面角的平面角. 值得指出是，要注意调整好向量的方向，使其夹角为二面角的平面角.

3. 设 AB 是平面 α 的斜线，$\boldsymbol{n}$ 是 α 的法向量，C 是垂足，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 n 上的射影长 $|BC|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{\boldsymbol{n}}$，$AB$ 与平面 α 的夹角 θ 为满足 $\sin\theta=\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$，即 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$ 或 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$. 据此，只需求得平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 及向量 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$，即可求得斜线 AB 与平面 α 的夹角 θ.

4. 证明直线 a 与 b 平行，只需证得其方向向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{B}$；证明平面 α 与 β 平行，只需证得它们的法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 满足 $\boldsymbol{n}_1=k\boldsymbol{n}_2$；证明三直线 a,b,c 共面，只需证明其方向向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$.

5. 若向量 $\overrightarrow{AP}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 上的射影长为 d，则点 P 到直线 AB 的距离为 $|PB|=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-d^2}$.

6. 设点 $M\in$ 平面 α，则 α 外一点 P 到平面 α 的距离，就是向量 $\overrightarrow{MP}$ 在平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的射影长度，即 P 到 α 的距离为 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}|}{|\boldsymbol{n}|}$. 据此，只需求得法向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{MP}$，即可求得点 P 到 α 的距离.

7. 设 AC 是异面直线 AB、CD 的公垂线，则 AB 与 CD 间的距离，就是向量 $\overrightarrow{BD}$ 在公

垂线方向向量$\overrightarrow{AC}$上的射影长度,即 $d=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}$.据此,只需求得向量$\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{AC}$,即得两异面直线的距离.

【典型例题与基本方法】

例 1 如图 20-1,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,$PD\perp$底面,且 $PD=AD=a$. 问:平面 PBA 与平面 PBC 能否垂直? 试说明之.

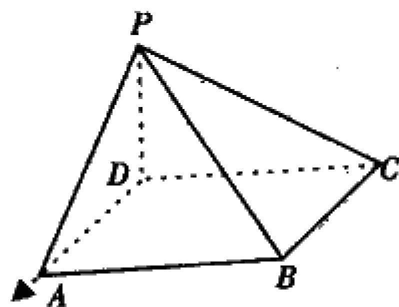


图 20-1

解 因为 $PD\perp$底面,所以 $PD\perp AD$, $PD\perp CD$.

设 $DC=b(b\neq a)$,设平面 PBA 的法向量

$\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{DP}+\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{DC}$,

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,即$(\overrightarrow{DP}+\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

所以 $\mu\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,所以 $\mu=0$.

又 $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0$,即$(\overrightarrow{DP}+\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AP}=0$,

所以$(\overrightarrow{DP}+\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DA})=0$,

所以$(\overrightarrow{DP})^2-\lambda(\overrightarrow{DA})^2=0$,

所以 $\lambda=\frac{a^2}{a^2}=1$,所以 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DA}$.

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{DP}+m\overrightarrow{DA}+n\overrightarrow{DC}$,

则 $\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PC}=0$,

同理得 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{DP}+\frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{DC}$,

所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{DP}+\frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{DC})=a^2$.

故平面 PBA 与平面 PBC 不可能垂直.

例 2 如图 20-2,已知异面直线 l_1、l_2,AB 为 l_1、l_2 的公垂线段,C、D 分别为 l_1、l_2 上的任意一点,$\boldsymbol{n}$ 为 AB 线段上的向量,求证:$|\overrightarrow{AB}|=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

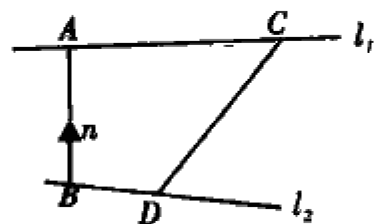


图 20-2

证明 因为$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$,

所以$\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\boldsymbol{n}=\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}+\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}+\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}+\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}$,

由 $AB\perp AC$, $AB\perp BD$,得$\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}=0$, $\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0$,

所以$\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}$,

所以$|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|=|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|=|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|$,

所以$|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{|\overrightarrow{CD}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

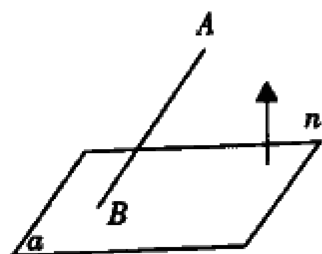


图 20-3

例 3 如图 20-3,已知 AB 为平面α 的一条斜线段,$\boldsymbol{n}$ 为平面α 的法向量.求证:A 到平面α 的距离为$\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

证明 因为$\cos<\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}$,

所以 A 到平面 α 的距离为

$|\overrightarrow{AB}||\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=|\overrightarrow{AB}|\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

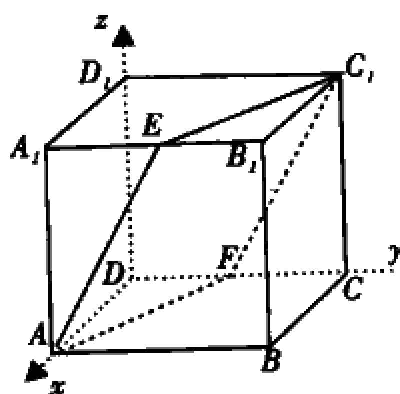


图 20-4

例 4 如图 20-4,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别是 A_1B_1、CD 的中点,求点 B 到截在 AEC_1F 的距离.

解 以 D 为原点,建立如图所示空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$F\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$,$E\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$,

所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)$.

设面 AEC_1F 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\lambda,\mu)$,

则有:$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0$,

所以$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\lambda+\mu=0\\-1+\dfrac{1}{2}\lambda=0\end{cases}$,所以$\begin{cases}\lambda=2\\\mu=-1\end{cases}$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$.

又$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$,所以点 B 到截面 AEC_1F 的距离为$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{1\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【解题思维策略分析】

1. 运用向量的线性运算求解问题

例 5 如图 20-5,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M 为 DD_1 的中点,点 N 在 AC 上,且 $AN:NC=2:1$,点 E 为 BM 的中点,求证:A_1、E、N 三点共线.

证明 令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,则

$$\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AA_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c},$$

$\overrightarrow{A_1E}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1M})$

$$=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})+(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AA_1})]$$

$$=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c})]$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\boldsymbol{c}.$$

从而$\overrightarrow{A_1E}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1N}$,故 A_1、E、N 三点共线.

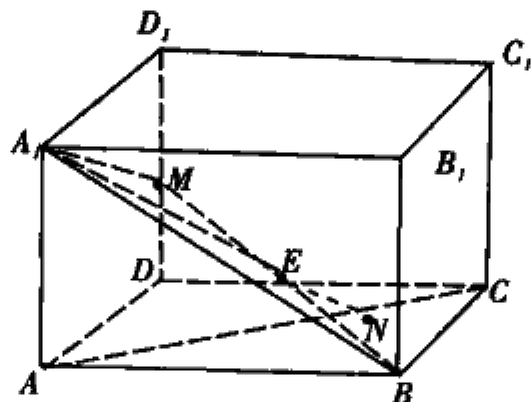


图 20-5

例 6 如图 20-6,E、F、G、H、K、L 分别为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AA_1,AB,BC,CC_1,C_1D_1,A_1D_1 的中点.求证:EF、GH、KL 三线共面.

证明 令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$AA_1=\boldsymbol{c}$,

则$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$,

$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD_1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,

$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

从而$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{KL}=0$,故 EF、GH、KL 三线共面.

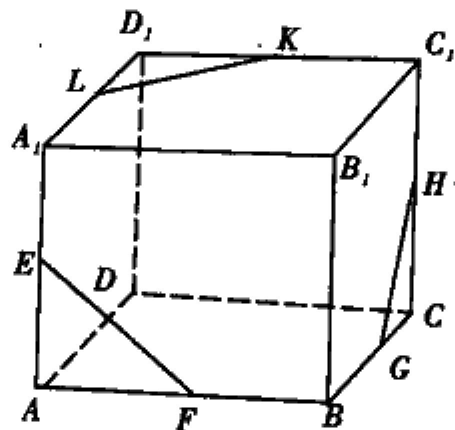


图 20-6

例 7 如图 20-7,已知 P 是正方形 $ABCD$ 所在平面外一点,点 M、N 分别在 PA、BD 上,且 $PM:MA=BN:ND=5:8$.求证:直线 MN//平面 PBC.

证明 令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{c}$,则

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BN}=\frac{5}{13}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}+\frac{5}{13}\overrightarrow{BD}$$

$$=\frac{5}{13}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\frac{5}{13}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{8}{13}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+\frac{5}{13}\boldsymbol{b}$$

$$=\frac{8}{13}\overrightarrow{PB}+\frac{5}{13}\overrightarrow{BC}.$$

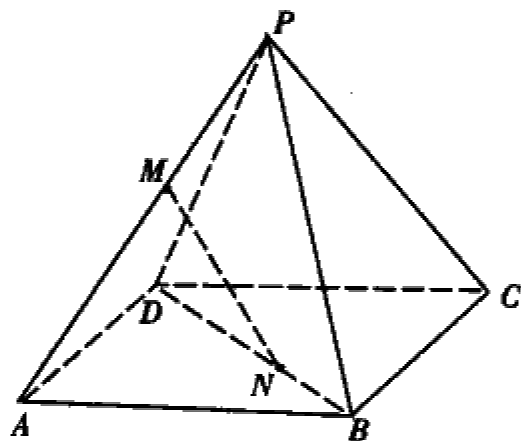


图 20-7

故由共面向量定理知$\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{BC}$为共平面 PBC 向量.又 $MN\not\subset$平面 PBC,所以 MN//平面 PBC.

例 8 如图 20-8,已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,侧棱 $AA_1=2$,并且 AA_1 与 AB、AD 的夹角为 120°.

(1)求线段 AC_1 的长;

(2)若 K 为 BC_1 之中点,求 AC 的长;

(3)求异面直线 BD_1 与 AC 所成角的大小；

(4)证明：$AA_1 \perp BD$.

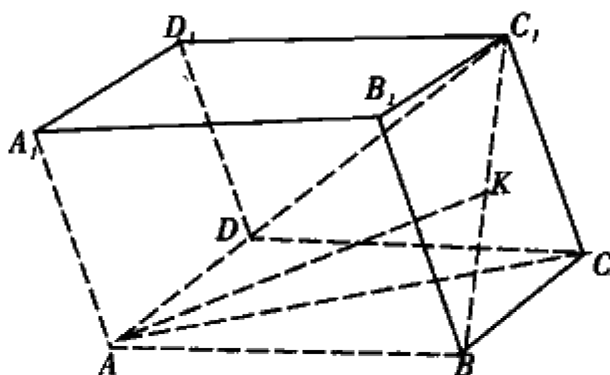


图 20－8

解 (1)因$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$,则

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{AC_1}|^2 &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})^2\\
&= |\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CC_1}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CC_1}\\
&= 1+1+4+4+2\cdot\cos120^\circ+4\cdot\cos120^\circ=2.
\end{aligned}
$$

故 $AC_1=\sqrt{2}$.

(2)因$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1})$,则

$$|\overrightarrow{AK}|^2=\frac{1}{4}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1})^2=\frac{3}{4},$$

故 $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)因$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$,则$|\overrightarrow{BD_1}|^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1})^2=6$,即$|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{6}$.

设 BD_1 与 AC 所成的角为θ,则

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \left|\frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right|=\left|\frac{(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1})\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right|\\
&=\frac{|\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{AC}|}{\sqrt{2}}=\frac{|\overrightarrow{DD_1}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})|}{\sqrt{12}}=\frac{|2\cdot\cos120^\circ+2\cdot\cos120^\circ|}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3},
\end{aligned}
$$

故 $\theta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(4)由$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$,则$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=2\cdot\cos120^\circ-2\cdot\cos120^\circ=0$,

故 $AA_1\perp AD$.

2. 选择适当的回路,再运用内积求解问题

例 9 如图 20－9,在棱长为 1 的正方体 AC' 中,连 $B'D$ 交平面 ACD' 于点 P,求 DP 的长.

解 因$\overrightarrow{DB'}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=0+\overrightarrow{AB}^2+0+(-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{BC}+0+0=0,$$

则 $DB'\perp AC$.

同理 $DB'\perp AD'$,从而 $B'D\perp$平面 ACD'.

于是$\frac{B'P}{PD}=\frac{\overrightarrow{B'A}\cdot\overrightarrow{B'D}}{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B'D}}=\frac{(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})}{\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})}$

$$=\frac{\overrightarrow{B'B}^2+\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}^2}=2,$$

所以 $DP=\frac{1}{3}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 10 如图 20-9,设 M、N 分别是正方体AC'的棱BB'和对角线 CA'的中点,求证:$MN\perp BB'$.

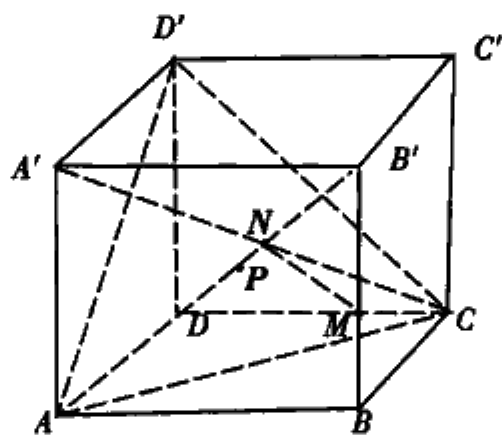


图 20-9

证明 由

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BB'}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})\cdot\overrightarrow{BB'}$$

$$=[\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'A'})]\cdot\overrightarrow{BB'}$$

$$=(\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD'})\cdot\overrightarrow{BB'}=0,$$

即知 $MN\perp BB'$.

3. 运用向量的坐标运算求解问题

例 11 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,二面角 $A-BD_1-A_1$ 的度数是______.

(2004 年全国高中联赛题)

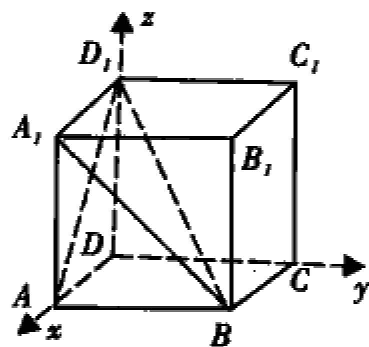


图 20-10

解 设正方体为单位正方体,建立如图 20-10 的空间直角坐标系,则 $D(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$D_1(0,0,1)$、$B(1,1,0)$、$A_1(1,0,1)$.

于是,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{A_1D_1}=(-1,0,0)$.

设平面 ABD_1 和平面 A_1BD_1 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AD_1}$,$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{A_1B}$,$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{A_1D_1}$,得

$y_1=0$, $-x_1+z_1=0$, $y_2-z_2=0$, $-x_2=0$.

令 $x_1=a$,则 $z_1=a$;令 $y_2=b$,则 $z_2=b$.

于是,$\boldsymbol{n}_1=(a,0,a)$,$\boldsymbol{n}_2=(0,b,b)$,设 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 的夹角为 α.

故 $\cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \dfrac{(a,0,a)\cdot(0,b,b)}{\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}b} = \dfrac{1}{2}$.

所以，$\alpha = 60°$. 又易知二面角 $A-BD_1-A_1$ 的平面角为 $\theta = \alpha$.

因此二面角 $A-BD_1-A_1$ 为 60°.

注 求二面角时，应注意法向量 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 的夹角是与其平面角相等还是互补，这可根据图形实际加以判定.

例 12 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，M、N、P 分别是棱 CC_1、BC、CD 的中点. 求证：$A_1P \perp$ 平面 DMN.

(2004 年山东省竞赛题)

证明 建立如图 20-11 的空间直角坐标系，连结 DM、DN. 则

$D(0,0,0)$、$N(\dfrac{1}{2},1,0)$、$M(0,1,\dfrac{1}{2})$.

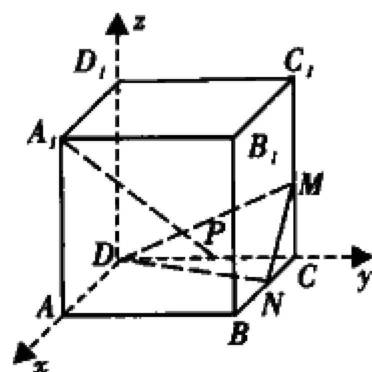


图 20-11

于是，$\overrightarrow{DN} = (\dfrac{1}{2},1,0)$，$\overrightarrow{DM} = (0,1,\dfrac{1}{2})$.

设平面 DMN 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$.

由 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{DN}$，$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{DM}$，得 $\dfrac{1}{2}x + y = 0$，$y + \dfrac{1}{2}z = 0$.

令 $y = -1$，则 $x = z = 2$，故 $\boldsymbol{n} = (2,-1,2)$.

又 $A_1(1,0,1)$、$P(0,\dfrac{1}{2},0)$，则 $\overrightarrow{A_1P} = (-1,\dfrac{1}{2},-1)$.

易知 $\boldsymbol{n} = -2\overrightarrow{A_1P}$，这说明 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{A_1P}$ 共线.

所以，$A_1P \perp$ 平面 DMN.

例 13 在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 AB、BC 的中点. 求点 D 到平面 B_1EF 的距离.

(2002 年湖南省高中竞赛题)

解 建立如图 20-12 的空间直角坐标系，则

$D(0,0,0)$、$B_1(1,1,1)$、$E(1,\dfrac{1}{2},0)$、$F(\dfrac{1}{2},1,0)$.

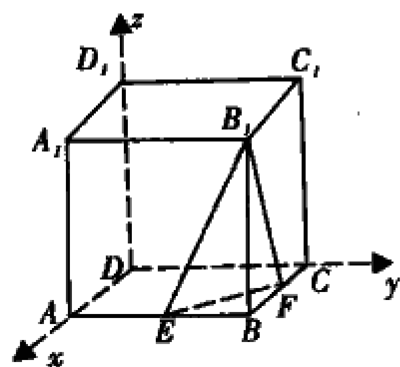


图 20-12

于是，$\overrightarrow{B_1E} = (0,-\dfrac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{B_1F} = (-\dfrac{1}{2},0,-1)$.

设平面 B_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$.

由 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{B_1E}$，$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{B_1F}$，得 $-\dfrac{1}{2}y - z = 0$，$-\dfrac{1}{2}x - z = 0$.

令 $z = 1$，则 $x = -2$，$y = -2$. 所以，$\boldsymbol{n} = (-2,-2,1)$.

又 $\overrightarrow{DE} = \left(1,\dfrac{1}{2},0\right)$，则点 D 到平面 B_1EF 的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|(-2,-2,1)\cdot\left(1,\frac{1}{2},0\right)\right|}{3}=1.$$

例 14　已知单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是 BB_1、B_1C_1 的中点，P 是线段 MN 的中点．求 DP 与 AC_1 的距离．

（1982 年上海市高中竞赛题）

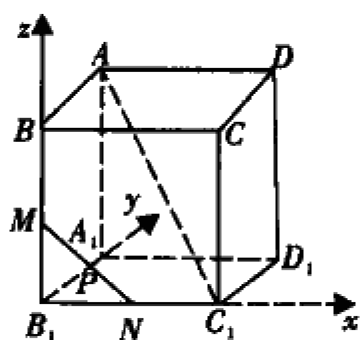


图 20－13

解　建立如图 20－13 的空间直角坐标系，则

$B_1(0,0,0)$、$A(0,1,1)$、$C_1(1,0,0)$、$D(1,1,1)$、$P(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4})$．

设过 DP 且平行于 AC_1 的平面 α 的方程为 $A_2x+B_2y+C_2z+e=0$．

因为 $DP\in\alpha$，所以 $A_2+B_2+C_2+e=0$，$\frac{1}{4}A_2+\frac{1}{4}C_2+e=0$．

又 $\alpha/\!/AC_1$，则$\overrightarrow{AC_1}\perp\alpha$ 的法向量 $\boldsymbol{n}$．

于是，$A_2-B_2-C_2=0$．

由以上各式可求得，$A_2=-\frac{1}{2}e$，$B_2=3e$，$C_2=-\frac{7}{2}e$，

则平面 α 方程为 $x-6y+7z-2=0$．

因此，点 C_1 到平面 α 的距离为　$d=\frac{|1\cdot1-6\cdot0+7\cdot0-2|}{\sqrt{1^2+(-6^2)+7^2}}=\frac{\sqrt{86}}{86}$．

例 15　已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E 为 D_1C_1 中点，求下列问题：

(1)求异面直线 D_1B 与 A_1E 的距离；

(2)求 B_1 到面 A_1BE 的距离；

(3)求 D_1C 到面 A_1BE 的距离；

(4)求面 A_1DB 与面 D_1CB_1 的距离．

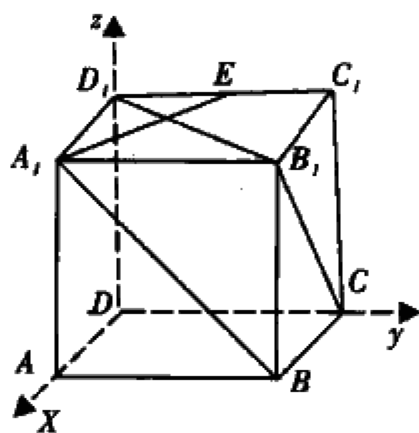


图 20－14

解　(1)如图 20－14，建立空间直角坐标系，则$\overrightarrow{A_1E}=(-1,\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$．

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是与$\overrightarrow{A_1E}$，$\overrightarrow{D_1B}$都垂直的向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1B}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y=0,\\ x+y-z=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}y=2x,\\ z=3x.\end{cases}$$

不妨设 $\boldsymbol{n}=(1,2,3)$，选 A_1E 与 BD_1 的两点向量为$\overrightarrow{D_1A_1}=(1,0,0)$，得 A_1E 与 BD_1

的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{D_1A_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$.

(2)设 $n=(x,y,z)$为面 A_1BE 的法向量,则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y=0,\\ y-z=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y=2x,\\ z=2x.\end{cases}$

不妨设 $n=(1,2,2)$,选点 B_1 到面 A_1BE 两点向量为$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,1,0)$,由公式得:点 B_1 到面 A_1BE 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot n|}{n}=\frac{2}{3}$.

(3)由(2)可知:面 A_1BE 的法向量可设 $n=(1,2,2)$,设 D_1C 与面 A_1BE 的两点向量为$\overrightarrow{D_1A_1}=(1,0,0)$,故直线 D_1C 到面 A_1BE 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{D_1A_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{1}{3}$.

(4)选面 A_1DB 和 D_1CB_1 的法向量:$n=\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,1)$,任意两点向量 $p=\overrightarrow{D_1A_1}=(1,0,0)$,故面 A_1DB 与面 D_1CB_1 的距离 $d=\frac{|p\cdot n|}{|n|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 在四面体 $ABCD$ 中,设 $AB=1$, $CD=\sqrt{3}$,直线 AB 与 CD 的距离为 2 夹角为$\frac{\pi}{3}$,则四面体 $ABCD$ 的体积等于(　　).　　(2003 年全国高中联赛题)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 空间四点 A,B,C,D 满足$|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{BC}|=7$, $|\overrightarrow{CD}|=11$, $|\overrightarrow{DA}|=9$,则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$的取值(　　).　　(2005 年全国高中联赛题)

A. 只有一个　　B. 有两个　　C. 有四个　　D. 有无穷多个

3. $A_1B_1C_1-ABC$ 是直三棱柱,$\angle BCA=90°$,点 D_1、F_1 分别是 A_1B_1、A_1C_1 的中点,若 $BC=CA=CC_1$,则 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值是(　　).

A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{30}}{15}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

4. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle ACB=90°$,$\angle BAC=30°$, $BC=1$, $AA_1=\sqrt{6}$, M 是

C_1C 的中点,求证:$AB_1 \perp A_1M$.

5. 在正四面体 $S-ABC$ 中,棱长为 a,E、F 分别为 SA 和 BC 的中点,求异面直线 BE 和 SF 所成角.

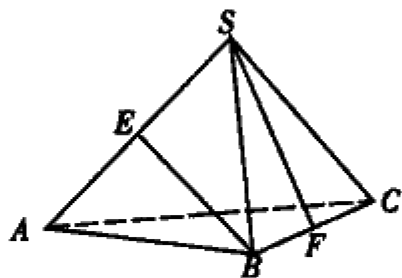


图 20-15

6. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a,侧棱长为 $\sqrt{2}a$.求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 是 DD_1 的中点,O、M、N 分别是面 $A_1B_1C_1D_1$、BB_1C_1C、$ABCD$ 的中心.求异面直线 PN 与 OM 所成的角.

8. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面是边长为 $4a$ 的正方形,侧棱 $SA=SB=SC=SD=8a$,M、N 分别为棱 SA、SC 的中点,求异面直线 DM 与 BN 之间的距离 d.

9. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形,$PB\perp$面 $ABCD$.证明无论四棱锥的高怎样变化,面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 $90°$.

10. 已知单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 为 CC_1 的中点.求证:平面 $A_1BD\perp$平面 EBD.

第二十一章 平行六面体的性质及应用

【基础知识】

平行六面体是平行四边形的一个三维类比模型，平行四边形的一系列有趣性质可推证到平行六面体中去．平行四边形与三角形有着极为密切的关系，因而平行六面体与四面体也有着极为密切的关系，这些构成了平行六面体一系列既有趣又有重要应用的性质．

性质 1 平行六面体的四条对角线相交于一点，且在这一点互相平分．并称该点为中心．

推论 称侧面对角线的交点为侧面中心，则相对侧面中心的连线也交于平行六面体的中心，且在这一点互相平分．(见例 5)

性质 2 平行六面体所有对角线的平方和等于所有棱的平方和．

推论 1 平行六面体所有侧面对角线的平方和等于其所有(体)对角线平方和的两倍．

推论 2 平行六面体每一侧棱的平方等于与这侧棱共面的两侧面四条面对角线的平方和减去与这侧棱不共面而共端点的两条侧面对角线平方和所得差的四分之一．

推论 3 平行六面体的每一对角线长的平方等于过这条对角线一端点的三条侧面对角线的平方和减去过另一端点的三条棱的平方和．

性质 3 平行六面体的每一对角线长的平方等于共一端点的三条棱长的平方和减去这三条棱中每两条棱长及其所夹角余弦之积的两倍．

性质 4 平行六面体的每一对角线通过与该对角线共端点的三条棱的另一端点构成的三角形截面的重心，且被这三角形截面分成三等分．

性质 5 平行六面体的每个由三条侧面对角线构成的三角形截面面积平方的 4 倍，等于这截面所截三个侧面面积的平方和减去这三个侧面中每两个侧面面积及其所夹二面角余弦之积的两倍．

推论 平行六面体的八个由三条侧面对角线构成的三角形截面面积的平方和等于六个侧面面积的平方和．

性质 6 设平行六面体的全面积为 S，四条对角线长为 l_{AC_1}、l_{A_1C}、l_{BD_1}、l_{B_1D}，则

$2S \leqslant l_{AC_1}^2 + l_{A_1C}^2 + l_{BD_1}^2 + l_{B_1D}^2$.

性质 7 通过平行六面体中心的任何平面,将平行六面体分成体积相等的两部分.

推论 1 以平行六面体任一顶点及这顶点出发的三条棱的端点构成的四面体体积是平行六面体体积的六分之一.

推论 2 以平行六面体任一顶点及这顶点出发的三条侧面对角线端点构成的四面体体积是平行六面体体积的三分之一.

性质 8 平行六面体的体积等于底面积与高的乘积,或任一侧面面积与相对面距离之积.

推论 设共一顶点的三条棱长为 a、b、c,每两条棱的夹角为 α、β、γ,则体积 V 为 $V = abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

若记 $\theta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$,则 $V=2abc\sqrt{\sin\theta\cdot\sin(\theta-\alpha)\cdot\sin(\theta-\beta)\cdot\sin(\theta-r)}$.

性质 9 $V\leqslant\frac{1}{24}(l_{AC_1}^2+l_{A_1C}^2+l_{BD_1}^2+l_{B_1D}^2)^{3/2}$;

$V\leqslant(\frac{S}{6})^{3/2}$.

推论 1 表面积一定的平行六面体中,以正方体之体积为最大.

推论 2 在各个侧面面积为定值的平行六面体中,以长方体之体积为最大.

性质 11 由平行六面体的各顶点,至不截此体的一平面所引诸垂线段之和,等于由其对角线之交点至同平面所引垂线段之和的 8 倍.

性质 10 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,截面分别与 AB、AD、AA_1、AC_1 交于 B_0、C_0、A_0、D_0 各点,则$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{AC_0}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB_0}}+\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AD_0}}+\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_0}}$.

下面介绍平行六面体与四面体的密切关系.

1. 对应关系

作四面体的外接平行六面体,且使四面体的六条棱均成为平行六面体的侧面对角线.此时,四面体与其外接平行六面体是一一对应的.特别地,一个正四面体对应着一个正方体,一个等腰四面体(三对对棱分别相等的四面体)对应着一个长方体,一个两对对棱分别相等的四面体对应着一个直平行六面体,一个对棱均互相垂直的四面体(直角四面体或正三棱锥四面体)对应着一个菱形六面体等等.

当四面体的共一顶点的三棱成为平行六面体的共顶点的三棱时,一个四面体对应着四个外接平行六面体.特别地,一个正四面体对应着一个一顶点面角均为 60°的菱形六面体,一个等腰四面体对应着两个一顶点面角之和为 180°的平行六面体等等.

2. 隐显关系

从本世纪初开始，人们试图将三角形的许多性质引申到四面体——最简单的多面体，事实证明发展四面体的几何学比三角形几何学困难得多，有些提法并不复杂的问题解答起来非常费劲，甚至未能解决．下面的例题将启示我们：四面体某些数量关系的发现及几何特征的显露，借助于其外接平行六面体的性质的运用是一种方便的重要途径．因此，可以说四面体的一些性质可以利其外接平行六面体来显现，平行六面体隐含了四面体的一些重要性质．

【典型例题与基本方法】

例 1　在四面体 $ABCD$ 中，$AB=m$，$CD=n$，$AD=p$，$BC=q$，$AC=u$，$BD=v$．若 AB 与 CD 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\dfrac{(p^2+q^2)-(u^2+v^2)}{2mn}\right|$．

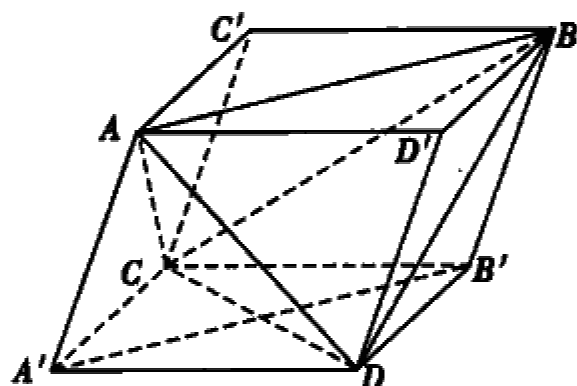


图 21－1

证明　如图 21－1，作四面体 $ABCD$ 的外接平行六面体 $A'DB'C-AD'BC'$，使四面体的棱都成为平行六面体的侧面对角线．

显然，AB 与 CD 所成的角 θ 就是 $A'B'$ 与 CD 所成的角，于是

$$\cos\theta=\left|\frac{[(1/2)m]^2+[(1/2)n]^2-B'D^2}{2\cdot(\frac{1}{2}m)\cdot(\frac{1}{2}n)}\right|=\left|\frac{m^2+n^2-4B'D^2}{2mn}\right|$$

$$=\left|\frac{2A'D^2+2B'D^2-4B'D^2}{2mn}\right|=\left|\frac{2A'D^2-2B'D^2}{2mn}\right|$$

$$=\left|\frac{2A'D^2+2D'D^2-2D'D^2-2B'D^2}{2mn}\right|=\left|\frac{(p^2+q^2)-(u^2+v^2)}{2mn}\right|.$$

例 2　若四面体的六条棱长分别为 a、b、c、d、e、f，体积为 V，则有

$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3\geqslant 36\sqrt{2}V$（Weisenbock 不等式的一种三维推广）．

证明　如图 21－1，将四面体 $ABCD$ 补成平行六面体，则 $V_{平行六面体}=3V_{ABCD}$．

设平行六面体共顶点 A 的三条棱长为 l、m、n，由前面的性质 2 的推论 1，即有

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=4(l^2+m^2+n^2)$．

又由 $V_{平行六面体}\leqslant l\cdot m\cdot n$ 及幂平均值不等式，有

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3}{6}\right)^{\frac{1}{3}}\geqslant\left(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是　$3V_{ABCD}\leqslant\sqrt{l^2\cdot m^2\cdot n^2}\leqslant\left[\dfrac{4(l^2+m^2+n^2)}{12}\right]^{\frac{3}{2}}$　①

$$=\left[\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{12}\left[6(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3)^2\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \qquad ②$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{24}(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3).$$

故 $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3\geqslant 36\sqrt{2}V$.

其中等号当且仅当①、②中满足 l、m、n 互相垂直且 $l=m=n$，即平行六面体为正方体，亦即 $a=b=c=d=e=f$ 时成立.

类似上例，并运用前面的性质 5 的推论，可证明 Weisenbock 不等式的另一种三维推广：若四面体各顶点 A、B、C、D 所对的面的面积分别为 S_A、S_B、S_C、S_D，体积为 V，则

$$S_A^3+S_B^3+S_C^3+S_D^3\geqslant\frac{27}{2}\sqrt{3}V^2.$$

例 3 空间四平面互相平行，相邻两面间距离都是 h. 今有一正四面体，它的四个顶点分别在这四个面上. 求正四面体的棱长.

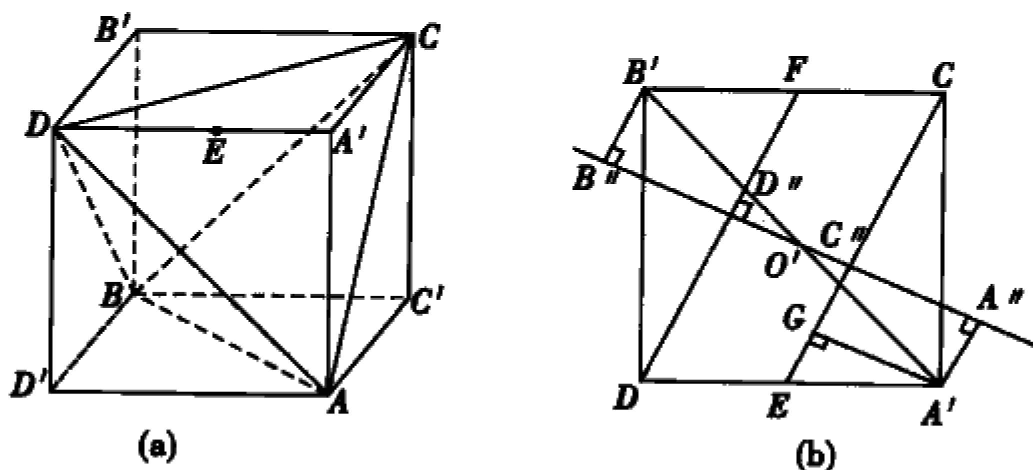


图 21－2

解 设正四面体 $ABCD$ 的外接正方体为 $AC'BD'-A'CB'D$. 又设过棱 $D'D$ 及 $B'C$ 中点 F 的截面为 α_3，过棱 $C'C$ 及 $A'D$ 中点 E 的截面为 α_2，过棱 $A'A$，过棱 $B'B$ 且与 α_3、α_2 平行的平面分别为 α_1、α_4，这样这四个平面即为两相邻距离都相等的互相平行的四平面. 又设过 $A'B'$ 的中点 O' 与 CE 垂直的直线为 l，l 与 α_4、α_3、α_2、α_1 的交点分别为 B''、D''、C''、A''，如图 21－2(b)，则 α_4、α_3、α_2、α_1 两相邻平面间距离为 $B''D''$、$D''C''$、$C''A''$.

当 $A''C''=h$ 时，可求得 $A'E=\frac{\sqrt{5}}{2}h$，从而 $A'B'=\sqrt{10}h$. 这就是我们所要求的正四面体的棱长.

例 4 四面体 $ABCD$ 中，若 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$，则 $AD\perp BC$.

（1957 年天津市、1979 年上海市中学竞赛题）

证明 如图 21－1，作四面体 $ABCD$ 的外接平行六面体 $A'DB'C-AD'BC'$.

由平行六面体每一侧面两对角线所夹的角（锐角）的余弦值等于这侧面两相邻棱的平方差的绝对值除以这两条侧面对角线长的乘积，即

$$\cos(\widehat{A'B\ \ CD})=\frac{|A'D^2-DB'^2|}{A'B'\cdot CD}.$$

由 $AB\perp CD$，则 $\cos(\widehat{A\ B\ \ CD})=\cos(\widehat{A'B'\ \ CD})=0$，从而 $A'D=DB'$，即侧面 $A'DB'C$为菱形.同理，由 $AC\perp BD$，有侧面 $A'CC'A$ 为菱形，从而侧面 $A'DD'A$ 也为菱形，故 $AD\perp BC$.

例 5 求证四面体的三双对棱中点连线必交于一点，且互相平分.

证明 如图 21－3，设 E、F、G、H、M、N 分别是四面体$ABCD$ 的六条棱的中点.作四面体的外接平行六面体 A_1C，则 E、F、G、H、M、N 分别是其六侧面对角线的交点.

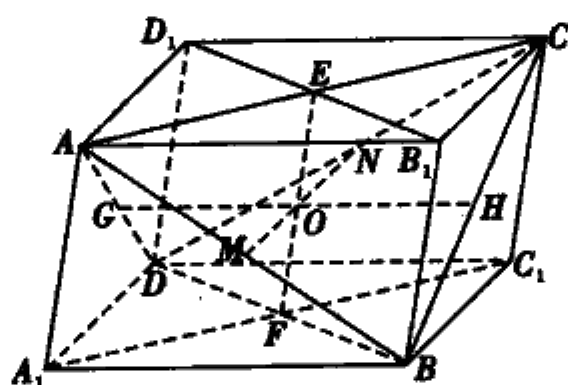


图 21－3

在▱AA_1C_1C 中，连 EF，则 $EF/\!/AA_1/\!/CC_1$，且过六面体对角线 A_1C 的中点 O，同时被 O 平分.因六面体的四条对角线共点 O，于是同理可证 GH、MN 过 O，且被 O 平分.

例 6 立方体八个顶点中有四个恰是正四面体的顶点.求出立方体的表面积与四面体的表面积之比. （1980 年美国中学生竞赛 AHSME 第 16 题）

解 设立方体表面积为 S，四面体表面积为 S_0.由平行六面体所有三角形截面（三角形的边由六面体侧面对角线组成）面积的平方和等于所有侧面面积的平方和，有$6\cdot(\frac{S}{6})^2/4\cdot(\frac{S_0}{4})^2=2$，故 $S/S_0=\sqrt{3}$.

【解题思维策略分析】

1. 善于将四面体问题转化为平行六面体问题

例 7 若 A、B、C、D 表示空间四点，AB 表示 A、B 两点间的距离，AC 表示 A、C 两点间的距离，….证明：$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geqslant AB^2+CD^2$.

（第 4 届美国中学生竞赛题）

证明 以空间四边形的边为侧面对角线构造平行六面体，由平行六面体所有侧面对角线的平方和等于所有棱的平方和的两倍及图 21－3，有

$$\begin{aligned}AC^2+BD^2+AD^2+BC^2+AB^2+CD^2&=4AD_1^2+4AA_1^2+4A_1B^2\\&=4AD_1^2+2(AB^2+CD^2)\end{aligned}$$

故 $AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geqslant AB^2+CD^2$.

当 A、B、C、D 共面时，$AD_1=0$，上式取等号．此时，可看作是压扁了的四面体．

例 8 在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BDC$ 是直角，由 D 到 $\triangle ABC$ 所在的平面的垂线的垂足 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心．证明：$(AB+BC+CA)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2)$．（IMO－12 试题）

证明 如图 21－4，平行六面体 $AC_1BD-B_1D_1A_1C$ 为四面体 $ABCD$ 的外接平行六面体．由题设，D 到 $\triangle ABC$ 所在的平面的垂线的垂足是 $\triangle ABC$ 的垂心，知这个四面体的对棱互相垂直．又 $\angle BDC$ 是直角，即知四面体 $ABCD$ 的三面角 $D-ABC$ 是直三面角，故此平行六面体为长方体．

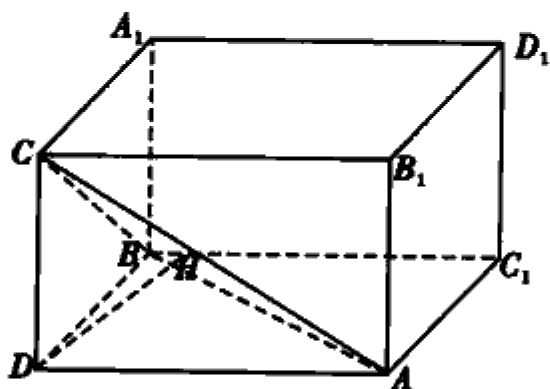


图 21－4

由
$$\begin{aligned}&2(AD^2+BD^2+CD^2)\\&=(AD^2+BD^2)+(BD^2+CD^2)+(CD^2+AD^2)\\&=AB^2+BC^2+AC^2.\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}&6(AD^2+BD^2+CD^2)=3(AB^2+BC^2+AC^2)\\&\geqslant AB^2+BC^2+CA^2+2AB\cdot BC+2BC\cdot CA+2AB\cdot CA\\&=(AB+BC+CA)^2.\end{aligned}$$

例 9 若 a、b、c 是四面体共顶点的三条棱的长，α、β、γ 是这三条棱组成的面角，ω 是这三个面角和的一半，则四面体的体积为：

$$V_{四面体}=\frac{1}{3}abc\cdot\sqrt{\sin\omega\cdot\sin(\omega-\alpha)\cdot\sin(\omega-\beta)\cdot\sin(\omega-\gamma)}.$$

证明 如图 21－4，设 $DA=a$，$DB=b$，$DC=c$，$\angle BDC=\alpha$，$\angle ADC=\beta$，$\angle ADB=\gamma$．由平行六面体的体积公式 $V_{平行六面体}=abc\cdot S(A)$，其中

$$\begin{aligned}S(A)&=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\\&=2\sqrt{\sin\omega\cdot\sin(\omega-\alpha)\cdot\sin(\omega-\beta)\cdot\sin(\omega-\gamma)}.\end{aligned}$$

有
$$\begin{aligned}V_{四面体}&=\frac{1}{6}V_{平行六面体}\\&=\frac{1}{3}abc\cdot\sqrt{\sin\omega\cdot\sin(\omega-\alpha)\cdot\sin(\omega-\beta)\cdot\sin(\omega-\gamma)}.\end{aligned}$$

2. 善于构造平行六面体解答有关问题

例 10 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，且 $a^2+b^2+c^2=1$．求证：

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-c^2}+a+b+c>3.$$

证明 由 $a^2+b^2+c^2=1$ 可将不等式转化为 $\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2}+a+b+c>3$.

参见图 21－2(a)，构作长方体 AB'．设对角线 $AB'=1$，$AD'=a$，$AC'=b$，$AA'=c$，则 $A'B'=\sqrt{a^2+b^2}$，$B'C'=\sqrt{a^2+c^2}$，$B'D'=\sqrt{b^2+c^2}$．在$\triangle A'AB'$中，$A'A+A'B'>B'A$，即$\sqrt{a^2+b^2}+c>1$．同理，$\sqrt{c^2+a^2}+b>1$，$\sqrt{b^2+c^2}+a>1$．

以上三式相加，即证．

例 11 锐角 α、β、γ 满足 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证：$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$．

证明 构造长方体 $D'AC'B-DA'CB'$，参见图 21－2(a)，使其长、宽、高分别为 $D'A=\sin\alpha$，$AC'=\sin\beta$，$C'C=\sin\gamma$，则 $AB'=D'C=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}=1$，$\angle D'B'A=\alpha$，$\angle C'B'A=\beta$，$\angle C'D'C=\gamma$，且 $AB'>BA$．

$$\therefore \sin\alpha=\sin\angle D'B'A=\frac{D'A}{B'A}<\frac{D'A}{BA}=\sin\angle D'BA,$$

$$\sin\beta=\sin\angle C'B'A=\frac{AC'}{B'A}<\frac{AC'}{BA}=\sin\angle C'BA.$$

从而 $\alpha<\angle D'BA$，$\beta<\angle C'BA$．

$$\therefore \alpha+\beta<\angle D'BA+\angle C'BA=\frac{1}{2}\pi.$$

同理，$\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\gamma<\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$．

设 $B'A$ 与 $D'C$ 相交于 O，则知$\angle D'OA=2\alpha$，$\angle AOC'=2\beta$，$\angle C'OC=2\gamma$．

由于三面角的任意两个面角的和大于第三个面角，则

$2\alpha+2\beta=\angle D'OA+\angle AOC'>\angle D'OC$．

$\therefore 2(\alpha+\beta+\gamma)=\angle D'OC+\angle C'OC=\pi$．

故 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$．

3．注意特殊平面体的性质的运用

例 12 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，求正方体底面 $ABCD$ 内切圆周上的点与过顶点 A_1、C 和 B_1 的圆周上的点之间的最小距离．（第 19 届全苏奥林匹克题）

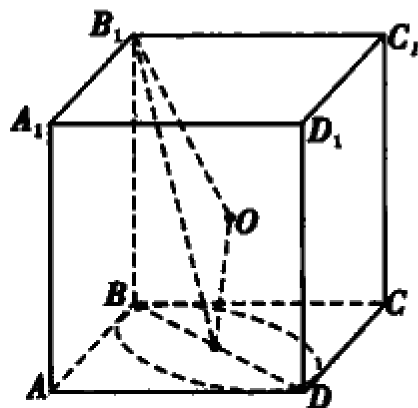


图 21－5

解 如图 21－5，考察两个圆周分别在以正方体的对称中心为球心的两个同心球面上，即与正方体各棱都相切的球面(半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$)及正方体的外接球面(半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$)上，这两个球面上的点之间的最小距离是它们的半径之差 $d=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$．如果

两圆周上各有一点恰好在球心 O 发出的同一射线上,那么 d 即为最小值.

考察在以 O 为位似中心,$\sqrt{\frac{3}{2}}$ 为位似比的变换下,小球面变为大球面,而小球面上的圆周的象集为大球面上的圆周.

注意到 $ABCD$ 的内切圆 $\odot O_1$ 与线段 BD 的交点 E 和 F 在该位似变换下的象在平面 AB_1C 的两侧(因 $\angle O_1OF=45°>\angle BB_1O_1$,故射线 OF 不与平面 AB_1C 相交),因此,$\odot O_1$ 的象集(圆周)将与过顶点 A,C 和 B_1 的圆周相交.设一交点为 N,而 N 的原象为 M,那么 M,N 之间的距离就是考察的两圆周上的点之间的距离的最小值,其值为 $d=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

【模拟实战】

习题 A

1. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,O 是面 $ABCD$ 的中心,O_1 是面 ADD_1A_1 的中心.求异面直线 D_1O 与 BO_1 所成角的余弦值.
2. 已知空间一个平面与一个正方体的 12 条棱的夹角都等于 α,求 α 的值.
3. 能否用一个平面去截一个正方体,使得截面为五边形?进一步,截面是否为正五边形?
4. 设一个平面截棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,过顶点 C_1,交 A_1D_1 中点于 E,A_1A 距 A 较近的一个三等分点于 F,AB 于 G,BC 于 H.求截面 C_1EFGH 的周长.
5. 已知一个平面截棱长为 1 的正方体所得截面是一个六边形.证明:此六边形周长 $\geqslant 3\sqrt{2}$.
6. 正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱与底面边长相等,如果 E,F 分别为 SC,AB 的中点,那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于多少?
7. 已知 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,$\angle BAC=90°$,点 D_1,F_1 分别是 A_1B_1,B_1C_1 的中点.若 $AB=CA=AA_1$,求 BD_1 与 CF_1 所夹角的余弦值.
8. 已知 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,E,F 分别是 AB,AD 的中点,$GC\perp$ 面 $ABCD$,且 $GC=2$.求点 B 到面 EFG 的距离.
9. 在四面体 $SABC$ 中;已知 $SA=BC=a$,$SC=AB=b$,$SB=AC=c$,求此四面体的体积.
10. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,相应对棱中点的三条连线分别为 m_1,m_2,m_3,顶点 A_i 所对侧面的重心为 G_i,其四面体体积记为 V,则

(Ⅰ)$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \geqslant 3V$;

(Ⅱ)$\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} A_iA_j - \frac{27}{16}\sum\limits_{i=1}^{4} A_iG_i^2 \geqslant 3\sqrt[3]{9V^2}$;

(Ⅲ)$\sum\limits_{i=1}^{4} A_iG_i^2 \geqslant \frac{16}{3}\sqrt[3]{9V^2}$.

11. 已知 α,β,γ 是锐角,且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.求证:

(Ⅰ)$\tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma \geqslant 2\sqrt{2}$;(Ⅱ)$\frac{3\pi}{4} < \alpha + \beta + \gamma < \pi$.

12. 已知 $a>0,b>0,c>0$,且 $a+b+c=1$.求证:$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqslant \sqrt{3}$.

习题 B

1. 有一立方体,中心和边长为 $a<b<c$ 的长方体的对称中心重合,诸界面与长方体各界面平行.求立方体的棱长,使得它与长方体的并的体积减去它与长方体的交的体积的差最小.　　(1979 年捷克竞赛题)
2. 证明:在棱长为 a 的立方体内部可以作两个棱长为 a 的正四面体,使得它们没有公共点.　　(1983 年民主德国竞赛题)

第二十二章　一般四面体的性质及应用

【基础知识】

四面体是三角形在空间的直接推广，三角形的很多性质及其证法可以推广到四面体上去．四面体的许多性质可以借助于平行六面体来证．

性质 1　任意四面体六个内二面角的平分面交于一点，这点到四面体四个面的距离相等，该点称为四面体的内切球球心（简称四面体的内心）．内切球与四面体四个面内切．

若四面体 $ABCD$ 的体积为 V，顶点 A 所对的侧面面积为 S_A，类似地有 S_B，S_C，S_D（后面所设均同此），其内切球半径记为 r，则 $r=\dfrac{3V}{S_A+S_B+S_C+S_D}$．

性质 2　任意四面体六条棱的垂直平分面交于一点，这点到四面体四顶点的距离相等，该点称为四面体的外接球球心（简称四面体的外心）．外接球通过四面体四顶点．

若四面体 $ABCD$ 的体积为 V，其三对对棱的长分别为 $a_1,a;b_1,b;c_1,c$，其外接球半径为 R，则

$$R=\frac{Q}{6V}=\frac{1}{24V}\sqrt{(aa_1+bb_1+cc_1)(bb_1+cc_1-aa_1)(cc_1+aa_1-bb_1)(aa_1+bb_1-cc_1)}.$$

注　其中 Q 即为以三对对棱乘积为边的三角形面积．

性质 3　任意四面体的四条中线（每一顶点与其对面重心的连线）交于一点，而且每条中线从各该顶点算起都被这点分为 3:1 之比，这点称为四面体的重心．

性质 4　任意四面体的共顶点的（二面角的棱共顶点）三个内二面角的平分面与另三个内二面角的补（或外）二面角的平分面交于一点，这点到四面体四个面的距离相等，该点称为四面体的旁切球球心（简称四面体的旁心），且一个四面体有四个旁心．旁切球与四面体的一个侧面外切，与其他三个侧面的延展面相切．

若与四面体 $ABCD$ 的顶点 A 所对的面外切，与其余三个侧面的延展面相切的旁切球半径记为 r_A，类似地有 r_B，r_C，r_D，其他记号同前，则

$$r_A=\frac{3V}{S_B+S_C+S_D-S_A},\ r_B=\frac{3V}{S_A+S_C+S_D-S_B},$$

$$r_C=\frac{3V}{S_A+S_B+S_D-S_C},\ r_D=\frac{3V}{S_A+S_B+S_C-S_D}.$$

性质 5(射影定理) 四面体任意一个侧面的面积等于其他三个侧面在这个侧面上的射影面积之和.即在四面体 $ABCD$ 中,若记 θ_{AB} 为棱 AB 所在的内二面角的大小,其余类同,则有

$$S_A = S_B\cdot\cos\theta_{CD} + S_C\cdot\cos\theta_{BD} + S_D\cdot\cos\theta_{BC},$$

$$S_B = S_C\cdot\cos\theta_{AD} + S_D\cdot\cos\theta_{AC} + S_A\cdot\cos\theta_{CD},$$

$$S_C = S_D\cdot\cos\theta_{AB} + S_A\cdot\cos\theta_{BD} + S_B\cdot\cos\theta_{AD},$$

$$S_D = S_A\cdot\cos\theta_{BC} + S_B\cdot\cos\theta_{AC} + S_C\cdot\cos\theta_{AB}.$$

性质 6(余弦定理) 四面体任意一个侧面的面积的平方,等于其他三个侧面的面积的平方和减去这三个侧面中每两个面面积及其所夹二面角余弦之积的两倍之和.即在四面体 $ABCD$ 中,有

$$S_A^2 = S_B^2 + S_C^2 + S_D^2 - 2S_B\cdot S_C\cdot\cos\theta_{AD} - 2S_C\cdot S_D\cdot\cos\theta_{AB} - 2S_BS_D\cdot\cos\theta_{AC},$$

$$S_B^2 = S_C^2 + S_D^2 + S_A^2 - 2S_C\cdot S_D\cdot\cos\theta_{AB} - 2S_C\cdot S_A\cdot\cos\theta_{BD} - 2S_DS_A\cdot\cos\theta_{BC},$$

$$S_C^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_D^2 - 2S_A\cdot S_B\cdot\cos\theta_{CD} - 2S_A\cdot S_D\cdot\cos\theta_{BC} - 2S_BS_D\cdot\cos\theta_{AC},$$

$$S_D^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S_A\cdot S_B\cdot\cos\theta_{AB} - 2S_A\cdot S_C\cdot\cos\theta_{BD} - 2S_BS_C\cdot\cos\theta_{AD}.$$

注 顺次用 S_A, S_B, S_C, S_D 去乘射影定理中各式并相加整理即得以上第一式,其余各式类同.

性质 7(体积公式一) 四面体体积 $=\frac{1}{3}$ 倍底面面积与底面上的高的乘积.即

$$V = \frac{1}{3}S_A\cdot h_A = \frac{1}{3}S_B\cdot h_B = \frac{1}{3}S_C\cdot h_C = \frac{1}{3}S_D\cdot h_D.$$

性质 8(体积公式二) 四面体的体积等于它的任意两个面的面积及其所夹二面角正弦之积的三分之二,除以这两个面的公共棱长.即对四面体 $ABCD$,有

$$V = \frac{2S_C\cdot S_D\cdot\sin\theta_{AB}}{3AB} = \frac{2S_A\cdot S_D\cdot\sin\theta_{BC}}{3BC} = \frac{2S_A\cdot S_B\cdot\sin\theta_{CD}}{3CD} = \frac{2S_B\cdot S_C\cdot\sin\theta_{DA}}{3DA}$$

$$= \frac{2S_B\cdot S_D\cdot\sin\theta_{AC}}{3AC} = \frac{2S_A\cdot S_C\cdot\sin\theta_{BD}}{3BD}.$$

注 由 $V = \frac{1}{3}S_C\cdot h_C = \frac{1}{3}S_C\cdot h_{斜高}\cdot\sin\theta_{AB} = \frac{1}{3}S_C\cdot\frac{2\cdot h_{斜高}\cdot AB}{2\cdot AB}\cdot\sin\theta_{AB} = \frac{2S_C\cdot S_D\cdot\sin\theta_{AB}}{3AB}$ 等即证得.

性质 9(体积公式三) 四面体的体积等于共顶点的三条棱长乘积与该顶点三面角的特征值乘积的六分之一.即对于四面体 $ABCD$,若共顶点 A 的三条棱长分别为 a, b, c,顶点 A 处的三个面角分别为 α, β, γ,则有

$$V=\frac{1}{6}abc\cdot S(A)=\frac{1}{6}abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

$$=\frac{1}{6}abc\cdot\sqrt{\sin\omega\cdot\sin(\omega-\alpha)\cdot\sin(\omega-\beta)\cdot\sin(\omega-\gamma)},\omega=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).$$

其中 $S(A)=\sqrt{\begin{vmatrix}1&\cos\alpha&\cos\beta\\\cos\alpha&1&\cos\gamma\\\cos\beta&\cos\gamma&1\end{vmatrix}}$ 称为顶点 A 的三面角的特征值.

注 由 $V=\frac{1}{3}S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma\cdot C\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{1-(\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma})^2}$ 整理,即得上述结论.

性质 10(体积公式四) 若记 P_1,P_2,P_3 分别为四面体相对两棱(互为异面的两条棱)的积的平方,再乘以另外四条棱的平方和与这对棱的平方和的差所得的积;P 为四面体每个面上三条棱的积的平方和.则四面体的体积 V 为 $V=\frac{1}{12}\sqrt{P_1+P_2+P_3-P}$.

性质 11(正弦定理一) 在四面体 $ABCD$ 中,有

(1)$$\frac{AB}{S_C\cdot S_D\cdot\sin\theta_{AB}}=\frac{BC}{S_A\cdot S_D\cdot\sin\theta_{BC}}=\frac{DA}{S_B\cdot S_C\cdot\sin\theta_{DA}}=\frac{AC}{S_B\cdot S_D\cdot\sin\theta_{AC}}$$

$$=\frac{CD}{S_A\cdot S_B\cdot\sin\theta_{CD}}=\frac{BD}{S_A\cdot S_C\cdot\sin\theta_{BD}}=\frac{2}{3V};$$

(2)$$\frac{AB\cdot CD}{\sin\theta_{AB}\cdot\sin\theta_{CD}}=\frac{AD\cdot BC}{\sin\theta_{AD}\cdot\sin\theta_{BC}}=\frac{AC\cdot BD}{\sin\theta_{AC}\cdot\sin\theta_{BD}}=\frac{2S_A\cdot S_B\cdot S_C\cdot S_D}{9V^2};$$

(3)若 $\sin(A)$ 表示顶点 A 处的三棱中,任意两棱上的二面角的正弦与这两条棱夹角的正弦三者的积,余类同,则

$$\frac{S_A}{\sin(A)}=\frac{S_B}{\sin(B)}=\frac{S_C}{\sin(C)}=\frac{S_D}{\sin(D)}=\frac{2S_AS_BS_CS_D}{9V^2}.$$

注 此性质由性质 8 即证.

性质 12(正弦定理二) 四面体中各个面上三条棱长的积与其所对三面角的特征值之比都相等,该比值等于六条棱长的积与体积的六倍之比.即对四面体 $ABCD$,有

$$\frac{BC\cdot CD\cdot BD}{S(A)}=\frac{AC\cdot CD\cdot AD}{S(B)}=\frac{AB\cdot BD\cdot AD}{S(C)}=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{S(D)}$$

$$=\frac{AB\cdot BC\cdot CD\cdot BD\cdot AC\cdot AD}{6V}.$$

注 此性质由性质 9 即证.

性质 13(对棱所成角公式) 四面体一对对棱所成角的余弦等于其他两对对棱平方和之差的绝对值与这对对棱乘积的二倍之比.即对四面体 $ABCD$,有

$$\cos(\widehat{AB,CD})=\frac{|(BC^2+AD^2)-(AC^2+BD^2)|}{2AB\cdot CD};$$

$$\cos(\widehat{BC,AD})=\frac{|(AB^2+CD^2)-(AC^2+BD^2)|}{2BC\cdot AD};$$

$$\cos(\widehat{AC,BD})=\frac{|(BC^2+AD^2)-(AB^2+CD^2)|}{2AC\cdot BD}.$$

注 其证明可参见第18章中例1或补成平行六面体,运用三角形余弦定理及平行四边形的对角线平方和等于四边平方和即证.

性质14(对棱距离公式) 若 a 和 a_1, b 和 b_1, c 和 c_1 是四面体的三对对棱长,三对对棱之间的距离分别记为 $d(a,a_1)$, $d(b,b_1)$, $d(c,c_1)$,则

$$d(a,a_1)=\frac{12V}{\sqrt{4a^2a_1^2-[(b^2+b_1^2)-(c^2+c_1^2)]^2}};$$

$$d(b,b_1)=\frac{12V}{\sqrt{4b^2b_1^2-[(a^2+a_1^2)-(c^2+c_1^2)]^2}};$$

$$d(c,c_1)=\frac{12V}{\sqrt{4c^2c_1^2-[(a^2+a_1^2)-(b^2+b_1^2)]^2}}.$$

注 补成平行六面体证.

性质15 若四面体的一对对棱长分别为 a,a_1,这对对棱间的距离为 d,对棱所成的角为 θ,则四面体的体积 V 为 $V=\frac{1}{6}aa_1d\cdot\sin\theta$.

性质16(二面角平分面定理) 四面体二面角的内(或外)平分面分所对的棱得两条线段和这个二面角的两个面的面积对应成比例.

性质17(空间张角公式) 设过四面体 $ABCD$ 的棱 BC 的截面 EBC 交所对的棱 AD 于 E,二面角 $A-BC-E$, $E-BC-D$ 的大小分别为 θ_1,θ_2,则

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{S_{\triangle EBC}}=\frac{\sin\theta_1}{S_{\triangle DBC}}+\frac{\sin\theta_2}{S_{\triangle ABC}}.$$

性质18(空间莱布尼兹公式) 设四面体 $ABCD$ 的六条棱长分别为 a,b,c,d,e,f, G 为其重心, P 为空间中任一点,则

$$PG^2=\frac{1}{4}(PA^2+PB^2+PC^2+PD^2)-\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2).$$

性质19(空间塞瓦定理) 设 E,F,G,H,M,N 分别为四面体 $ABCD$ 的棱 CD,DB,BC,AD,AB,AC 上的点,若六个平面 ABE,ACF,ADG,BCH,CDM,DBN 共点,则

$$\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BG}{GC}=1.$$

性质20(空间梅涅劳斯定理) 平面 $KLMN$ 交四面体 $ABCD$ 的棱 AB,BD,CD,AC

于 K,L,M,N,则 $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LD}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1$.

证明 设四边形 $KLMN$ 是四面体 $ABCD$ 被平面 α 所截的截面, AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 是平面 α 的垂线(A_1,B_1,C_1,D_1 分别为垂足).考察棱 AB 与平面 α 相交的部分,显然 $\triangle AA_1K\backsim\triangle BB_1K$,则 $\frac{AK}{KB}=\frac{AA_1}{BB_1}$.同理, $\frac{BL}{LD}=\frac{BB_1}{DD_1}$, $\frac{DM}{MC}=\frac{DD_1}{CC_1}$, $\frac{CN}{NA}=\frac{CC_1}{AA_1}$.

以上四式两边相乘即证.

性质 21(空间斯特瓦尔特定理) 在四面体 $ABCD$ 中, $AD\perp BC$,过棱 BC 作截面 BCE 交棱 AD 于 E,则 $S^2_{\triangle BCE}=\frac{DE}{AD}\cdot S^2_{\triangle ABC}+\frac{AE}{AD}\cdot S^2_{\triangle BCD}-\frac{1}{4}BC^2\cdot AE\cdot DE$.

证明 如图 22-1,作 $AF\perp BC$ 于 F,连 BF,DF.注意到 $AD\perp BC$,知 $BC\perp$ 面 ADF,所以 $BC\perp EF$, $BC\perp EF$.记 $\angle AEF=\alpha$.

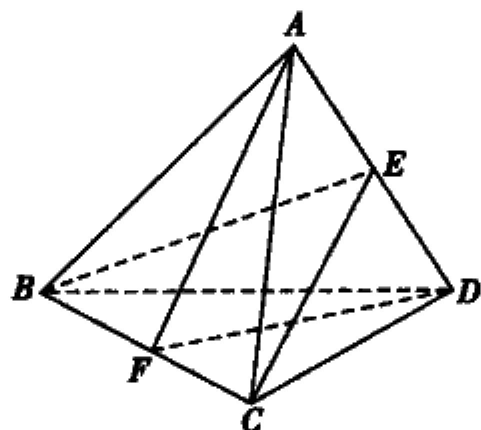


图 22-1

在 $\triangle AEF$ 中,由余弦定理,有

$AF^2=EF^2+AE^2-2AE\cdot EF\cdot\cos\alpha$.

上式两边同乘以 BC^2 后,整理得

$$\cos\alpha=\frac{4S^2_{\triangle BCE}+BC^2\cdot AE^2-4S^2_{\triangle ABC}}{4AE\cdot BC\cdot S_{\triangle BCE}}.$$

同理在 $\triangle DEF$ 中,有 $-\cos\alpha=\frac{4S^2_{\triangle BCE}+BC^2\cdot DE^2-4S^2_{\triangle BCD}}{4DE\cdot BC\cdot S_{\triangle BCE}}$.

由上述两式消去 α,整理便证得结论.

推论 1 当 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}$ 时,有 $S^2_{\triangle BCE}=S^2_{\triangle ABC}-\frac{1}{4}BC^2\cdot AE\cdot DE$.

推论 2 当 E 为 AD 中点时,有 $S^2_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S^2_{\triangle ABC}+\frac{1}{2}S^2_{\triangle BCD}-\frac{1}{16}BC^2\cdot AD^2$.

推论 3 当面 BCE 平分二面角 $A-BC-D$ 时,有

$S^2_{\triangle BCE}=S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle BCD}-\frac{1}{4}BC^2\cdot AE\cdot DE$.

事实上,由 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{V_{EABC}}{V_{EBCD}}=\frac{AE}{DE}$,有 $\frac{DE}{AD}=\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}}$, $\frac{AE}{AD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}}$.由此即证.

推论 4 当 $\frac{AE}{ED}=k$ 时,有

$$S^2_{\triangle BCE}=\frac{1}{k+1}S^2_{\triangle ABC}+\frac{k}{k+1}S^2_{\triangle BCD}-\frac{1}{4}\cdot\frac{k}{(k+1)^2}\cdot AD^2\cdot BC^2.$$

性质 22 四面体 $ABCD$ 中，E,F,G,H 分别在棱 AB,BC,CD,DA 上，且 $\frac{AE}{EB}=\lambda_1$，$\frac{BF}{FC}=\lambda_2$，$\frac{CG}{GD}=\lambda_3$，$\frac{DH}{HA}=\lambda_4$，则内接四面体 $EFGH$ 的体积与四面体 $ABCD$ 的体积之间有关系式 $V_{EFGH}=\frac{|\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4-1|}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1+\lambda_4)}\cdot V_{ABCD}$.

证明 连 ED,BG，得四棱锥 $E-FBDG$，$G-EBDH$. 在 $\triangle CBD$，$\triangle ABD$ 中，有

$$\frac{S_{\triangle CFG}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{CF\cdot CG}{CB\cdot CD}=\frac{1}{1+\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}=\frac{\lambda_3}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)},$$

$$\frac{S_{\triangle AEH}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{AE\cdot AH}{AB\cdot AD}=\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\cdot\frac{1}{1+\lambda_4}=\frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_4)},$$

$$\frac{S_{FBDG}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{S_{\triangle CBD}-S_{\triangle CFG}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{\lambda_2\lambda_3+\lambda_2+1}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)},$$

$$\frac{S_{EBDH}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{S_{\triangle ABD}-S_{\triangle AEH}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\lambda_1\lambda_4+\lambda_4+1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_4)}.$$

又
$$\frac{V_{E-FBDG}}{V_{ACBD}}=\frac{S_{FBDG}}{S_{\triangle CBD}}\cdot\frac{BE}{AB}=\frac{\lambda_2\lambda_3+\lambda_2+1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)},$$

$$\frac{V_{G-EBDH}}{V_{CABD}}=\frac{S_{EBDH}}{S_{\triangle ABD}}\cdot\frac{GD}{CD}=\frac{\lambda_1\lambda_4+\lambda_4+1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)(1+\lambda_4)},$$

$$\frac{V_{EBDG}}{V_{ABDC}}=\frac{S_{\triangle BDG}}{S_{\triangle BDC}}\cdot\frac{BE}{AB}=\frac{DG}{DC}\cdot\frac{BE}{AB}=\frac{1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)}.$$

设六面体 $EGFBDH$ 的体积为 V'，则

$$V'=V_{E-FBDG}+V_{G-EBDH}-V_{EBDG}=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_2+\lambda_4+1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1+\lambda_4)}.$$

设六面体 $FHEACG$ 的体积为 V''，则

$$V''=V_{F-GCAH}+V_{H-FCAE}-V_{HACF}=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_3\lambda_4+\lambda_1+\lambda_3+1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1+\lambda_4)}.$$

当 B,F 在平面 EHG 的同侧时，有 $V_{EFGH}=(V'+V'')-V_{ABCD}$.

当 C,F 在平面 EHG 的同侧时，有 $V_{EFGH}=V_{ABCD}-(V'+V'')$.

综合，得 $V_{EFGH}=|V_{ABCD}-(V'+V'')|$. 即证.

注 由此性质可得 E,F,G,H 共面的充要条件是 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$.

【典型例题与基本方法】

例 1 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形，A 点在侧面 SBC 上的射影 H 是

$\triangle SBC$ 的垂心，二面角 $H-AB-C$ 的平面角等于 $30°$，$SA=2\sqrt{3}$.求三棱锥 $S-ABC$ 的体积.

(1999 年全国高中联赛题)

解 如图 22-2，由题设，知 $AH\perp$ 面 SBC，作 $BH\perp SC$ 于 E，则由三垂线定理知 $SC\perp$ 面 ABE.

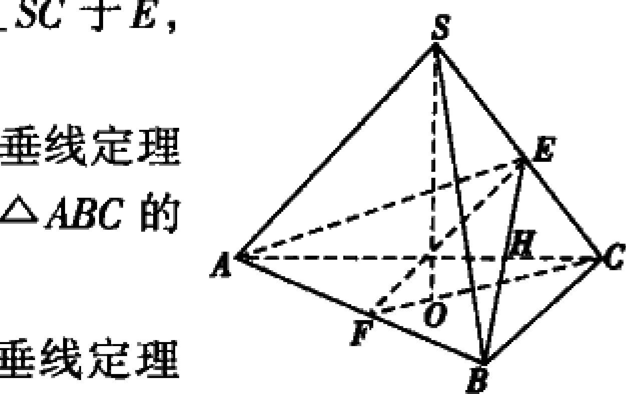


图 22-2

设 S 在面 ABC 的射影为 O，则 $SO\perp$ 面 ABC.由三垂线定理的逆定理，可知 $CO\perp AB$ 于 F.同理，$BO\perp AC$.故 O 为 $\triangle ABC$ 的中心，从而 $SA=SB=SC=2\sqrt{3}$.

又 $CF\perp AB$，CF 是 EF 在面 ABC 上的射影，由三垂线定理知 $EF\perp AB$，所以 $\angle EFC$ 是二面角 $H-AB-C$ 的平面角，故 $\angle EFC=30°$，$OC=SC\cdot\cos60°=\sqrt{3}$，$SO=OC\cdot\tan60°=3$.又 $OC=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$，则 $AB=\sqrt{3}OC=3$，所以，$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot3^2\cdot3=\frac{9}{4}\sqrt{3}$.

例 2 证明：任意一个四面体总有一个顶点，由这个顶点出发的三条棱可以构成一个三角形的三边.

(IMO-10 试题)

证明 利用反证法来证.设四面体 $ABCD$ 中 AB 是最长的棱，如果任意一个顶点出发的三条都不能构成一个三角形，则对由 A 出发的三条棱，有 $AB\geqslant AC+AD$.又对由 B 出发的三条棱，有 $BA\geqslant BC+BD$.两式相加，得 $2AB\geqslant AC+AD+BC+BD$. (*)

但在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 中，有 $AB<AC+BC$，$AB<AD+BD$.此两式相加，有 $2AB<AC+AD+BC+BD$.

上式与(*)式矛盾，故原结论获证.

注 和这道试题类似的命题还有

(1)任意四面体的三组对棱之和可以构成一个三角形的三边；

(2)任意四面体的三组对棱之积可以构成一个三角形的三边；

(波兰 1975～1976 年竞赛题)

(3)任意四面体的三组对棱的平方和可以构成一个三角形的三边.

例 3 若一个四面体恰有一棱之长大于 1，求证这四面体的体积 $V\leqslant\frac{1}{8}$.(IMO-9)

证明 如图 22-3，设 AB 是这个四面体的最长的棱，则 $\triangle ACD$，$\triangle BCD$ 的边长不大于 1.作 $\triangle BCD$ 的高 BE 和 $\triangle ACD$ 的高 AF，则 BE，AF 不大于 $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}$(其中 $a\leqslant1$ 表示 CD 的长度)，四面体的高 $AO=h\leqslant AF\leqslant\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}$，所以

$$V=\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle BCD}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}$$

$=\frac{1}{24}a(4-a^2)$,

而 $a(4-a^2)=3-(1-a)-(2+a)(1-a)^2\leqslant 3$,故当 $a=1$ 时,$a(4-a^2)$ 取最大值 3,故 $V\leqslant\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$.

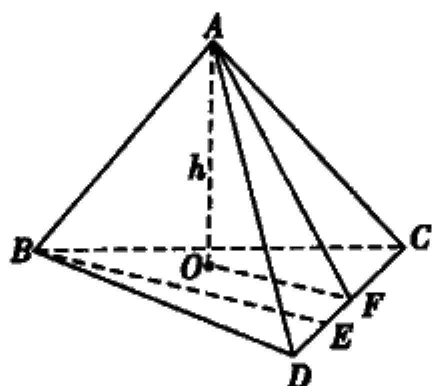


图 22-3

例 4 证明:在四面体中至多有一个顶点具有如下性质:该顶点处的任何两个平面角之和都大于 180°.

(第 22 届莫斯科竞赛题)

证明 假定顶点 A 和 B 都具备所述的性质,则有 $\angle CAB+\angle DAB>180°$ 及 $\angle CBA+\angle DBA>180°$,但是作为 $\triangle CAB$ 和 $\triangle DAB$ 的全部 6 个内角之和也只有 180°+180°,此为矛盾,从而原结论获证.

例 5 设 d 是任意四面体的相对棱间距离的最小值,h 是四面体的最小高的长.证明 $2d>h$.

(第 24 届全俄竞赛题)

证明 如图 22-4,为确定起见,假定 h 是四面体 $ABCD$ 中由顶点 A 所引出的高,而 d 是棱 AB 和 CD 之间的距离.经过顶点 B 引直线 $l/\!/CD$,过点 A 作平面垂直于棱 CD 交 CD 于 F,交 l 于 E,于是 $\triangle AEF$ 的高 AH 和 FG 就分别等于 h 和 d.

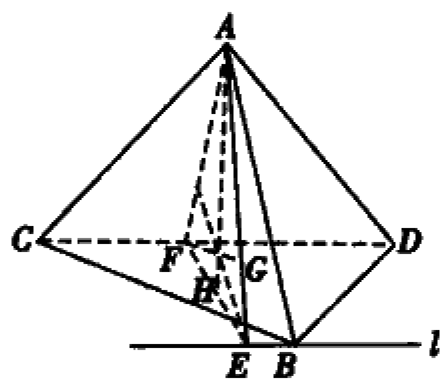


图 22-4

由于 $\triangle AEF$ 的第三条高等于四面体 $ABCD$ 的某一条高,所以其值不小于 h,因此 $AF\leqslant EF$,且 $\frac{h}{d}=\frac{AH}{FG}=\frac{AE}{FE}<\frac{AF+FE}{FE}\leqslant 2$,此即为所证.

例 6 试证:过四面体相对棱的中点的任一截面平分四面体的体积.

(IMO-29 预选题)

证法 1 如图 22-5,设 M 和 P 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 AC 和 BD 的中点,$MNPQ$ 是四面体 $ABCD$ 的一个包含线段 MP 的截面.因为 P 为 BD 的中点,则 $S_{\triangle BCP}=S_{\triangle CDP}$,即有 $V_{ABCP}=V_{ACDP}$.因此,要证截面 $MNPQ$ 将四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分,只要证明 V_{AMNP} 与 V_{CMPQ} 相等就可以了.

由 N 和 Q 分别作平面 APC 的垂线,垂足分别为 E,F,如图 22-5.因为 M 为 AC 的中点,则有 $S_{\triangle APM}=S_{\triangle CPM}$.故要证 $V_{AMNP}=V_{CMPQ}$,只要证 $NE=FQ$ 即可.

设 MP 与 NQ 交于点 O,易证 E,O,F 三点共线.要证 $NE=FQ$,只要证明 $NO=OQ$ 就可以了(通过 $\mathrm{Rt}\triangle NEO\cong\mathrm{Rt}\triangle QFO$ 得到).

为此,考察两个平行平面,异面直线 AB 和 CD 分别在这两个平面上(如图 22-6).

因为 MP 是连接 AC,BD 中点的线段,所以它在与上述两平面平行的平面上,这个

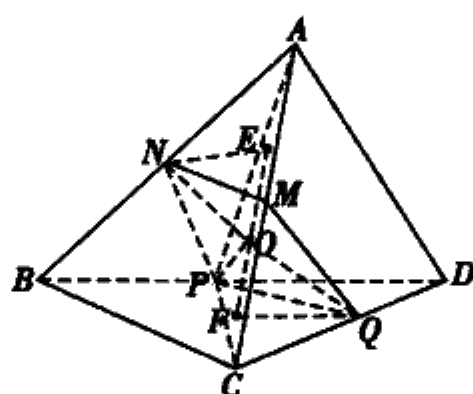


图 22-5

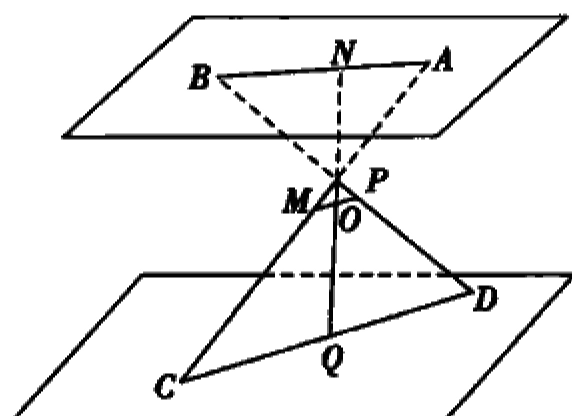


图 22-6

平面到两已知平面的距离相等．由于线段 NQ 与 MP 相交于 O，所以 O 等分线段 NQ，即有 $NO=OQ$．故结论获证．

注 上述证明中，没有对截面 $MNPQ$ 的形状进行讨论．若对其形状进行讨论，则有下述两种证法．

证法 2 如图 22-7，设 M，P 分别是四面体 $ABCD$ 的对棱 AC，BD 的中点．

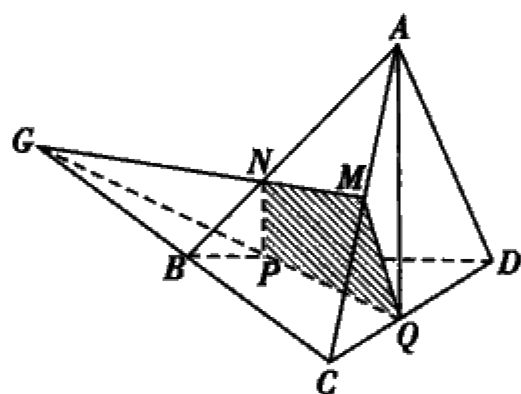


图 22-7

当截面是平行四边形或特殊三角形时，证明比较简单(略)．

当截面是一般四边形 $MNPQ$ 时．

由 $AM=CM$，有 $V_{A-MNPQ}=V_{C-MNPQ}$

又在△ABC 中，对截线 MNG 应用梅涅劳斯定理，有 $\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BN}{NA}=1$．

从而，有 $\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BN}{NA}=1$．

同理，在△BCD 中，有 $\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QC}\cdot\frac{CG}{GB}=1$，即 $\frac{DQ}{QC}\cdot\frac{CG}{GB}=1$．

于是 $\frac{BN}{NA}=\frac{DQ}{QC}$，得 $\frac{BN}{BA}=\frac{DQ}{DC}$．

又 $\frac{V_{C-BPN}}{V_{Q-APD}}=\frac{BN\cdot CD}{BA\cdot QD}=1$，即 $V_{C-BPN}=V_{Q-APD}$．

故 $V_{C-MNPQ}+V_{C-BPN}=V_{A-MNPQ}+V_{Q-APD}$．证毕．

证法 3 前面同证法 2，下证截面为一般四边形 $MNPQ$ 时的情形．记 d_A 表示顶点 A 到截面 $MNPQ$ 的距离(其余类同)，设 N 分 AB 的比为 $m:n$，则由 M，P 分别是 AC，BD 的中点，可知 Q 点分 CD 的比 $\frac{CQ}{QD}=\frac{d_C}{d_D}=\frac{d_A}{d_B}=\frac{AN}{NB}=\frac{m}{n}$．

由 $d_A=d_C$，有 $V_{A-MNPQ}=V_{C-MNPQ}$.

又$\dfrac{V_{Q-APD}}{V_{C-BPN}}=\dfrac{\frac{1}{3}S_{\triangle APD}\cdot d_{Q-APD}}{\frac{1}{3}S_{BPN}\cdot d_{C-APD}}=\dfrac{AB}{NB}\cdot\dfrac{QD}{CD}=\dfrac{m+n}{n}\cdot\dfrac{n}{m+n}=1$.

即 $V_{Q-APD}=V_{C-BPN}$.故 $V_{C-MNPQ}+V_{C-BPN}=V_{A-MNPQ}+V_{Q-APD}$.

例 7 如图 22－8，设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球与内切球的半径分别为 R 与 r，则 $R\geqslant 3r$.

证明 设 O 为四面体的外心，A_i 所对的面的面积为 S_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$，球心 O 到 A_i 所对的面的距离为 $d_i(1\leqslant i\leqslant 4)$，四面体体积为 V，过顶点 A_1 的高 $A_1H=h_1$，则易知 $d_1+OA_1=d_1+R\geqslant h_1$，从而$\frac{1}{3}S_1(d_1+R)\geqslant\frac{1}{3}S_1\cdot h_1=V$，即$\frac{1}{3}S_1\cdot d_1+\frac{1}{3}S_1\cdot R\geqslant V$.

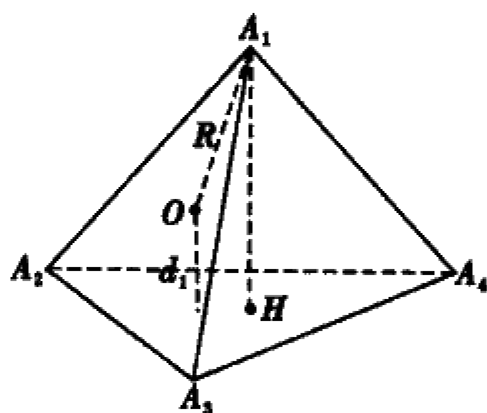


图 22－8

同理$\frac{1}{3}S_2\cdot d_2+\frac{1}{3}S_2\cdot R\geqslant V$，$\frac{1}{3}S_3\cdot d_3+\frac{1}{3}S_3R\geqslant V$，

$\frac{1}{3}S_4d_4+\frac{1}{3}S_4\cdot R\geqslant V$.

以上四式相加，并注意$\frac{1}{3}(S_1\cdot d_1+S_2\cdot d_2+S_3d_3+S_4\cdot d_4)=V$，

有 $V+\frac{1}{3}R\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\geqslant 4V$，即 $R\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\geqslant 9V$.

因 $V=\frac{1}{3}r\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$，从而 $R\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\geqslant 3r\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$，即 $R\geqslant 3r$.

例 8 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，顶点 A_i 所对的面的面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant 4)$，侧面面积为 S_k，S_j 的两侧面所夹的内二面角的大小记为$\langle k,j\rangle(1\leqslant k<j\leqslant 4)$，棱 A_kA_j 的中点记为 M_{kj}，含点 M_{kj} 与另两顶点(不含顶点 A_k，A_j)的三角形称为四面体的一个中线面(或一棱与对棱中点的面)，这个中线面的面积记为 $S_{kj}(1\leqslant k<j\leqslant 4)$，则

$$S_{kj}^2=\frac{1}{4}(S_k^2+S_j^2+2S_k\cdot S_j\cdot\cos\langle k,j\rangle)，其中\ k,j\ 满足\ 1\leqslant k<j\leqslant 4.$$

证明 对四面体 $A_1A_2A_3A_4$，由性质 6，有

$$S_3^2+S_4^2=2S_3\cdot S_4\cdot\cos\langle 3,4\rangle+S_1\cdot S_3\cdot\cos\langle 1,3\rangle+S_1\cdot S_4\cdot\cos\langle 1,4\rangle+S_2\cdot S_3\cdot\cos\langle 2,3\rangle+S_2\cdot S_4\cdot\cos\langle 2,4\rangle,$$

及 $S_1^2+S_2^2=2S_1\cdot S_2\cdot\cos\langle 1,2\rangle+S_1\cdot S_3\cdot\cos\langle 1,3\rangle+S_1\cdot S_4\cdot\cos\langle 1,4\rangle+$

$$S_2\cdot S_3\cdot\cos\langle 2,3\rangle+S_2\cdot S_4\cdot\cos\langle 2,4\rangle.$$

亦即 $S_1\cdot S_3\cdot\cos\langle 1,3\rangle+S_1\cdot S_4\cdot\cos\langle 1,4\rangle+S_2\cdot S_3\cdot\cos\langle 2,3\rangle+S_2\cdot S_4\cdot\cos\langle 2,4\rangle$

$$=S_1^2+S_2^2-2S_1\cdot S_2\cdot\cos\langle 1,2\rangle.$$

对四面体 $A_1A_3A_4M_{12}$ 和四面体 $A_2A_3A_4M_{12}$ 分别运用性质6,有

$$S_{12}^2=\frac{1}{4}S_3^2+\frac{1}{4}S_4^2+S_2^2-2\cdot\frac{1}{2}S_3\cdot\frac{1}{2}S_4\cdot\cos\langle 3,4\rangle-2\cdot\frac{1}{2}S_3\cdot S_2\cdot\cos\langle 2,3\rangle-2\cdot\frac{1}{2}S_4\cdot S_2\cdot\cos\langle 2,4\rangle,$$

$$S_{12}^2=\frac{1}{4}S_3^2+\frac{1}{4}S_4^2+S_1^2-2\cdot\frac{1}{2}S_3\cdot\frac{1}{2}S_4\cdot\cos\langle 3,4\rangle-2\cdot\frac{1}{2}S_3\cdot S_1\cdot\cos\langle 1,3\rangle-2\cdot\frac{1}{2}S_4\cdot S_1\cdot\cos\langle 1,4\rangle.$$

上述两式相加,并将前面结果代入,有

$$\begin{aligned}2S_{12}^2&=\frac{1}{2}(S_3^2+S_4^2)+S_1^2+S_2^2-S_1\cdot S_3\cdot\cos\langle 1,3\rangle-S_1\cdot S_4\cdot\cos\langle 1,4\rangle-\\&\quad S_2\cdot S_3\cdot\cos\langle 2,3\rangle-S_2\cdot S_4\cdot\cos\langle 2,4\rangle-S_3\cdot S_4\cdot\cos\langle 3,4\rangle\\&=S_1^2+S_2^2-\frac{1}{2}S_1\cdot S_3\cdot\cos\langle 1,3\rangle-\frac{1}{2}S_1S_4\cdot\cos\langle 1,4\rangle-\\&\quad\frac{1}{2}S_2\cdot S_3\cdot\cos\langle 2,3\rangle-\frac{1}{2}S_2\cdot S_4\cdot\cos\langle 2,4\rangle\\&=S_1^2+S_2^2-\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cdot\cos\langle 1,2\rangle)\\&=\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2)+S_1S_2\cdot\cos\langle 1,2\rangle.\end{aligned}$$

故 $S_{12}^2=\frac{1}{4}(S_1^2+S_2^2+2S_1\cdot S_2\cdot\cos\langle 1,2\rangle)$.

同理,得 $S_{kj}^2=\frac{1}{4}(S_k^2+S_j^2+2S_k\cdot S_j\cdot\cos\langle k,j\rangle)$.

注 由性质5,有 $2\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant 4}S_k\cdot S_j\cdot\cos\langle k,j\rangle=\sum\limits_{i=1}^{4}S_i^2$,

则推知
$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}S_{kj}^2&=\frac{1}{4}\Big[\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}(S_k^2+S_j^2)+2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}S_k\cdot S_j\cdot\cos\langle k,j\rangle\Big]\\&=\frac{1}{4}(3\sum_{i=1}^{4}S_i^2+\sum_{i=1}^{4}S_i^2)=\sum_{i=1}^{4}S_i^2.\end{aligned}$$

例9 设 G 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心,则

$4GA_1^2+A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2=4GA_2^2+A_1A_3^2+A_1A_4^2+A_3A_4^2$

$$=4GA_3^2+A_1A_2^2+A_1A_4^2+A_2A_4^2=4GA_4^2+A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_2A_3^2=\frac{3}{4}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j^2.$$

证明 如图 22-9，连 A_1G 并延长交面 $A_2A_3A_4$ 于点 G_1，则 G_1 是 $\triangle A_2A_3A_4$ 的重心. 连 A_2G_1 并延长交 A_3A_4 于 M，则 M 是 A_3A_4 的中点. 连 A_1M，对 $\triangle A_1A_2M$ 及点 G_1 应用斯特瓦尔特定理，有

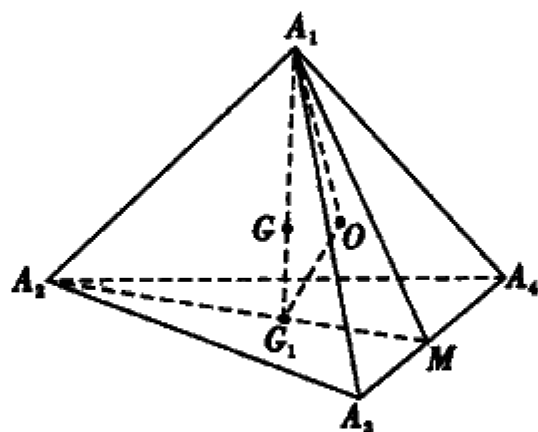


图 22-9

$$A_1G_1^2\cdot A_2M=A_1A_2^2\cdot MG_1+A_1M^2\cdot A_2G_1-A_2M\cdot A_2G_1\cdot MG_1.$$

而 $A_2G_1:G_1M=2:1$，则

$$A_1G_1^2=\frac{1}{3}A_1A_2^2+\frac{2}{3}A_1M^2-\frac{2}{9}A_2M^2. \qquad (*)$$

由三角形中线公式，有

$$A_1M^2=\frac{1}{2}(A_1A_3^2+A_1A_4^2)-\frac{1}{4}A_3A_4^2,\ A_2M^2=\frac{1}{2}(A_2A_3^2+A_2A_4^2)-\frac{1}{4}A_3A_4^2,$$

并将其代入(*)，有 $A_1G_1^2=\frac{1}{3}(A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_1A_4^2)-\frac{1}{9}(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2)$.

从而 $$GA_1^2=(\frac{3}{4}A_1G_1)^2=\frac{3}{16}(A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_1A_4^2+A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2)-\frac{1}{4}(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2).$$

故 $$4GA_1^2+A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2=\frac{3}{4}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j^2.$$

同理可证其他三式均等于 $\frac{3}{4}\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j^2$.

例 10 设 R,r 分别为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球半径与内切球半径，h_i 为顶点 A_i 到所对面的距离，内切球切各顶点 A_i 所对的面于 $A'_i(i=1,2,3,4)$. 求证：

(Ⅰ) $\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j\leqslant 16R^2$；

(Ⅱ) $\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j\geqslant\frac{9}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}h_i^2$；

(Ⅲ) $\sum\limits_{i=1}^{4}h_i^2\geqslant 64r^2$；

(Ⅳ) $\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j\geqslant 9\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A'_kA'_j$.

证明 (Ⅰ)设 O,G 分别为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心和重心，延长 A_1G 交面 $A_2A_3A_4$ 于 G_1，则 G_1 为 $\triangle A_2A_3A_4$ 的重心. 连 A_2G_1 交 A_3A_4 于 M 点，则 M 点为 A_3A_4 中点，如图 22-9.

由例 9 中证明,知 $A_1G_1^2=\frac{1}{9}[3(A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_1A_4^2)-(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2)]$.

同理,在四面体 $OA_2A_3A_4$ 中,有

$$OG_1^2=\frac{1}{9}[3(OA_2^2+OA_3^2+OA_4^2)-(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2)]$$

$$=R^2-\frac{1}{9}(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2).$$

由于 G 为四面体重心,由性质 3,知$\frac{A_1G}{GG_1}=\frac{3}{1}$.于是,在$\triangle A_1OG_1$ 中,对点 G 应用斯特瓦尔特定理,有

$$OG^2=\frac{1}{16}[4(3OG_1^2+OA_1^2)-3A_1G_1^2]$$

$$=\frac{1}{16}[16R^2-(A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_1A_4^2)-(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2)].$$

由于 $OG^2\geqslant 0$,故 $\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j\leqslant 16R^2$.

(Ⅱ)显然 $A_1G_1\geqslant h$,则 $h_1^2\leqslant\frac{1}{9}[3(A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_1A_4^2)-(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2)]$.

同理,对 h_2,h_3,h_4 也有类似于上述的不等式.

此四式相加,得 $\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j\geqslant\frac{9}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}h_i^2$.

(Ⅲ)由 $V=\frac{1}{3}S_ih_i(i=1,2,3,4)$,则有 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}=\frac{1}{3V}\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$.

又由 $V=\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\cdot r$,则 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}=\frac{1}{r}$.

由 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}\geqslant 4(\frac{1}{h_1h_2h_3h_4})^{\frac{1}{4}}$,有 $h_1h_2h_3h_4\geqslant(4r)^4$.

故 $h_1^2+h_2^2+h_3^2+h_4^2\geqslant 4(h_1h_2h_3h_4)^{\frac{1}{2}}\geqslant 4[(4r)^4]^{\frac{1}{2}}=(8r)^2$.

(Ⅳ)四面体 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的外接球半径记为 R',则 $R'^2\geqslant\frac{1}{16}\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A'_kA'_j$.

又四面体 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的外接球半径恰是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球半径,故 $R'=r$.于是 $R^2\geqslant\frac{1}{16}\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j\geqslant\frac{9}{64}\sum\limits_{i=1}^{4}h_i^2\geqslant 9r^2=9R'^2\geqslant\frac{9}{16}\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A'_kA'_j$.

故 $\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j\geqslant 9\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A'_kA'_j$.

例 11 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,外接球半径为 R,体积为 V,过顶点 A_k,A_j 的中线面为 $S_{kj}(1\leqslant k<j\leqslant 4)$.试证:$\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}\frac{1}{S_{kj}}\leqslant\frac{4\sqrt{6}R}{3V}$.

证明 设 d_1,d_2,d_3 与 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 分别为三对对棱 $A_1A_2,A_3A_4;A_1A_3,A_2A_4;A_1A_4,A_2A_3$ 的距离与夹角，则由性质 15，有 $V=\frac{1}{6}A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot\sin\theta_1\cdot d_1$，亦即

$$d_1\geqslant\frac{6V}{A_1A_2\cdot A_3A_4}.$$

同理，有 $d_2\geqslant\frac{6V}{A_1A_3\cdot A_2A_4}$，$d_3\geqslant\frac{6V}{A_1A_4\cdot A_2A_3}$.

取 A_3A_4 的中点 M，则 $S_{\triangle MA_1A_2}=S_{12}\geqslant\frac{1}{2}A_1A_2\cdot d_1$.

同理，可得关于 S_{kj} 的不等式，从而

$$\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}\frac{1}{S_{kj}}\leqslant 2\left(\frac{1}{A_1A_2\cdot d_1}+\frac{1}{A_1A_3\cdot d_2}+\frac{1}{A_1A_4\cdot d_3}+\frac{1}{A_2A_3\cdot d_3}+\frac{1}{A_2A_4\cdot d_2}+\frac{1}{A_3A_4\cdot d_1}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{3V}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j\leqslant\frac{1}{3V}\sqrt{6}\left(\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}A_kA_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{3V}\sqrt{6}(16R^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{4\sqrt{6}R}{3V}.$$

例 12 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内心为 I，记 $\triangle A_kIA_j$ 的面积为 S'_{kj}，顶点 A_i 所对的面的面积为 S_i. 试证：$\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant 4}S'_{kj}\leqslant\frac{\sqrt{6}}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$.

证明 过 I 作 $IA'_1\perp$ 面 $A_2A_3A_4$ 于 A'_1，作 $IN\perp A_3A_4$ 于 N，若记面积为 S_k,S_j 的两侧面夹角为 $\theta_{kj}(1\leqslant k<j\leqslant 4)$，则易见 $\angle A'_1NI=\frac{1}{2}\theta_{12}$. 设 r 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球半径，则在 $\mathrm{Rt}\triangle IA'_1N$ 中，有 $IN=\frac{r}{\sin\frac{1}{2}\theta_{12}}$，则 $S'_{12}=\frac{A_3A_4\cdot r}{2\sin\frac{1}{2}\theta_{12}}$.

由性质 8，有 $V=\frac{2S_1\cdot S_2\cdot\sin\theta_{12}}{3A_3A_4}$，于是消去 A_3A_4，得 $S'_{12}\cdot V=\frac{2}{3}S_1S_2\cdot\cos\frac{1}{2}\theta_{12}$. 注意到 $V=\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{4}S_i\cdot r$，则 $S'_{12}=\frac{2S'_1S'_2}{\sum\limits_{i=1}^{4}S_i}\cdot\cos\frac{1}{2}\theta_{12}$.

对上述两边取 $\sum$，并用 canchy 不等式，有

$$\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}S'_{12}=\frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{4}S_i}\cdot\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}\left(\sqrt{S_k\cdot S_j}\cdot\sqrt{S_k\cdot S_j}\cdot\cos\frac{1}{2}\theta_{kj}\right)$$

$$\leqslant\frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{4}S_i}\left[\left(\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}S_k\cdot S_j\right)\cdot\left(\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}S_k\cdot S_j\cdot\cos^2\frac{1}{2}\theta_{kj}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\qquad(*)$$

注意到性质5,有 $S_1 = S_2 \cdot \cos\theta_{12} + S_3 \cdot \cos\theta_{13} + S_4 \cdot \cos\theta_{14}$,

即 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i = S_2 \cdot \cos^2\frac{\theta_{12}}{2} + S_3 \cdot \cos^2\frac{\theta_{13}}{2} + S_4 \cdot \cos\frac{\theta_{14}}{2}$.

对上式两边同乘以 S_1 后,再两边取$\sum$,有$\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{4} S_i)^2 = \sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4} S_k \cdot S_j \cdot \cos\frac{\theta_{kj}}{2}$.

又由对称平均不等式,有$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} S_i \geqslant (\frac{1}{6}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4} S_k \cdot S_j)^{\frac{1}{2}}$.

于是,由(*)式(将上述结果代入(*)式)即有$\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4} S'_{kj} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{4}\sum_{i=1}^{4} S_i$.

例13 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的三组对棱乘积的平方和不小于各侧面面积平方和的4倍.即若令 $A_1A_2 = a, A_3A_4 = a', A_1A_3 = b, A_2A_4 = b', A_1A_4 = c, A_2A_3 = c'$,顶点 A_i 所对面的面积为 $S_i(i = 1,2,3,4)$,则

$a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 \geqslant 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2)$,其中等号当且仅当各对棱的平方和相等.

证明 对$\triangle A_2A_3A_4$ 应用海伦-秦九韶公式,有

$$S_1^2 = \frac{1}{16}(-a'^4 - b'^4 - c'^4 + 2a'^2b'^2 + 2a'^2c'^2 + 2b'^2c'^2).$$

同理,$S_2^2 = \frac{1}{16}(-a'^4 - b^4 - c^4 + 2a'^2b^2 + 2a'^2c^2 + 2b^2c^2)$,

$$S_3^2 = \frac{1}{16}(-a^4 - b'^4 - c^4 + 2a^2b'^2 + 2a^2c^2 + 2b'^2c),$$

$$S_4^2 = \frac{1}{16}(-a^4 - b^4 - c'^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c'^2 + 2b^2c'^2).$$

以上四式相加并整理,得

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 &= \frac{1}{16}\{-[(a^2 + a'^2) - (b^2 + b'^2)]^2 - [(a^2 + a'^2) - (c^2 + c'^2)]^2 \\ &\quad - [(b^2 + b'^2) - (c^2 + c'^2)]^2 + 4(a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2)\} \\ &\leqslant \frac{1}{4}(a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2). \end{aligned}$$

例14 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内一点 P 到顶点A_i 及A_i 所对的面的距离分别为 l_i, d_i,顶点 A_i 到所对的面的距离为 $h_i(i = 1,2,3,4)$,$k \geqslant \frac{3}{4}$.求证:$\sum_{i=1}^{4}(\frac{l_i}{2h_i + d_i})^k \geqslant \frac{4}{3^k}$.

证明 先证一个结论:设 $x_i > 0(i = 1,2,3,4)$,$\sum_{i=1}^{4} x_i = a$,则$\sum_{i=1}^{4}(\frac{x_i}{a - x_i})^k \geqslant \frac{4}{3^k}$.其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ 时取得.

事实上，由 $3x_i(a-x_i)^3\leqslant[\frac{3x_i+3(a-x_i)}{4}]^4=(\frac{3a}{4})^4$，有 $(\frac{x_i}{a-x_i})^k\geqslant\frac{4^{\frac{4}{3}k}}{3^k}(\frac{x_i}{a})^{\frac{4}{3}k}$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{4}(\frac{x_i}{a-x_i})^k\geqslant\frac{4^{\frac{4}{3}k}}{3^k}\sum\limits_{i=1}^{4}(\frac{x_i}{a})^{\frac{4}{3}k}\geqslant\frac{4^{\frac{4}{3}k}}{3^4}\cdot(\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i}{4a})^{\frac{4}{3}k}=\frac{4}{3^k}$.

下证原题：设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，如图22－10，作 $A_1H_1\perp$ 面 $A_2A_3A_4$ 于 H_1，作 $PE\perp A_1H_1$ 于 E，作 $PD_1\perp$ 面 $A_2A_3A_4$ 于 D_1，则 $A_1P=l_1$，$PD_1=d_1$，$A_1H_1=h_1$.

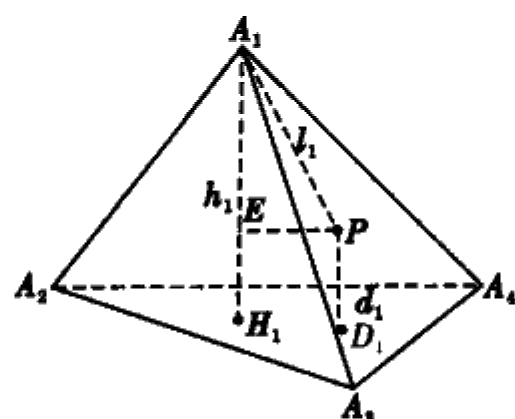


图 22－10

设 A_i 所对面的面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$，则

$S_1\cdot l_1+S_1\cdot d_1\geqslant S_1(A_1E+d_1)=S_1h_1=3V$，

从而 $\quad S_1\cdot l_1\geqslant 3V-3V_{PA_2A_3A_4}$.

同理，$S_2\cdot l_2\geqslant 3V-3V_{PA_1A_3A_4}$，$S_3\cdot l_3\geqslant 3V-3V_{PA_1A_2A_4}$，

$\quad S_4\cdot l_4\geqslant 3V-3V_{PA_1A_2A_3}$.

从而

$$S_2l_2+S_3l_3+S_4l_4\geqslant 9V-3(V_{PA_1A_3A_4}+V_{PA_1A_2A_4}+V_{PA_1A_2A_3})$$
$$=6V+3V_{PA_2A_3A_4}=S_1(2h_1+d_1),$$

即 $\frac{l_1}{2h_1+d_1}\geqslant\frac{S'_1l_1}{S_2l_2+S_3l_3+S_4l_4}$.

同理，$\frac{l_2}{2h_2+d_2}\geqslant\frac{S_2l_2}{S_1l_1+S_3l_3+S_4l_4}$，$\frac{l_3}{2h_3+d_3}\geqslant\frac{S_3l_3}{S_1l_1+S_2l_2+S_4l_4}$，

$\quad\frac{l_4}{2h_4+d_4}\geqslant\frac{S_4l_4}{S_1l_1+S_2l_2+S_3l_3}$.

令 $x_i=l_i\cdot R_i(i=1,2,3,4)$，由前述结论，得 $\sum\limits_{i=1}^{4}(\frac{l_i}{2h_i+d_i})^k\geqslant\sum\limits_{i=1}^{4}(\frac{x_i}{a-x_i})^k\geqslant\frac{4}{3^k}$.

【解题思维策略分析】

1．解四面体的有关问题时，要善于与三角形类比

例 15 一个球内切于四面体，将每个切点与该点所在面的三顶点连结起来，这样形成的每面的三个角（以切点为顶点）组成一个集合．试证这四个集合是相等的．

（第 16 届普特南竞赛题）

证明 设四面体的顶点为 $P_i(i=1,2,3,4)$，又设 Q_i 是正对着 P_i 的面与球相切的切点．用 i,j,k,l 表示 $\{1,2,3,4\}$ 的不同元素．由于 P_iQ_j 与 P_iQ_k 是从同一顶点向球所

作的切线,故 $P_iQ_j = P_iQ_k$.

同理,$P_lQ_j = P_lQ_k$,从而 $\triangle P_iQ_jP_l \cong \triangle P_iQ_kP_l$(边,边,边).于是 $\angle P_iQ_jP_l = \angle P_iQ_kP_l$,并用 θ_{il} 表示这种角,即有 $\theta_{il} = \theta_{li}$.

由于以 Q_i 为顶点的三个角相加是 2π,故有

$\theta_{23} + \theta_{34} + \theta_{42} = 2\pi, \theta_{34} + \theta_{41} + \theta_{13} = 2\pi, \theta_{41} + \theta_{12} + \theta_{24} = 2\pi, \theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31} = 2\pi.$

将这些等式的前两个相加减去后两个,且利用 $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ 得 $2\theta_{34} - 2\theta_{12} = 0$,即 $\theta_{12} = \theta_{34}$.

又由对称性,得 $\theta_{ij} = \theta_{kj}$. (*)

以 Q_1 为顶点的角是 $\theta_{23}, \theta_{34}, \theta_{42}$,由(*)式,它们分别等于以 Q_2 为顶点的三个角,即 $\theta_{41}, \theta_{34}, \theta_{13}$.

由对称性,在所有四个面上的中心角都有同样的情形.证毕.

注 第26届IMO由前苏联提供的预选题:"四面体 $ABCD$ 的内切球与面 ABD 和 DBC 分别相切于 K 和 M 点,证明:$\angle AKB = \angle DMC$."显然,这道试题是例15的特殊情形.

例16 已知$\triangle ABC$ 的面积为 $S_\triangle$,外接圆半径为 R,过 A, B, C 作平面 ABC 的垂线,并在平面 ABC 的同一侧的垂线分别取 A_1, B_1, C_1,使 $AA_1 = h_a, BB_1 = h_b, CC_1 = h_c$,这里 h_a, h_b, h_c 分别表示边 BC, CA, AB 边上的高.求四个平面 $A_1B_1C, B_1C_1A, C_1A_1B$, ABC 所围成的四面体的体积.

解 求解此问题的关键是确定这个四面体的四个顶点的位置.

设平面 A_1B_1C 与直线 AB 相交于 K 点,则点 K 在 A_1B_1 上.由 $AA_1 /\!/ BB_1$ 知 $\frac{KA}{KB} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{AC}{BC}$.因此,$K$ 是$\angle BCA$ 的外角平分线与 BA 的交点,从而平面 A_1B_1C 与 ABC 的交线是$\angle BCA$ 的外角平分线.

同理,类似可得:平面 B_1C_1A 与 ABC 的交线是$\angle CAB$ 的外角平分线.

上述两条外角平分线的交点是$\triangle ABC$ 的旁心 I_B,因此 I_B 就是平面 A_1B_1C, B_1C_1A 与 ABC 的公共点,即为所求四面体的一个顶点.

这样,旁心 I_A, I_B, I_C 是所求四面体的三个顶点.设第四个顶点为 P,则 P 是平面 A_1B_1C 和 B_1C_1A 的公共点,因而在直线 B_1I_B 上,P 在平面 ABC 上的射影在 BI_B 上,也在 AI_A 上,因而 P 的射影就是$\triangle ABC$ 的内心 I.

由相似三角形,$PI /\!/ AA_1$,且 A_1P 与 AI 相交于 I_A,可得 $\frac{PI}{AA_1} = \frac{PI}{h_a} = \frac{II_A}{AI_A} = \frac{r_a - r}{r_a}$,其中

r 为△ABC 的内切圆半径，r_a 为旁切圆半径.

设△ABC 的周长为 $2l$，则 $PE=h_a\cdot\frac{r_a-r}{r_a}=\frac{2S_\triangle}{a}\cdot\frac{\frac{1}{l-a}-\frac{1}{l}}{\frac{1}{l-a}}=\frac{2S_\triangle}{l}$.

由平面几何知识，易证△$I_AI_BI_C$ 的面积为

$$S'_\triangle=S_\triangle+\frac{1}{2}(ar_a+br_b+cr_c)=\frac{S_\triangle}{2}(2+\frac{a}{l-a}+\frac{b}{l-b}+\frac{c}{l-c})$$

$$=\frac{abc\cdot S_\triangle}{2(l-a)(l-b)(l-c)}.$$

故所求体积 $V_{PI_AI_BI_C}=\frac{1}{3}S'_\triangle\cdot PI=\frac{1}{3}\cdot\frac{2S_\triangle}{l}\cdot\frac{abc\cdot S_\triangle}{2(l-a)(l-b)(l-c)}$

$$=\frac{1}{3}abc=\frac{4}{3}S_\triangle\cdot R.$$

例 17 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，顶点 A_i 所对的面的面积记为 $S_i(i=1,2,3,4)$，以 A_iA_j 为棱的二面角为 θ_{ij}，则

(Ⅰ) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\theta_{ij}\geqslant\frac{2}{3}$；(Ⅱ) $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij}\leqslant\frac{1}{3^6}$.

证明 联想到在△ABC 中，运用三角形射影定理并结合柯西不等式，有 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\geqslant\frac{3}{4}$，$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\leqslant\frac{1}{2^3}$，于是有下述证法：

(Ⅰ)由性质 5，有 $S_1=S_2\cdot\cos\theta_{34}+S_3\cdot\cos\theta_{24}+S_4\cdot\cos\theta_{23}$，

由 Cauchy 不等式，有 $S_1^2=(S_2\cdot\cos\theta_{34}+S_3\cdot\cos\theta_{24}+S_4\cdot\cos\theta_{23})^2$

$$\leqslant(S_2^2+S_3^2+S_4^2)(\cos^2\theta_{34}+\cos^2\theta_{24}+\cos^2\theta_{23}),$$

从而 $\cos^2\theta_{34}+\cos^2\theta_{24}+\cos^2\theta_{23}\geqslant\frac{S_1^2}{S_2^2+S_3^2+S_4^2}$.

同理，还有类似于上式的三个式子，四式相加，得

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\theta_{ij}\geqslant\sum_{i=1}^{4}\frac{S_i^2}{S^2-S_i^2}(\text{其中 }S^2=\sum_{i=1}^{4}S_i^2).$$

若记 $x_i=\frac{S_i^2}{S^2}(i=1,2,3,4)$，有 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$，则

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\theta_{ij}\geqslant\sum_{i=1}^{4}\frac{S_i^2}{S^2-S_i^2}=\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{1-x_i}=-4+\sum_{i=1}^{4}(\frac{x_i}{1-x_i}+1)$$

$$=-4+(x_1+x_2+x_3+x_4)\sum\frac{1}{1-x_i}$$

$$= -4 + \frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{4}(1-x_i)\right]\cdot\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{1-x_i}\right) \geqslant -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}.$$

故 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\theta_{ij} \geqslant \frac{2}{3}$.

(Ⅱ)由 $S_1 = S_2\cdot\cos\theta_{34} + S_3\cdot\cos\theta_{24} + S_4\cdot\cos\theta_{23}$

$\geqslant 3\sqrt[3]{S_2S_3S_4\cdot\cos S_{34}\cdot\cos\theta_{24}\cdot\cos\theta_{23}}$.

同理,还有类似于上式的三个不等式,此四式相乘,化简即得

$\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos\theta_{ij} \leqslant \frac{1}{3^6}$.

注 将三角形与四面体的上述两个不等式各统一为(Ⅰ) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\cos^2\langle i,j\rangle \geqslant \frac{n+1}{2n}$;(Ⅱ) $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\cos\langle i,j\rangle \leqslant n^{-\frac{1}{2}n(n+1)}$,其中 $n=2$ 为三角形的,$n=3$ 为四面体的.

2. 善于将有关问题进行转化

例 18 四面体 $ABCD$ 三个侧面 ABD,ACD,BCD 上,由顶点 D 引出的中线与底面 $\triangle ABC$ 对应边所成的角相等.证明:每个侧面的面积小于另外两个侧面面积之和.

(1997 年波兰竞赛题)

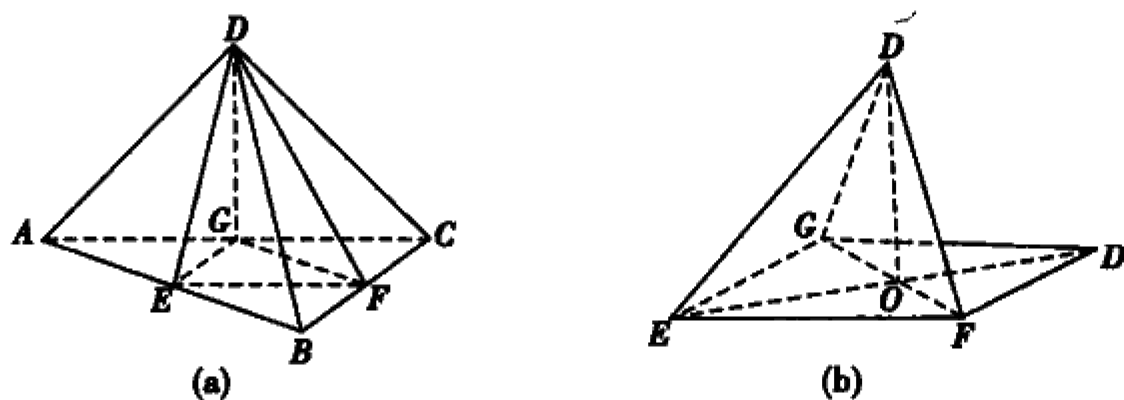


图 22-11

证明 设 E,F,G 分别是边 AB,BC,CA 的中点,连结 DE,DF,DG 如图 22-11(a).设 DE 与 AB 所成角为 θ,则

$$S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2}DE\cdot AB\cdot\sin\theta = DE\cdot FG\cdot\sin\theta,$$

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}DF\cdot BC\cdot\sin\theta = DF\cdot GE\cdot\sin\theta,$$

$$S_{\triangle DCA} = \frac{1}{2}DG\cdot CA\cdot\sin\theta = DG\cdot EF\cdot\sin\theta.$$

由于 $\sin\theta > 0$,所要证明的命题转化为证明:在四面体 $DEFG$ 中,任意一组对棱的乘积小于另两组对棱乘积之和.为此,我们来证明:

$DE\cdot FG < DF\cdot GE + DG\cdot EF$.

将四面体 $DEFG$ 的面 $\triangle DFG$ 绕 FG 翻转到底面所在的平面上，得 $\triangle D'FG$ 如图 22－11(b)．在四边形 $D'FEG$ 中，显然，有 $D'G=DG, D'F=DF$．由 Ptolemy(托勒迷)不等式，有 $D'E\cdot GF\leqslant D'F+GE+D'G\cdot EF=DF\cdot GE+DG\cdot EF$．

设 $D'E$ 与 GF 交于点 O，由 $\triangle DFG\cong\triangle D'FG$，得 $DO=D'O$．在 $\triangle DOE$ 中，$DE<DO+OE=D'O+OE=D'E$．

故　$DE\cdot GF<D'E\cdot GF\leqslant DF\cdot GE+DG\cdot EF$．从而原题得证．

例 19　给出三个四面体 $A_iB_iC_iD_i(i=1,2,3)$，过点 B_i, C_i, D_i 作平面 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i(i=1,2,3)$ 分别与棱 A_iB_i, A_iC_i, A_iD_i 垂直$(i=1,2,3)$．如果九个平面 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i(i=1,2,3)$ 相交于一点 E，而三点 A_1, A_2, A_3 在同一直线 l 上．求三个四面体的外接球面的交集(形状怎样？位置怎样？)．　　(CMO－3 试题)

解　由于几何元素太多，画出准确的全图几乎不可能．为此，画出一个局部图．

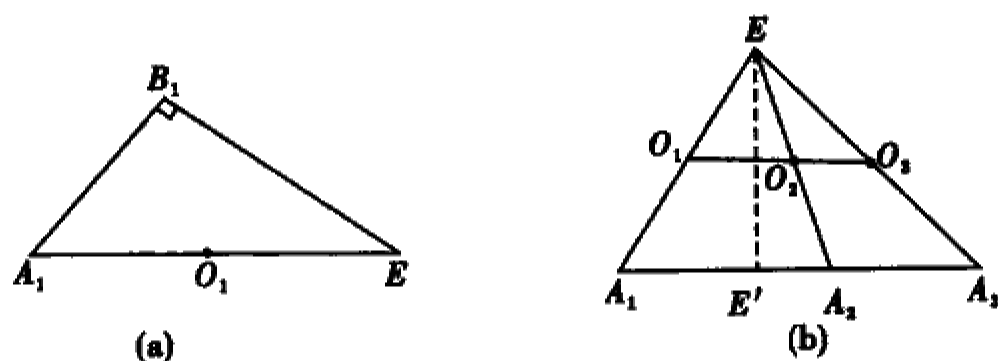


图 22－12

连 A_1E 与 B_1E 如图 22－12(a)，可知 $A_1B_1\perp B_1E$，此表明以 A_1E 为直径的球过 A_1, B_1, E 三点．同样可知，这球过 A_1, B_1, C_1, D_1, E 五点．此表明中心在 A_1E 的中点 O_1，直径为 A_1E 的球也正好是四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的外接球．类似地可定出四面体 $A_iB_iC_iD_i$ 的外接球直径和中心$(i=1,2,3)$．

于是问题转化为到直线 $A_1A_2A_3$ 及其线外一点 E 所决定的平面上来了．这个平面与三个球的交线是三个圆，它们有一个公共点 E，从 E 向直线 $A_1A_2A_3$ 作垂线，垂足为 E'，显然 E' 是 E 关于直线 $O_1O_2O_3$ 的对称点，所以 E 与 E' 是这三圆的公共点．由此知以 EE' 为直径且垂直于直线 $A_1A_2A_3$ 的圆就是三个四面体的外接球的交集．当 E 在直线 $A_1A_2A_3$ 上时，此圆就退化为一个点 E．此时三个球面相切于 E 点．

例 20　如图 22－13，过四面体 $PABC$ 的重心 G 的任一直线 l 与四个面分别相交于 M, N, S, T 四点．求证：$\frac{1}{\overrightarrow{GM}}+\frac{1}{\overrightarrow{GN}}+\frac{1}{\overrightarrow{GS}}+\frac{1}{\overrightarrow{GT}}=0$．　　(《数学通报》问题 1362 题)

证明　设 G_1 为 $\triangle ABC$ 的重心，连 PG_1，并设直线 l 与直线 PG_1 确定的平面 α 与侧面 ABC 的交线分别与 $\triangle ABC$ 的三边交于 A_1, B_1, C_1．连 PA_1, PB_1, PC_1，在平面 α 内，直

线 l 与 PA_1, PB_1, PC_1, A_1B_1 的交点分别为 M, N, S, T.

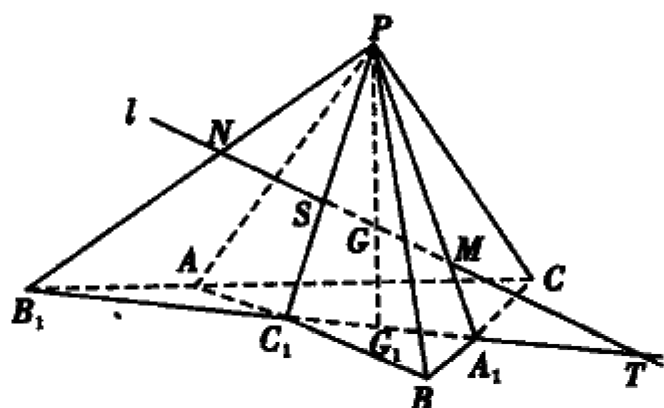


图 22－13

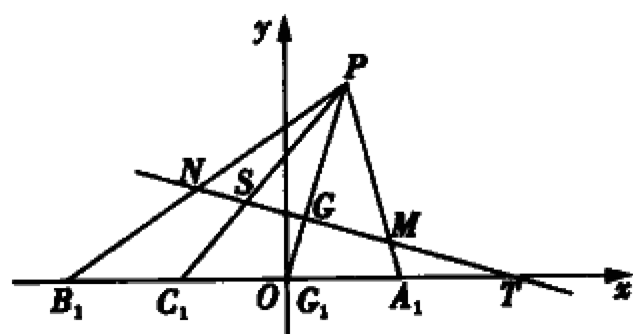


图 22－14

因 G 是四面体重心，G_1 是 $\triangle ABC$ 的重心，由重心性质，知 G 分 $\overrightarrow{PG_1}$ 所成的比为 $3:1$，且 $\frac{1}{\overrightarrow{G_1A_1}}+\frac{1}{\overrightarrow{G_1B_1}}+\frac{1}{\overrightarrow{G_1C_1}}=0$.

以 G_1 为原点，以直线 G_1A_1 为 x 轴，建立平面直角坐标系如图 22－14. 设 $A_1(a,0), B_1(b,0), C_1(c,0), P(m,n)$，则由 $\frac{1}{\overrightarrow{G_1A_1}}+\frac{1}{\overrightarrow{G_1B_1}}+\frac{1}{\overrightarrow{G_1C_1}}=0$，知

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0, G\left(\frac{m}{4}, \frac{n}{4}\right).$$

由两点式得直线 PA_1, PB_1, PC_1, A_1B_1 的方程分别为

$$y=\frac{n}{m-a}(x-a), y=\frac{n}{m-b}(x-b), y=\frac{n}{m-c}(x-c), y=0.$$

设直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}m+t\cdot\cos\alpha, \\ y=\frac{1}{4}n+t\cdot\sin\alpha. \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为倾斜角}, t \text{ 为参数})$$

并设 M, N, S, T 对应的参数分别为 t_1, t_2, t_3, t_4.

将直线 l 的方程分别代入直线 PA_1, PB_1, PC_1, A_1B_1 方程，得

$$\frac{1}{t_1}=\frac{-4m\cdot\sin\alpha-4n\cdot\cos\alpha}{3na}+\frac{4\sin\alpha}{3n},$$

$$\frac{1}{t_2}=\frac{-4m\cdot\sin\alpha-4n\cdot\cos\alpha}{3nb}+\frac{4\sin\alpha}{3n},$$

$$\frac{1}{t_3}=\frac{-4m\cdot\sin\alpha-4n\cdot\cos\alpha}{4nc}+\frac{4\sin\alpha}{3n}, \frac{1}{t_4}=\frac{-4\sin\alpha}{n}.$$

由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，得 $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}=0$,

故 $\frac{1}{\overrightarrow{GM}}+\frac{1}{\overrightarrow{GN}}+\frac{1}{\overrightarrow{GS}}+\frac{1}{\overrightarrow{GT}}=0$.

3. 适当构作辅助体

例 21 求证:若四面体相对棱间的距离分别为 d_1,d_2,d_3,则四面体的体积 V 不小于$\frac{1}{3}d_1d_2d_3$.

(第 48 届莫斯科竞赛题)

证明 如 22-15,过四面体 $ABCD$ 的三组对棱 AB 与 CD,AD 与 BC,AC 与 BD,分别引三对相互平行的平面,得平行六面体(或以四面体 $ABCD$ 的棱为侧面对角线构作平行六面体),各相对面的距离分别等于四面体三组对棱的距离.又易知该平行六面体的体积正好是四面体 $ABCD$ 体积的 3 倍.

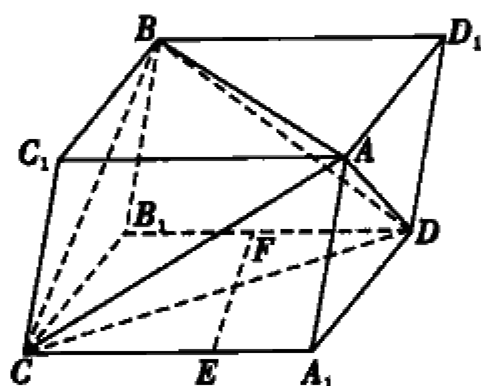


图 22-15

在底面 A_1DB_1C 中,作 $EF\perp CA_1$ 于 E,则 $EF\perp B_1D$.设垂足为 F,则 EF 不小于平面 A_1AC_1C 与平面 DD_1BB_1 间的距离,即 $EF\geqslant d_3$.又 $A_1C\geqslant d_2$,所以 $S_{\square A_1DB_1C}\geqslant d_2\cdot d_3$.

又平面 A_1DB_1C 与平面 AD_1BC_1 的距离为 d_1,因此,

$$V_{AD_1BC_1-A_1DB_1C}=S_{\square A_1DB_1C}\cdot d_1\geqslant d_1\cdot d_2\cdot d_3.$$

所以 $V_{ABCD}\geqslant\frac{1}{3}d_1d_2d_3$.

例 22 设 a,b 为四面体 $ABCD$ 的一对对棱 AB 与 CD 的长,r 为四面体内切球半径.求证:$r<\frac{ab}{2(a+b)}$.

(第 22 届全苏竞赛题)

证明 如图 22-16,过 AB 与 CD 分别作$\square ABEF$ 与$\square CDGH$,使得 $AF/\!/CD$,$CH/\!/AB$,连 AC,BH,EG,FD,得一个平行六面体 $AFEB-CDGH$(或以四面体 $ABCD$ 的三棱 CA,CB,CD 为共顶点的棱构成平行六面体).

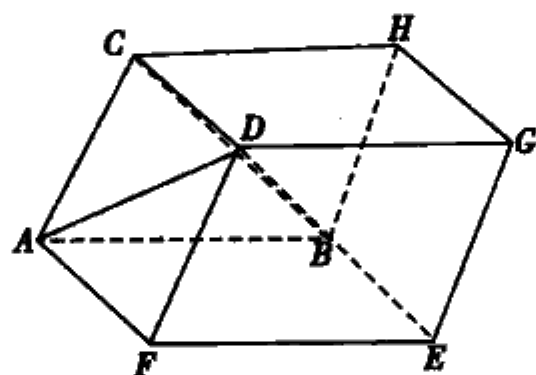


图 22-16

设 AB 与 CD 之间的距离为 d,它们所成的角为 θ,则由性质 15,知 $V_{四面体}=\frac{1}{6}ab\cdot d\cdot\sin\theta$.

设 h_a 为$\triangle ABD$ 中 AB 边上的高,显然 D 到 AB 的距离大于 D 到面 $AFEB$ 的距离,即 $h_a>d$,而 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}a\cdot h_a>\frac{1}{2}ad$.

同理,$S_{\triangle ABC}>\frac{1}{2}ad$,$S_{\triangle ACD}>\frac{1}{2}bd$,$S_{\triangle BCD}>\frac{1}{2}bd$.

于是,四面体 $ABCD$ 的表面积

$$S_{表}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}>(a+b)d.$$

注意到性质 1,即 $V=\frac{1}{3}S_{表}\cdot r$,得到 $r=\frac{3V}{S_{表}}=\frac{abd\cdot\sin\theta}{2S_{表}}\leqslant\frac{abd}{2S_{表}}<\frac{ab}{2(a+b)}$.

4. 注意运用向量知识求解

例 23 设平面 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 与四面体 $ABCD$ 的外接球面分别切于点 A,B,C,D.证明:如果平面 α 与 β 的交线与直线 CD 共面,则 γ 与 δ 的交线与直线 AB 共面.

(1981 年保加利亚竞赛题)

证明 设四面体 $ABCD$ 的外心为 O,半径为 R.令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC},\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OD}$.对空间中任意一点 X,令 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$,则 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{d}^2=R^2$.

因为 $\alpha\perp OA$,所以平面 α 上的点 X 满足 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=R^2$.

同理,平面 β,γ,δ 上的点 X 分别满足 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=R^2,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=R^2,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}=R^2$.

注意到,对任意不同时为零的数 λ,μ,有方程 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x}=(\lambda+\mu)R^2$.
给出了一个过平面 α 与 β 的交线 l 的平面(因 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\neq0$,且对任意 $X\in l$,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=R^2$).另外,对空间中任意一点 X 也存在一对不同时为零的数 λ,μ,使得

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}-R^2)+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}-R^2)=0.$$

即适当选取 λ 与 μ,可使相应的平面过点 X.因此直线 CD 与直线 l 共面的充要条件是:关于未知数 λ 与 μ 的方程组

$$\begin{cases}\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)=0,\\\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}-R^2)+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}-R^2)=0.\end{cases}$$

有非零解,即有 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-R^2)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)$.

同理可证,平面 γ 与 δ 的交线和直线 AB 共面的充要条件为

$$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-R^2)(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}-R^2)=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}-R^2)(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}-R^2).$$

因为上面得到的两个条件是等价的,所以题中结论得证.

例 24 设四面体 $ABCD$ 对应于各顶点的高分别为 h_a,h_b,h_c,h_d,在各高线上分别取 A_1,B_1,C_1,D_1,使 $AA_1=\frac{k}{h_a},BB_1=\frac{k}{h_b},CC_1=\frac{k}{h_c},DD_1=\frac{k}{h_d}$,$k$ 为任一实数.求证:四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的重心合于四面体 $ABCD$ 的重心.

证明 令 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC},\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AD}$,根据向量矢量积的意义,知 $\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}$ 的方向是对应 A 点高线的方向,而它的长度是 $\triangle BCD$ 面积的 2 倍.

设 A 点对应高线的单位向量为 $\boldsymbol{i}$,则

$$\boldsymbol{i}=\frac{\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}}{2S_{\triangle BCD}},\text{而}\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.$$

故 $i=\dfrac{b\times d+d\times c+c\times b}{2S_{\triangle BCD}}$.

同理,设 B,C,D 点对应的高线的单位向量分别为 j,k,l,则

$j=\dfrac{\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}}{2S_{\triangle ACD}}=\dfrac{c\times d}{2S_{\triangle ACD}},k=\dfrac{d\times b}{2S_{\triangle ADB}},l=\dfrac{b\times c}{2S_{\triangle ABC}}$.

若设四面体 $ABCD$ 的体积为 V,

因而 $\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{k}{h_a}i=\dfrac{k}{6V}(b\times d+d\times c+c\times b)$.

同理,$\overrightarrow{BB_1}=\dfrac{k}{6V}(c\times d),\overrightarrow{CC_1}=\dfrac{k}{6V}(d\times b),\overrightarrow{DD_1}=\dfrac{k}{6V}(b\times c)$.

因而,有 $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}=0$.

又设 O_1 为四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的重心,则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1O_1}&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1D_1})\\&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1})\\&=\frac{1}{4}(b+c+d+4\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1})\\&=\frac{1}{4}(b+c+d)-\overrightarrow{A_1A}.\end{aligned}$$

而 $\overrightarrow{AO_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1O}$,故 $\overrightarrow{AO_1}=\dfrac{1}{4}(b+c+d)=\overrightarrow{AO}$,这表示 O_1 与 O 重合.

【模拟实战】

习题 A

1. 在三棱锥 $S-ABC$ 的棱 SA,SB,SC 上分别取点 A_1,B_1,C_1,使得 $SA\cdot SA_1=SB\cdot SB_1=SC\cdot SC_1$.证明:点 A,B,C,A_1,B_1,C_1 在同一球面上. (第 15 届全俄竞赛题)
2. 在四面体 $ABCD$ 内求作一点 P,使四个四面体的体积比满足 $V_{P-BCD}:V_{P-CDA}:V_{P-DAB}:V_{P-ABC}=\alpha:\beta:\gamma:\delta$,其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为给定的正数.
3. 设 P,Q,R 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 AC,AD,AB 或延长线上的点,E,F 在 BC 上,且 $BE=EF=FC,AE,AF$ 分别与 RP 交于点 G,H.记四面体 $APQR$ 与 $AGHQ$ 的体积分别为 V,V_1.求证:$V\geqslant 3V_1$,当且仅当 $RP/\!/BC$ 或 RP 与 BC 重合时等号取得.
4. 四面体 $ABCD$ 内接于半径为 R 的球,且球心 O 在四面体内部.求证:四面体 $ABCD$ 至

少有一条棱长不小于$\frac{2}{3}\sqrt{6}R$.

5. 在四面体 $ABCD$ 中,P 为各棱长之和,V 为其体积,用 $S_{(CD)}$ 表示过四面体棱 CD 及相对棱 AB 中点的截面(即中线面)面积,其余中线面表示类同.求证:$\frac{1}{S_{(CD)}}+\frac{1}{S_{(AB)}}+\frac{1}{S_{(BC)}}+\frac{1}{S_{(AD)}}+\frac{1}{S_{(BD)}}+\frac{1}{S_{(AC)}}\leqslant\frac{P}{3V}$,等号当且仅当四面体为正四面体时取得.

6. 四面体 $KLMN$ 的顶点在另一个四面体 $ABCD$ 的内部,在其面上或者棱上.证明:四面体 $KLMN$ 各棱长度的和小于四面体 $ABCD$ 各棱长度和的$\frac{3}{4}$. (第16届全苏竞赛题)

7. 观察一切外切于已知球的四面体 $AXBY$.证明:当确定点 A,B 后,空间四边形的角之和,即$\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX$ 不依赖于点 X 和 Y 的选择.

(第20届全苏竞赛题)

8. 四面体 $ABCD$ 中,面 ABC 与 BCD 的夹角为 $30°$,$\triangle ABC$ 的面积为 120,$\triangle BCD$ 的面积为 80,$BC=10$.求此四面体的体积. (1992年美国竞赛题)

9. 在四面体 $ABCD$ 内部有一点 O,使得直线 AO,BO,CO,DO 与四面体的面 BCD,ACD,ABD,ABC 分别交于 A_1,B_1,C_1,D_1 四点,且$\frac{AO}{A_1O}=\frac{BO}{B_1O}=\frac{CO}{C_1O}=\frac{DO}{D_1O}=k$.求 k 的所有可能的值. (1968年保加利亚竞赛题)

10. 如果两个四面体的四个面的面积对应相等,则它们的体积也一定相等.对否?

(1983年加拿大竞赛题)

11. 证明:连接四面体的顶点与顶点与相对的面的内切圆圆心的四条直线交于一点的充要条件是,该四面体三组对棱的乘积彼此相等. (1979年波兰竞赛题)

12. 在四面体 $ABCD$ 的棱 AB,AC,AD 上,对每个 $n\in\mathbf{N}^+$,分别取点 K_n,L_n,M_n,使得 $AB=nAK$,$AC=(n+1)AL_n$,$AD=(n+2)AM_n$.证明:所有的平面 $K_nL_nM_n$ 共线.

(1966年保加利亚竞赛题)

13. 设一平面与四面体的一个顶点出发的三条棱相交.证明:当且仅当这个平面过四面体内切球球心时,它分四面体表面所成的两部分的面积与其相应部分的体积成比例. (1976年保加利亚竞赛题)

14. 证明:对四面体内部的任意一点,从这点观察它的各条棱时的视角之和大于 $540°$.

(1980年奥地利-波兰竞赛题)

15. 证明:对任意四面体的高 h_i 和旁切球的半径 $r_i(i=1,2,3,4)$,有 $2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i}$.

(1973年捷克竞赛题)

16. 设四面体 $ABCD$ 中，$AB=41$，$AC=7$，$AD=18$，$BC=36$，$BD=27$，$CD=13$，设 d 为 AB 与 CD 两棱中点间的距离.求 d^2 的值.

17. 设 a,b,c,d,e,f 是一个给定四面体的棱长，S 是它的表面积.证明：$S\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$. （1992年捷克竞赛题）

18. 在六条棱长分别为 2,3,3,4,5,5 的所有四面体中，最大的体积是多少？证明你的结论. （1983年全国联赛题）

19. 试证：四面体的重心到四面体各面的距离之和不小于其内心到各面的距离之和.

20. 平面截四面体 $PABC$ 的棱 PA，PB，PC 依次于 A'，B'，C'，截面 ABC 的三边 AB，AC，BC 的延长线顺次于 L，N，M.求证：$\frac{S_{\triangle ANL}}{S_{\triangle LMB}}\cdot\frac{S_{\triangle BMB'}}{S_{\triangle B'CP}}\cdot\frac{S_{\triangle PC'A'}}{S_{\triangle A'NA}}=1$.

21. 四面体 $ZABC$ 的体积等于 5，过棱 ZA 的中点 K 和棱 BC 的中点 P 作平面交棱 ZC 于 M 点，且 $ZM:MC=2:3$.若顶点 A 到所作的截面的距离等于 1，求该截面的面积.

22. 四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp BC$，$S_{\triangle ABC}>S_{\triangle BCD}$，棱 AD 上有 E，F 两点，面 BCE 平分二面角 $A-BC-D$，线段 $AF=ED$.求证：$S_{\triangle BCF}^2-S_{\triangle BCE}^2=(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BCD})^2$.

习题 B

1. 在四面体 $ABCD$ 内或它的面上给定一个不和顶点 D 重合的点 P.证明：在线段 PA，PB，PC 中可以找到这样一条线段，它的长度小于线段 DA，DB 或 DC 中某一条线段的长. （1964年匈牙利竞赛题）

2. 一球与四面体 $ABCD$ 的棱 AB，BC，CD，DA 分别切于 E，F，G，H，并且 E，F，G，H 是一个正方形的顶点.如果这球与棱 AC 相切，证明它必与 BD 相切. （IMO－22预选题）

3. 空间有 4 个球，它们的半径分别为 2,2,3,3，每个球都与其余 3 个球外切，另外有一个小球与这 4 个球都外切.求小球的半径. （CMO－10试题）

4. 设 r 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球半径，并设 r_1，r_2，r_3，r_4 分别是顶点 A_1，A_2，A_3，A_4 所对的侧面三角形的内切圆半径.证明：$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\leqslant\frac{2}{r^2}$.

5. 求证：四面体存在与六棱相切的棱切球的充要条件是三组对棱之和相等.

6. 设四面体 $ABCD$ 的体积为 V，顶点 A，B，C，D 所对的面的面积分别为 S_A，S_B，S_C，S_D.令 $BC=a$，$DA=a'$，$CA=b$，$DB=b'$，$AB=c$，$DC=c'$，且这三组对棱所成的角分别为 α，β，γ，则有

(Ⅰ)$S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2=\frac{1}{4}[(aa'\cdot\sin\alpha)^2+(bb'\cdot\sin\beta)^2+(cc'\cdot\sin\gamma)^2]$;

(Ⅱ)$S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2\geq 9(3V^4)^{\frac{1}{3}}$.

7. 设四面体 $ABCD$ 的体积为 V,三组对棱 AB 与 CD,BC 与 AD,AC 与 BD 之间距离分别为 d_1,d_2,d_3,这三组对棱中点连线长分别为 m_1,m_2,m_3,则 $d_1d_2d_3\leq 3V\leq m_1m_2m_3$.

8. 以四面体的任一顶点为顶点,任一中点三角形(三角形的一边为一对棱中点连线,另一顶点为棱的中点)为底面的所有三棱锥体积相等,并且等于原四面体体积的八分之一.

9. 在四面体 $PABC$ 中,若 P 点在平面 ABC 上的射影 O 为$\triangle ABC$ 的外心,且棱 PA,PB,PC 所对的面角分别为 α,β,γ,PO 与 PA 的夹角为 φ,则

(Ⅰ)$\cos\angle BAC=\dfrac{\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$(其余类同);

(Ⅱ)$\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\angle BAC}=\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\angle ABC}=\dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\angle ACB}=\sin\varphi$.

10. 在四面体 $PABC$ 中,若 P 点在平面 ABC 上的射影 O 是$\triangle ABC$ 的内心,T_1,T_2,T_3 分别是 O 点在 AB,BC,CA 上的射影,三面角 $P-ABC$ 的三个面角分别为 α,β,γ,又 PO 与 PT_1 的夹角为 θ,则

(Ⅰ)$\sin\theta=\left(\dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cdot\tan\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}+\tan\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}+\tan\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

(Ⅱ)$\tan\dfrac{\angle BAC}{2}=\dfrac{\sin\theta}{\tan\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}$($\alpha$ 为棱 PA 所对的面角).

11. 过四面体 $ABCD$ 的内心 I 的任一平面分别交棱 AB,AC,AD 于点 P,Q,R,顶点 X 所对的侧面的面积记为 S_X,则 $S_B\cdot\dfrac{AB}{AP}+S_C\cdot\dfrac{AC}{AQ}+S_D\cdot\dfrac{AD}{AR}=S_A+S_B+S_C+S_D$.

第二十三章　特殊四面体的性质及应用

【基础知识】

特殊四面体包括垂心四面体(四条高线交于一点的四面体),直角四面体(有一个三面角是直三面角的四面体,或过同一顶点的三条棱互相垂直的四面体),拟腰四面体(两对对棱相等的四面体),等面四面体(三对对棱相等的四面体),正四面体(六条棱长相等的四面体)等.特殊四面体除了具有一般四面体的性质外,还具有各自独特的性质.

1. 垂心四面体

性质1　垂心四面体的对棱互相垂直.反之亦然.

事实上,若四面体 $ABCD$ 为垂心四面体,垂心为 H,则 AH,BH 均与 CD 垂直,从而 $AB\perp CD$.

同理,$AC\perp BD$,$AD\perp BC$.

反之,由 $AB\perp CD$,过 AB 作 CD 的垂面交 CD 于 E,设 H 为 $\triangle ABE$ 的垂心,则 $AH\perp BE$,$AH\perp CD$,所以 AH 是面 BCD 的垂线.同样,BH 是面 ACD 的垂线,四面体 $ABCD$ 的每两条高交于一点,每三条高不共面,所以四条高必交于同一点.于是 H 为四面体的垂心,即四面体为垂心四面体.

性质2　垂心四面体的高过底面的垂心.反之亦然.

事实上,由性质1,设顶点 A 在底面 BCD 上的射影为 F,由于 $AB\perp CD$,所以 AB 的射影 $BF\perp CD$.同样 $CF\perp BD$,即 F 为$\triangle BCD$ 的垂心.

性质3　垂心四面体对棱的平方和相等.反之亦然.

事实上,由性质2,知 A 在面 BCD 上的射影 F 为$\triangle BCD$ 的垂心.设 BF 交 CD 于 E,则 $AC^2-AD^2=CF^2-DF^2=CE^2-DE^2=BC^2-BD^2$,即有 $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

同理,$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2$.

性质4　垂心四面体连接对棱中点的线段相等.反之亦然.

事实上,由性质3,设 E,F 分别为 AB,CD 的中点,则 $4EF^2=2(AF^2+BF^2)-AB^2=AC^2+AD^2-\frac{1}{2}CD^2+BC^2+BD^2-\frac{1}{2}CD^2-AB^2=AC^2+BD^2(=BC^2+AD^2=AB^2+CD^2)$.即证.

反之,考察过对棱的相互平行的六个平面构成的平行六面体,六面体的棱长恰好等于连结四面体对棱中点的线段.因此,六面体的棱均相等,各面为菱形,菱形对角线(即四面体的对棱)互相垂直.

由于从性质 1⇒性质 2⇒性质 3⇒性质 4⇒性质 1,从而性质 2,3,4 的反之亦然.

上述性质中的反之亦然,其实也是垂心四面体的四条判定定理.由性质 4 的证明中可知有

性质 5 垂心四面体的外接平行六面体(四面体的棱为平行六面体的侧面对角线)各面是菱形.

性质 6 平行于四面体任一组对棱的平面截其余四条棱的截口面为矩形.

性质 7 垂心四面体对棱之公垂线共点于垂心.

性质 8 垂心四面体的外心、重心、垂心共线,且外心到重心的距离等于重心到垂心的距离.

2. 直角四面体

直角四面体有如下判定定理和性质:

判定定理 对棱都垂直且有一个面角为直角的四面体是直角四面体.

事实上,在四面体 $ABCD$ 中,若$\angle DAC=90°$,则由 $AD\perp BC$,知 $AC\perp$面 ABC,从而 $AD\perp AB$,即$\angle DAB=90°$.又由 $AB\perp CD$,知 $AB\perp$面 ACD,有$\angle BAC=90°$.即证.

推论 1 两组对棱垂直且有一个面角为直角的四面体是直角四面体.

推论 2 四面体一顶点到对面的射影是该面的垂心,且该顶点的三面角的面角中有一个为直角,那么这个四面体是直角四面体.

显然,上述判定定理及推论的逆命题也是直角四面体的性质.

为了方便讨论直角四面体的一系列性质引进一些记号:设直角四面体 $PABC$ 的直三面角是三面角 $P-ABC$,其体积为 V,棱 $PA=a$,$PB=b$,$PC=c$.顶点 x 所对的面的面积记为 S_x;以棱 y 为二面角棱的二面角大小记为 θ_y;四面体 $PABC$ 的内切球、外接球的半径分别记为 r、R;分别与顶点 x 所对的面外切,又与其他侧面的延展面相切的旁切球半径记为 r_x.

由于直角四面体是垂心四面体,因此,可得

性质 1 直角四面体具有垂心四面体的所有性质.

性质 2 三对对棱中点的连线共点(设为 G,且此点称为四面体的重心)且互相平分;三对对棱中点的连线长相等,且都等于$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

性质 3 不含直角的侧面三角形是锐角三角形,且这每一个面角的正切值等于这个面的面积的 2 倍与该面角所对的棱长平方之比;这每一面角的余弦值等于与此面共

顶点的另两个面角余弦值之积.

性质 4 (1) $S_P = S_A \cdot \cos\theta_{BC} + S_B \cdot \cos\theta_{AC} + S_C \cdot \cos\theta_{AB}$;

(2) $S_A = S_P \cdot \cos\theta_{BC}$, $S_B = S_P \cdot \cos\theta_{AC}$, $S_C = S_P \cdot \cos\theta_{AB}$;

(3) $\cos^2\theta_{BC} + \cos^2\theta_{AC} + \cos^2\theta_{AB} = 1$;

(4) $\frac{3\pi}{4} < \theta_{AB} + \theta_{BC} + \theta_{AC} < \pi$.

下面只给出(4)式的证明思路:

由(3)式有 $\cos^2\theta_{BC} = \cos^2\theta_{AC} - \cos^2\theta_{AB} = -(\cos\theta_{AB} - \cos\theta_{AC}) \cdot (\cos\theta_{AB} + \cos\theta_{AC}) > 0$. 又 $\cos\theta_{AB} - \cos\theta_{AC} > 0$, 则 $\cos\theta_{AB} + \cos\theta_{AC} < 0$, 故 $\frac{\pi}{2} < \theta_{AB} + \theta_{AC}$. 同理还有两式,相加即证(4)式左端. 又 $\cos[\pi + (\theta_{AB} + \theta_{AC})] = -\cos(\theta_{AB} + \theta_{AC})$, 在 $[0, \pi]$ 内余弦函数递减,有 $\cos[\pi - (\theta_{AB} + \theta_{AC})] = \cos[(\pi - \theta_{AB}) - \theta_{AC}] < \cos(\theta_{AB} - \theta_{AC})$, 即有 $\cos^2\theta_{BC} > \cos^2[\pi - (\theta_{AB} + \theta_{AC})]$, 由此即证得(4)式右端.

由性质 4(3)及幂平均、算术 - 几何平均值不等式,我们有

推论 (1) $\cos\theta_{AB} + \cos\theta_{BC} + \cos\theta_{AC} \leqslant \sqrt{3}$;

(2) $\cos\theta_{AB} \cdot \cos\theta_{BC} \cdot \cos\theta_{AC} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}$;

(3) $\cos\theta_{AB} \cdot \cos\theta_{BC} + \cos\theta_{BC} \cdot \cos\theta_{AC} + \cos\theta_{AB} \cdot \cos\theta_{AC} \leqslant 1$;

(4) $\sin\theta_{AB} + \sin\theta_{BC} + \sin\theta_{AC} \leqslant \sqrt{6}$;

(5) $\sin\theta_{AB} \cdot \sin\theta_{BC} \cdot \sin\theta_{AC} \leqslant \frac{2}{9}\sqrt{6}$;

(6) $\sin\theta_{AB} \cdot \sin\theta_{BC} + \sin\theta_{BC} \cdot \sin\theta_{AC} + \sin\theta_{AB} \cdot \sin\theta_{AC} \leqslant 2$.

性质 5 含直角的侧面面积是它在不含直角的侧面上的射影面积与这不含直角的侧面面积的比例中项.

性质 6 $S_P^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2$.

性质 7 二面角大小为 $\theta(\theta \neq 90°)$ 的两侧面中,含直角的侧面面积 S 与不含直角的侧面面积 S_P 之比为 $\cos\theta$. 特别地, $\theta = 60°$ 时, $S : S_P = 1:2$; $\theta = 45°$ 时, $S : S_P = \sqrt{2}:2$; $\theta = 30°$ 时, $S : S_P = \sqrt{3}:2$; $\theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $S : S_P = \sqrt{3}:\sqrt{3}$.

性质 8 $\frac{\sqrt{S_A^2 + S_B^2}}{\sin\theta_{AB}} = \frac{\sqrt{S_B^2 + S_C^2}}{\sin\theta_{BC}} = \frac{\sqrt{S_A^2 + S_C^2}}{\sin\theta_{AC}} = S_P$.

性质 9 $V = \frac{1}{6}abc = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{S_A \cdot S_B \cdot S_C}$.

性质 10 设 S 为直角四面体的全面积，L 为 6 条棱长的乘积，则

$S\geqslant\frac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[3]{V^2}$；$L\geqslant 72\sqrt{2}V$.

性质 11 直角四面体的四顶点与其所对侧面重心的四条连线共点，共点于三对对棱中点连线的交点．亦即七线共点于直角四面体重心．

性质 12 直角四面体的四顶点与其所对的侧面垂心的四条连线共点，共点于其直三面角顶点 P，此点为直角四面体的垂心．由此也可知直角四面体是垂心四面体．

性质 13 非直三面角体的三顶点与其所对的侧面外心的三条连线共点，共点于不含直角的侧面三角形的重心．

性质 14 过含直角的侧面三角形的外心，且与该侧面垂直的三直线共点，共点于直角四面体的外心．

性质 15 设 m_A、m_B、m_C、m_P 分别为直角四面体四顶点与所对面的重心的连线长（或称四面体的 4 条中线长），则 $m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_P^2=\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

分析 如图 23－1，设 G_1 为侧面$\triangle ABC$ 的重心，设 $\angle PG_1E=\alpha$．由三角线中线长公式，有 $PE^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2)$，$AE^2=\frac{1}{4}(4a^2+b^2+c^2)$．又 $2PE^2+PA^2=2[(\frac{1}{3}AE)^2+m_P^2-2\cdot\frac{1}{3}AE\cdot m_P\cdot\cos\alpha]+[(\frac{2}{3}AE)^2+m_P^2+2\cdot\frac{2}{3}AE\cdot m_P\cdot\cos\alpha]=3m_P^2+\frac{2}{3}(AE)^2$，由此即有

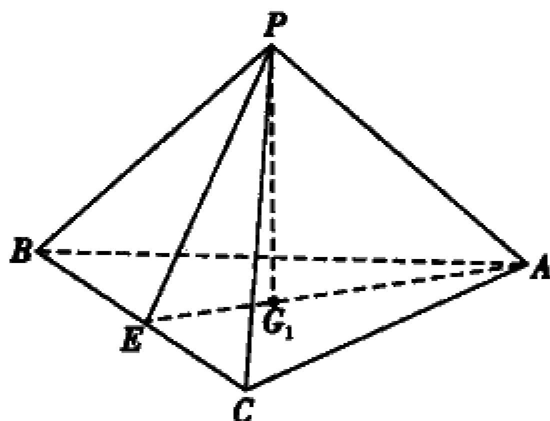


图 23－1

$$m_P^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

类似可求 $m_A^2=\frac{1}{9}(9a^2+b^2+c^2)$，$m_B^2=\frac{1}{9}(a^2+9b^2+c^2)$，$m_C^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2+9c^2)$，由此即获结论．

性质 16 $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，且与对棱中点的连线长相等；外接球的球心是分别过直三面角的三条棱与其所对棱中点的三个平面的公共点．

性质 17 $r=\frac{abc}{2(S_A+S_B+S_C+S_P)}=\frac{S_A+S_B+S_C-S_P}{a+b+c}$；内切球的球心是其棱不共顶点的三个二面角平分面的公共点．

性质 18 $r_P=\frac{abc}{2(S_A+S_B+S_C-S_P)}=\frac{S_A+S_B+S_C+S_P}{a+b+c}$；

$$r_A=\frac{abc}{2(S_B+S_C+S_P-S_A)}=\frac{S_A+S_P-S_B-S_C}{b+c-a};$$

$$r_B=\frac{abc}{2(S_A+S_C+S_P-S_B)}=\frac{S_B+S_P-S_A-S_C}{a+c-b};$$

$$r_C=\frac{abc}{2(S_A+S_B+S_P-S_C)}=\frac{S_C+S_P-S_A-S_B}{a+b-c}.$$

旁切球的球心是其相切侧面与另三个延展切面所成二面角平分面(其中只须其棱不共顶点的三个二面角的平分面即可)的公共点.

证明思路 只推证 r_A,其余类似推证.

作外切于侧面 PBC 的旁切球的外切三棱台 $B'C'P'-BCP$,得新四面体 $AB'C'P'$,如图 23-2.由

$$\frac{S_A}{S'_A}=\frac{S_B}{S'_B}=\frac{S_C}{S'_C}=\frac{S_P}{S'_P}=\frac{a^2}{(a+2r_A)^2}\text{及}$$

$$\frac{V_{ABCD}}{V'_{AB'C'P'}}=\frac{\frac{1}{3}r(S_A+S_B+S_C+S_P)}{\frac{1}{3}r_A(S_{A'}+S_{B'}+S_{C'}+S_{P'})}=\frac{a^3}{(a+2r_A)^3}.$$

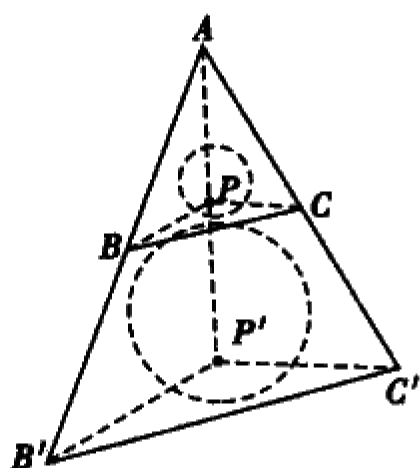


图 23-2

并注意到性质 6、性质 17,即可推证 r_A 的关系式.

推论 1 r 最小,r_P 最大,且 $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_P}=\frac{2}{r}$ 或

$$r_A\cdot r_B\cdot r_C+r_A\cdot r_B\cdot r_P+r_A\cdot r_C\cdot r_P+r_B\cdot r_C\cdot r_P=\frac{2r_A\cdot r_B\cdot r_C\cdot r_P}{r}.$$

推论 2 $r\cdot r_P=\frac{3V}{a+b+c}=\frac{abc}{2(a+b+c)}$ 或 $\frac{1}{r\cdot r_P}=\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}$.

推论 3 记 $S'=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}(S_A+S_B+S_C+S_P)$,则

$$V=\frac{2}{3}S'r=\frac{2}{3}(S'-S_A)\cdot r_A=\frac{2}{3}(S'-S_B)\cdot r_B=\frac{2}{3}(S'-S_C)\cdot r_C=\frac{2}{3}(S'-S_P)\cdot r_P.$$

推论 4 记四顶点到所对面的距离为 h_A、h_B、h_C、h_P,则 $\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_P}=\frac{1}{r}$;

$$\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}-\frac{1}{h_P}=\frac{1}{r_p}. \quad (*)$$

还有类似(*)式的三式.此略.

推论 5 令 l 为四面体六条棱长之和,$S'=\frac{1}{2}(S_A+S_B+S_C+S_P)$,则

$$l\leqslant 2(\sqrt{3}+\sqrt{6})R;\ S'\leqslant\frac{3+\sqrt{3}}{3}R^2;\ V\geqslant(9+5\sqrt{3})r^3;\ V\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{27}R^{\frac{3}{2}}.$$

性质 19 设 S_{am}、S_{bm}、S_{cm} 是分别过棱 PA 及 BC 的中点，过棱 PB 及 AC 的中点，过棱 PC 及 AB 的中点的截面面积，则 $S_{am}=\frac{1}{2}\sqrt{S_B^2+S_C^2}$，$S_{bm}=\frac{1}{2}\sqrt{S_A^2+S_C^2}$，$S_{cm}=\frac{1}{2}\sqrt{S_A^2+S_B^2}$，且 $S_{am}^2+S_{bm}^2+S_{cm}^2=\frac{1}{2}S_P^2$.

性质 20 设 S'_{ma}、S'_{mb}、S'_{mc} 是分别过棱 BC 及 PA 的中点，过棱 AC 及 PB 的中点，过棱 AB 及 PC 的中点的截面面积，则 $S'_{ma}=\frac{1}{2}\sqrt{3S_A^2+S_P^2}$，$S'_{mb}=\frac{1}{2}\sqrt{3S_B^2+S_P^2}$，$S'_{mc}=\frac{1}{2}\sqrt{3S_C^2+S_P^2}$，且 $S'^2_{ma}+S'^2_{mb}+S'^2_{mc}=\frac{3}{2}S_P^2$.

性质 21 设 S_{ad}、S_{bd}、S_{cd} 分别为过棱 PA 与 BC 垂直、过棱 PB 与 AC 垂直、过棱 PC 与 AB 垂直的截面面积，则 $S_{ad}=S_B\cdot S_C/\sqrt{S_B^2+S_C^2}$，$S_{bd}=S_A\cdot S_C/\sqrt{S_A^2+S_C^2}$，$S_{cd}=S_A\cdot S_B/\sqrt{S_B^2+S_A^2}$，且

$$\frac{1}{S_{ad}^2}+\frac{1}{S_{bd}^2}+\frac{1}{S_{cd}^2}=2\left(\frac{1}{S_A^2}+\frac{1}{S_B^2}+\frac{1}{S_C^2}\right).$$

性质 22 设 S_{at}、S_{bt}、S_{ct} 分别为过棱 PA 及 $\angle BPC$ 的平分线，过棱 PB 及 $\angle APC$ 的平分线，过棱 PC 与 $\angle APB$ 的平分线的截面面积，则 $S_{at}=\frac{\sqrt{2}S_B\cdot S_C}{S_B+S_C}$，$S_{bt}=\frac{\sqrt{2}S_A\cdot S_C}{S_A+S_C}$，$S_{ct}=\frac{\sqrt{2}S_A\cdot S_B}{S_A+S_B}$，且 $\frac{1}{S_{at}}+\frac{1}{S_{bt}}+\frac{1}{S_{ct}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}\right)$.

性质 23 在直角四面体中，

(1)斜面上任一点与直角顶点的连线和三条直角棱所成角的余弦的平方和等于 1；

(2)斜面上任一点与直角顶点的连线和三个直角面所成的角的余弦的平方和等于 2；

(3)斜面上每一条棱与三条直角棱所成角的余弦的平方和等于 1；

(4)斜面上每一条棱与三个直角面所成的角的余弦的平方和等于 2；

(5)三条直角棱与斜面所成角的余弦的平方和等于 2；

(6)三条直角棱的平方的倒数和等于直角顶点到斜面的距离的平方的倒数.

性质 24 直角四面体的外接平行六面体，

(1)当四面体的六条棱均成为平行六面体的侧面对角线时，平行六面体是菱形六面体；

(2)当四面体的直三面角的三条棱成为平行六面体的棱，其余三条棱成为平行六面体的侧面对角线时，平行六面体是长方体.

3. 直棱四面体

三条相连棱形成三边直角折线(即空间直角四边形)的四面体,称为直棱四面体.

显然,直棱四面体每个面都是直角三角形.若令$\angle ADC=\beta_1$,$\angle ADB=\beta_2$,$\angle BDC=\beta_3$,则

(1)$\cos\beta_1=\cos\beta_2\cdot\cos\beta_3$;

(2)$\sin\beta_1=\dfrac{\sin\beta_2}{\sin\theta_{CD}}=\dfrac{\sin\beta_3}{\sin\theta_{AD}}$;

(3)$\cos\beta_3=\dfrac{\sin\theta_{AD}}{\sin\theta_{CD}}$;

(4)$\tan\theta_{AD}\cdot\tan\theta_{CD}=\sec\beta_1$.

直角四面体和直棱四面体,都可以看作从长方体上截下的一部分.在部分多面体过程中,在棱、锥、台的计算中,它们经常出现.由于它有多方面的垂直关系和比较多的等量关系,有人称之为基本四面体.它们可以看作直角三角形在空间的自然推广,是工具性的四面体.

4. 等腰四面体

从某一顶点出发的三条棱(称为腰)相等的四面体称为等腰四面体.这一顶点称为腰顶点.

性质 1 等腰四面体的腰顶点在所对的面的射影为该面的外心.反之亦然.

性质 2 等腰四面体的腰顶点出发的三条棱与该点所对的面成等角.反之亦然.

性质 3 等腰四面体的底面为正三角形时,则该四面体为垂心四面体.

性质 4 等腰四面体的底面为正三角形,且其边长为腰的$\sqrt{2}$时,则该四面体是等腰直角四面体.

5. 拟腰四面体

两组对棱分别相等的四面体称为拟腰四面体.

性质 1 两对对棱分别相等的四面体的充要条件是它的棱均成为侧面对角线的外接平行六面体为直平行六面体.

证明 设四面体 $ABCD$ 的外接平行六面体为 $A_1CB_1D-AC_1BD_1$,$AD=BC$,$AC=BD\Leftrightarrow$侧面 A_1DD_1A 与侧面 CB_1BC_1 为全等矩形,侧面 A_1CC_1A 与侧面 DB_1BD_1 为全等矩形$\Leftrightarrow A_1CB_1D-AC_1BD_1$ 为直平行六面体.

推论 1 两对对棱分别相等的四面体的充要条件是另一对对棱中点的连接线段垂直于此二棱.

推论 2 两对对棱分别相等的四面体的充要条件是这两对对棱中点的连接线段均与第三对对棱中点的连接线段垂直.

推论 3 两对对棱分别相等的四面体的充要条件是四面体在平行于这两对对棱中的每一对对棱的每一个平面上的射影为矩形.

性质 2 两对对棱分别相等的四面体的充要条件是两侧面面积相等,且另两侧面面积也相等,或四侧面分成等面积的两组.

证明 此定理即为:在四面体 $ABCD$ 中,$AD=BC$,$AC=BD \Leftrightarrow S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}$,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$.

必要性($\Rightarrow$):显然.

充分性($\Leftarrow$):如图 23-3,作四面体 $ABCD$ 的外接平行六面体 $A_1CB_1D-AC_1BD_1$.此时 A、B 到底面 A_1CB_1D 的距离 AH_1、BH_2 相等.作 $AE\perp CD$ 于 E,$BF\perp CD$ 于 F,连 H_1E,H_2F.则由 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}$,有 $AE=BF$,从而 $\angle AEH_1=\angle BFH_2$,即二面角 $A-CD-A_1$ 等于二面角 $B-CD-B_1$,此时二面角 $A-CD-B$ 的平分面 α 垂直于底面 A_1CB_1D,也就垂直于面 AC_1BD_1,且面 α 交 AB 于其中点 O_1.

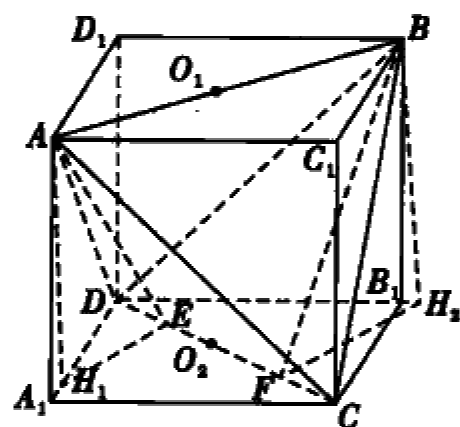


图 23-3

又可证 A、B 两点到此平分面 α 的距离相等.

设此平分面 α 交 AB 于 O_1,则 O_1 为上底面中心.

同理,由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$,有二面角 $C-AB-D$ 的平分面 β 也垂直于两底面,也交 CD 于其中点 O_2.此时 $\alpha\cap\beta=O_1O_2$ 且垂直于两底面,故平行六面体 $A_1CB_1D-AC_1BD_1$ 为直平面六面体.由性质 1 即证得了充分性.

性质 3 两对对棱分别相等的四面体的充要条件是另一对对棱每条棱所张的二个面角分别相等.

证明 此性质即为:在四面体 $ABCD$ 中,$AD=BC$,$AC=BD \Leftrightarrow \angle CAD=\angle CBD$,$\angle ACB=\angle ADB$.

必要性($\Rightarrow$):显然.

充分性($\Leftarrow$):如图 23-3,作四面体 $ABCD$ 的外接平行六面体 $A_1CB_1D-AC_1BD_1$.由题设$\angle CAD=\angle CBD$,又 A、B、C、D 四点共球 O,则$\triangle ACD$ 和$\triangle BCD$ 所在的平面截球 O 的截面圆是等圆.而 A、B 两点到面 A_1CB_1D 的距离相等,则过 CD 及 AB 中点 O_1 的截面圆必是球 O 的大圆.从而 O_1、O 及 CD 的中点 O_2 在过 CD 的球 O 的大圆面内.

同理,O_1、O、O_2 也在过棱 AB 的球 O 的大圆面内.故 O_1、O、O_2 三点共线于这两个大圆面的交线上.又 $OO_1\perp AB$,$OO_2\perp CD$,则 $OO_1\perp A_1B_1$,$OO_2\perp C_1D_1$,从而 O_1O_2 垂直于平行六面体的两底面 A_1CB_1D、AC_1BD_1,故知此平行六面体为直平行六面体.由性质 1,充分性获证.

此性质的充分性也可以这样证：设$\angle CAD=\angle CBD=\alpha$，$\angle ACB=\angle ADB=\beta$，令$AC=a$，$AD=b$，$BC=c$，$BD=d$，$CD=x$，$AB=y$．对$\triangle ADC$和$\triangle BDC$应用余弦定理可得

$$2\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-x^2}{ab}=\frac{c^2+d^2-y^2}{cd}\Rightarrow(ab-cd)x^2=(bc-ad)(ac-bd). \quad ①$$

同理，得$(ad-bc)y^2=(cd-ab)(ac-bd)$． ②

由①、②可知，若$ab-cd=0$，则$ad-bc=0\Rightarrow a=c$，$b=d$．因此论断获证．

若$ab-cd\neq0$，则$ad-bc\neq0$，$ac-bd\neq0$，于是由①、②推得$x^2y^2=(ac-bd)^2\Rightarrow$或$xy+bd=ac$，或$xy+ac-by=0$． ③

由托勒迷定理及③式，可知A、B、C、D四点共圆，与题设矛盾．因此充分性获证．

性质4　两对对棱分别相等的四面体的充要条件是其外心（外接球球心）在另一对对棱中点的连线上（重心亦在此连线上）．

必要性（$\Rightarrow$）：设在四面体$ABCD$中，$AD=BC$，$AC=BD$，作四面体$ABCD$的外接平行六面体如图23－3．由性质1，即知此平行六面体为直平行六面体，从而上、下底面中心O_1、O_2的连线既是AB、CD中点的连线，又是AB、CD的公垂线，亦即既是AB的中垂线，又是CD的中垂线，因而四面体$ABCD$的外心在O_1O_2上．

充分性（$\Leftarrow$）：由题设，四面体的外心在一对对棱AB、CD的中点O'_1、O'_2的连线上，则$O'_1O'_2$是AB、CD的中垂线，从而$O'_1O'_2$垂直于四面体$ABCD$的外接平行六面体$A_1CB_1D-AC_1BD_1$的两底面，故此外接平行六面体是直平行六面体．由性质1，充分性获证．

性质5　两对对棱分别相等的四面体的充要条件是其内心（内切球球心）在另一对对棱中点的连线上（重心亦在此连线上）．

证明　必要性（$\Rightarrow$）：设在四面体$ABCD$中，$AD=BC$，$AC=BD$．作四面体$ABCD$的外接平行六面体如图23－3，则此平行六面体为直平行六面体，故$S_{\triangle A_1DC}=S_{\triangle B_1CD}$．又$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle BDC}$，则二面角$A-DC-A_1$等于二面角$B_1-DC-B$．而上、下底面中心$O_1$、$O_2$所在直线与$DC$两相交线所在对角面垂直于两底面，即知此对角面平分二面角$A-DC-B$．同理，O_1O_2与AB所在对角面也平分二面角$C-AB-D$．故四面体内心I在O_1O_2上．

充分性（$\Leftarrow$）：设四面体$ABCD$的内心I在O_1O_2上，则O_1到面ACD、BCD的距离相等，从而A到面BCD的距离与B到面ACD的距离相等（都等于点O_1到这两个面的距离的两倍）．由$V=\frac{1}{3}Sh$得$S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}$．同理$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$．由性质2即证．

性质6　四面体有两对对棱相等的充要条件是，以这两对对棱为棱的二面角，分别

相等.

证明 在四面体 $ABCD$ 中,$AD=BC$,$AC=BD$ 的充要条件是二面角 $B-AD-C$ 等于二面角 $D-BC-A$,二面角 $B-AC-D$ 等于二面角 $A-BD-C$.

必要性($\Rightarrow$):设 θ_{AD}、θ_{BC} 分别表示二面角 $B-AD-C$、二面角 $D-BC-A$ 的平面角的大小.由 $AD=BC$、$AC=BD$,有$\triangle DAC\cong\triangle DBC$,$\triangle ABC\cong\triangle BAD$,如图 23-4.于是$\angle DAC=\angle DBC$,$\angle BAC=\angle ABD$,$\angle BAD=\angle ABC$.由三面角余弦公式(如 $\cos\theta_{AD}=\dfrac{\cos\angle BAC-\cos\angle BAD\cdot\cos\angle DAC}{\sin\angle BAD\cdot\sin\angle DAC}$)或三面角全等定理,有 $\theta_{AD}=\theta_{BC}$,即二面角 $B-AD-C$ 等于二面角 $D-BC-A$.

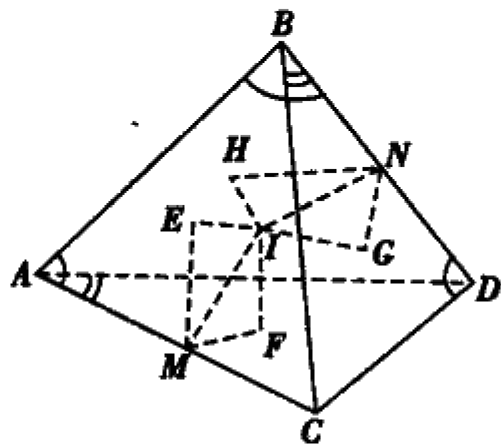


图 23-4

同理,可证二面角 $B-AC-D$ 等于二面角 $A-BD-C$.

充分性($\Leftarrow$):记 I 为四面体 $ABCD$ 的内心,从 I 向各侧面引垂线,垂足为 E、F、G、H,如图 23-4,设过 IE、IF 的平面交 AC 于 M,过 IG、IH 的平面交 BD 于 N,则$\angle EMF$,$\angle GNH$ 分别为二面角 $B-AC-D$、二面角 $A-BD-C$ 的平面角.由题设有$\angle EMF=\angle GNH$.

在 Rt$\triangle IMF$ 和 Rt$\triangle ING$ 中,$IF=IG$,$\angle IMF=\dfrac{1}{2}\angle EMF=\dfrac{1}{2}\angle GNH=\angle ING$,从而$IM=IN$.故 I 在对棱 AC、BD 的公垂线段的中垂面 α 内.

同理,I 又在对棱 AD、BC 的公垂线段的中垂面 β 内,故 I 在 α 与 β 的交线上.

作四面体 $ABCD$ 的外接平行六面体如图 23-3,知 α 与 β 的交线就是平行六面体上、下底面中心 O_1、O_2 的连线.由性质 5 即证得充分性.

性质 7 两对对棱分别相等,则四面体的内切球切侧面于第三对对棱的中垂线上.

证明 此性质即为:在四面体 $ABCD$ 中,若 $AD=BC$,$AC=BD$,则四面体 $ABCD$ 的内切球 I 切$\triangle ACD$、$\triangle BCD$于 CD 的中垂线上,切$\triangle ACB$、$\triangle ADB$ 于 AB 的中垂线上.

如图 23-5,由性质 6 的充分性证明中可推知 $O_1M=O_2N$,① 其中 O_1、O_2 为球 I 切侧面$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 的切点,M、N 为 I 在棱 AC、BD 上的射影.

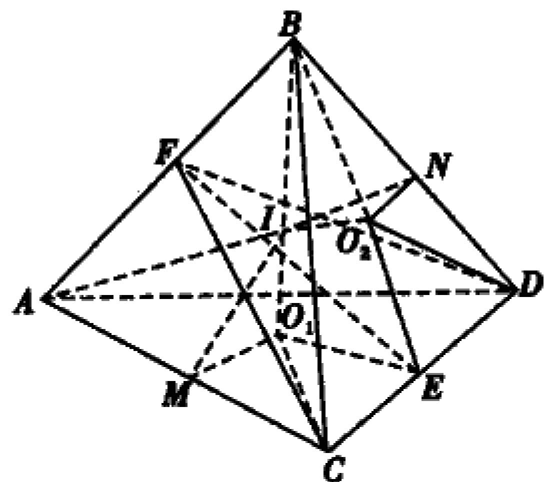


图 23-5

设过 IO_1、IO_2 的平面交 CD 于 E,连 O_1E、O_2E,则由球的切线长定理,知 $O_1E=O_2E$. ②

又由$\triangle ACD\cong\triangle BDC$ 有$\angle MCE=\angle NDE$,而 $O_1E\perp CD$,$O_2E\perp CD$,则 M、C、E、O_1 共圆,E、D、N、O_2 共圆.故$\angle MO_1E=\angle EO_2N$. ③

由①、②、③知 $ME=EN$，从而

$$O_1C=\frac{ME}{\sin\angle MCE}=\frac{EN}{\sin\angle EDN}=O_2D,$$

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle CO_1E\cong\mathrm{Rt}\triangle DO_2E\Rightarrow CE=ED$.

故 O_1E，O_2E 均是 CD 的中垂线段.

同理，球 I 切侧面 $\triangle ACB$，$\triangle ADB$ 于 AB 的中垂线上.

6. 等面四面体

我们称三组对棱分别相等的四面体为等面四面体.

为了讨论问题的方便，先引进一些记号：等腰四面体 $ABCD$ 中，设 $BC=AD=a$，$AC=BD=b$，$AB=CD=c$；设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$k^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$；以 BC、BD、CD 为棱的两侧面所成二面角的大小依次为 α、β、γ；四面体的体积记为 V，其内切、外接球半径分别记为 r、R；顶点 x 所对的面的面积记为 S_x；外切于顶点 x 所对的面，且与其余侧面的延展面相切的旁切球的半径记为 r_x.

性质1 等面四面体对棱所成角的余弦值可表示为

$$\cos(\widehat{a,a})=\left|\frac{b^2-c^2}{a^2}\right|,\cos(\widehat{b,b})=\left|\frac{c^2-a^2}{b^2}\right|,\cos(\widehat{c,c})=\left|\frac{a^2-b^2}{c^2}\right|.$$

性质2 等面四面体中，对棱中点的连线共点（此点为四面体的重心），且互相平分；连结对棱中点的每一线段均垂直于此二棱，或者说，当四面体绕这样的线段旋转180°则与本身重合；连结对棱中点的三线段彼此互相垂直.且后两个结论的逆命题也是成立的.

推论 四面体为等面四面体的充要条件是三对对棱的公垂线两两相互垂直.

性质3 设 d_a、d_b、d_c 分别为等面四面体对棱中点连线的长，则 $d_a=\sqrt{k^2-a^2}$，$d_b=\sqrt{k^2-b^2}$，$d_c=\sqrt{k^2-c^2}$.

性质4 四面体为等面四面体的充要条件是四面体各面为全等的三角形.

性质5 等面四面体所有的面角均为锐角，或者说各侧面是锐角三角形.（见本章练习题A第7题）

性质6 四面体为等面四面体的充要条件是过四面体的每一顶点的三条棱长的 m（$m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq0$）次方之和相等.

分析 只证充分性：令 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$AD=x$，$BD=y$，$CD=z$，由 $b^m+c^m+x^m=c^m+a^m+y^m=a^m+b^m+z^m=x^m+y^m+z^m$，即推得 $a=x$，$b=y$，$c=z$.

推论 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的每一顶点的三条棱长之和相等.

性质7 四面体为等面四面体的充要条件是四面体各侧面三角形边长的 m（m 为

非零实数)次方之和相等.

推论 四面体为等面四面体的充要条件是四面体各侧面三角形的周长相等.

性质 8 四面体为等面四面体的充要条件是四面体各侧面三角形的三条中线长的平方和相等.

性质 9 四面体为等面四面体的充要条件是四面体每一顶点处的三个面角之和为180°.

性质 10 四面体为等面四面体的充要条件是过每对对棱的二面角相等(即三对二面角分别相等).

性质 11 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.

性质 12 $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{2S_x^2}{3V}$(其中 x 可表示 A、B、C、D,后面亦同).

性质 13 $\frac{a^2(k^2-a^2)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{b^2(k^2-b^2)}{\cos^2\frac{\beta}{2}}=\frac{c^2(k^2-c^2)}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}=4S_x^2$.

性质 14 在等面四面体 $ABCD$ 中,$S_A=S_B=S_C=S_D=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

性质 15 四面体为等面四面体的充分必要条件是各面的面积相等.

分析 四面体的各二面角的大小分别用 α、β、γ、α'、β'、γ'表示,如图 23-6.由 $S_D\cdot\cos\alpha+S_C\cdot\cos\beta+S_B\cdot\cos\gamma=S_A$ 及 $S_D=S_C=S_B=S_A$ 有 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.

同理,有 $\cos\gamma+\cos\beta'+\cos\alpha'=1$,$\cos\alpha+\cos\beta'+\cos\gamma'=1$,$\cos\beta+\cos\alpha'+\cos\gamma'=1$.

由上推出,$\cos\alpha=\cos\alpha'$,$\cos\beta=\cos\beta'$,$\cos\gamma=\cos\gamma'$,而 $0<\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'<\pi$,所以 $\alpha=\alpha'$,$\beta=\beta'$,$\gamma=\gamma'$,由此即证.

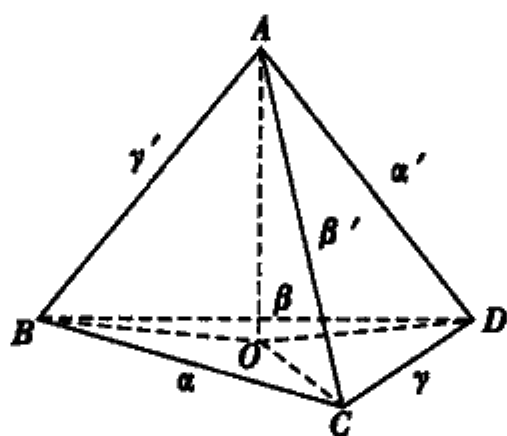


图 23-6

性质 16 等面四面体的体积

$V=\frac{1}{3}\sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)}$,其中 $k^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

分析 作四面体 $ABCD$ 的外接平行六面体,使四面体的棱成为平行六面体的侧面对角线,如图 23-7.由四面体对棱相等,可证得平行六面体侧面均为矩形,即为长方体,于是列方程组求得长方体共顶点的三条棱长分别为$\sqrt{k^2-a^2}$,$\sqrt{k^2-b^2}$,$\sqrt{k^2-c^2}$,由此即证.

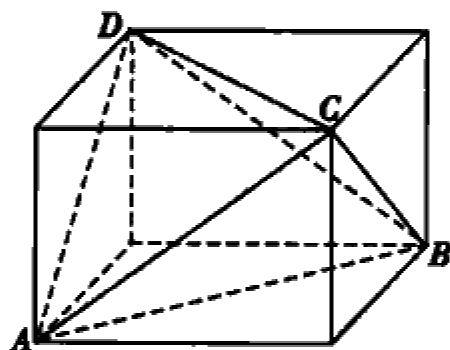


图 23-7

性质 17 记等面四面体共顶点的三个面角分别为 θ_1、θ_2、θ_3，则

$$V=\frac{abc}{3}\sqrt{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\cos\theta_3}.$$

分析 如图 23－8，设 $\angle BDC=\theta_1$，$\angle ADC=\theta_2$，$\angle ADB=\theta_3$．又设 A 点在面 BCD 内的射影为 E，作 $AH\perp CD$ 于 H，连 EH，则 $\angle AHE=\gamma$．由 $S_B=\frac{1}{2}CD\cdot AH$，有 $AH=\frac{2}{c}\cdot S_B$，则 $AE=AH\cdot\sin\gamma=\frac{2}{c}\cdot S_B\cdot\sin\gamma$．注意到

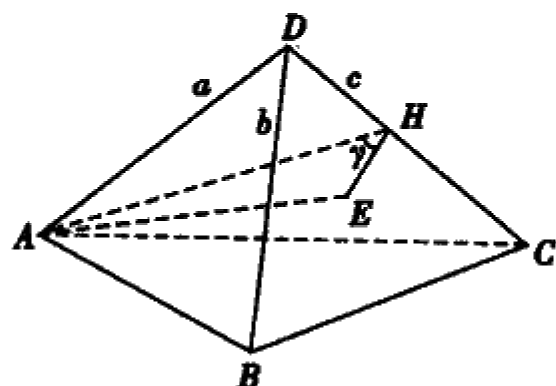


图 23－8

$$\cos\gamma=\frac{\cos\theta_3-\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2},$$

有 $V=\frac{1}{3}S_A\cdot AE=\frac{2}{3c}S_A\cdot S_B\cdot\sqrt{1-\cos^2\gamma}$．再注意 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ 及 $1-\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2-\cos^2\theta_3+2\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\cos\theta_3=-\cos(\theta_1+\theta_2)\cdot\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos^2\theta_3+[\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2)]\cdot\cos\theta_3=4\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\cos\theta_3$，$S_A=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\theta_1$，$S_B=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\theta_2$，由此即证．

性质 18 等面四面体的体积为

$$V=\frac{2}{3c}S_x^2\cdot\sin\gamma=\frac{2}{3b}S_x^2\cdot\sin\beta=\frac{2}{3a}S_x^2\cdot\sin\alpha；\text{或 } V=\frac{4}{3}S_x\cdot r.$$

性质 19 $R=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{1}{2}k.$

性质 20 $r=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$

性质 21 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的外心（外接球球心）与重心重合（见本章例 13 证明部分）．或者，四面体各顶点和外心的连线与对面的交点为该面的重心．

性质 22 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的外心与内心（内切球球心）重合．（见本章例 12）

性质 23 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的内心与重心重合．或者，各顶点和内心的连线与对面的交点为该面的重心．

推论 若四面体的外心、内心、重心中任意两个相重合，则第三个也必和它们重合．

性质 24 在等面四面体中，$r_A=r_B=r_C=r_D=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=$

$2r$.(提示:设顶点 x 到所对面的距离为 h_x,则可证 $r_x=\frac{h_x\cdot r}{h_x-2r}$,由此即推得)

性质 25 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的四条高长之和等于内切球半径的 16 倍(即 $h_A+h_B+h_C+h_D=16r$).

分析 充分性:由 $h_x=\frac{3V}{S_x}$ 及 $h_A+h_B+h_C+h_D=16r$ 有 $3V\cdot(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D})=16r$.注意到 $V=\frac{1}{3}(S_A+S_B+S_C+S_D)\cdot r$,

则 $(S_A+S_B+S_C+S_D)(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D})=16.$

而 $(S_A+S_B+S_C+S_D)(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D})\geqslant 16$,取等号是当且仅当 $S_A=S_B=S_C=S_D$.由此即证.

推论 $h_x=4r=2r_x$.

注 对外接球半径也有一条性质见本章例 13.

性质 26 四面体为等面四面体的充要条件是它的切点四面体(内切球切侧面的切点)为等腰四面体.

分析 充分性:设 O 为四面体 $ABCD$ 的内心,亦即它是切点四面体 $A'B'C'D'$ 的外心.当 $A'B'C'D'$ 为等腰四面体时,由性质 2 的推论推之.

性质 27 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的内切球与各侧面的切点为该面的外接圆圆心.

性质 28 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的重心(或外心)在各侧面内的射影为该面的外接圆圆心.

性质 29 四面体为等面四面体的充要条件是各侧面都具有相等外接圆半径的锐角三角形.

性质 30 四面体为等面四面体的充要条件是四面体各侧面外接圆半径与内切圆半径之积相等.

分析 充分性:在四面体 $ABCD$ 中,设 $BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,$DA=a_1$,$DB=b_1$,$DC=c_1$,R',r' 分别为侧面三角形外接、内切圆半径,则 $\frac{abc}{a+b+c}=2R'r'$.同理,

$\frac{ab_1c_1}{a+b_1+c_1}=\frac{a_1bc_1}{a_1+b+c_1}=\frac{a_1b_1c}{a_1+b_1+c}=2R'r'$.

由此得 $c_1(a+c)(b-b_1)+b(b_1+a)(c-c_1)=0,$

$c(c_1+b)(a-a_1)+a_1(b+a)(c-c_1)=0,$

$$b_1(b+c)(a-a_1)+a(a_1+c)(b-b_1)=0.$$

将上述三式看作以 $a-a_1, b-b_1, c-c_1$ 为未知数的三元一次方程组,它只有唯一的一个零解.即证.

性质 31 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的四条中线长相等(中线长即为四面体的每一顶点和对面重心的连结线段长).

分析 充分性:注意到中线长相等及四面体重心性质,推得重心与外心重合.

性质 32 等面四面体中线长为$\frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

性质 33 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的四条中线长的平方和等于$\frac{64}{9}R^2$.

分析 由性质 31 及 25 推导.

性质 34 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的四条高线长相等(即 $h_A=h_B=h_C=h_D$).

性质 35 等面四面体的过某棱及所对棱中点的截面,就是过此棱及与所对棱垂直的截面,也就是过此棱且平分此棱所在二面角的截面.

性质 36 在等面四面体 $ABCD$ 中,设分别过棱 BC、BD、CD 且平分 α、β、γ 的截面面积为 S_α、S_β、S_γ,则 $S_\alpha=S_x\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$, $S_\beta=S_x\cdot\cos\frac{\beta}{2}$, $S_\gamma=S_x\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$,且 $S_\alpha^2+S_\beta^2+S_\gamma^2=2S_x^2$.

性质 37 四面体为等面四面体的充要条件是其棱均作为外接平行六面体的侧面对角线时,平行六面体为长方体.

性质 38 四面体为等面四面体的充要条件是四面体在平行于两对棱的每一个平面上的射影为矩形.

性质 39 四面体为等面四面体的充要条件是四面体的展开图是一个引出了三条中位线的锐角三角形.

性质 40 四面体为等面四面体的充要条件是四面体内任意一点到各侧面的距离之和为定值.

分析 充分性:设定值为 l,取点为内心时有 $l=4r$,再取点为重心时有 $h_A+h_B+h_C+h_D=4l$,再由性质 25 即证.

7. 正四面体

称六条棱相等的四面体为正四面体.

性质 1 正四面体的每个面是正三角形.反之亦然.

性质 2 正四面体是三组对棱都垂直的等面四面体.

推论 正四面体是两组对棱垂直的等面四面体.

性质 3 正四面体的对棱中点的连线都互相垂直且相等,等于棱长的$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍.反之亦真.

性质 4 正四面体的各棱的中点是正八面体的六顶点.

性质 5 正四面体的每个三面角均是面角为60°的三面角,因而都是全等的三面角,且每个三面角的特征值均为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,即

$$S(x)=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

性质 6 正四面体的六个二面角都相等.若记其大小为 θ,则 $\theta=\arccos\frac{1}{3}$ 或 $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$.其逆命题亦成立.

性质 7 正四面体的全面积是棱长平方的$\sqrt{3}$倍,体积是棱长立方的$\frac{\sqrt{12}}{12}$倍,即

$S_{全}=\sqrt{3}a^2$, $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

推论 设 $S_{\triangle}$为侧面三角形面积,则

$a^4=8\cdot S_{\triangle}^2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}$; $a=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_{\triangle}^2}{V}\cdot\sin\theta$; $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a\cdot S_{全}$.

性质 8 正四面体的内切球与其外接球是同心球,内切球半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$(等于高线的$\frac{1}{4}$);外接球半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$;两球面面积之比为1:9.

性质 9 在各类四面体的比值 $R:r$ 中,以正四面体的比值 $R:r=3$ 为最小.

性质 10 正四面体的体积与其内切球的内接正四面体的体积之比为27.且若内切球半径为 r,则其体积为 $8\sqrt{3}r^3$.

性质 11 正四面体的四个旁切球半径均相等,等于内切球半径的2倍,即 $r_x=\frac{\sqrt{6}}{6}a$,或等于正四面体高线的一半.

性质 12 正四面体的内切球与各侧面的切点是侧面三角形的外心,或内心,或垂心,或重心.除外心外,其逆命题均成立.

性质 13 正四面体的外接球球心到四面体四顶点的距离之和,小于空间中其他任

一点到四顶点的距离之和.

分析 利用正四面体的外接球球心 O 是过四面体的一棱 AB 与对棱 CD 中点 N 的平面(共有六个这样的平面)的交点的特性,我们将指出,如果点 P(空间中任一点)不在这些平面之一上即如果它不是 O,则和 $S=PA+PB+PC+PD$ 不是最小.由此得出结论:使 S 最小的点位于所有这些平面上,因此最小值只可能在点 O 达到.

假定 P 不在平面 ABN 上,设 l 为过 P 平行于 CD 的直线,因此垂直于平面 ABN,且设 P' 为 l 和 ABN 的交点,则 $PC+PD>P'C+P'D$.① 事实上,$\triangle CPD$ 和 $\triangle CP'D$ 有相同的底和高,但后者是等腰三角形,它有较小的周长.又

$$PA>P'A,PB>P'B. \quad ②$$

因为 PA 是 $\mathrm{Rt}\triangle APP'$ 的斜边,PB 是 $\mathrm{Rt}\triangle BPP'$ 的斜边,把①和②中三个不等式加起来,得 $PA+PB+PC+PD>P'A+P'B+P'C+P'D$,这就是我们要证的.

性质 14 四面体为正四面体的充要条件是,存在五个球与四面体的六条棱或其延长线相切.

此性质的充分性证明见本章例 14.

性质 15 正四面体内任意一点到各侧面的垂线长的和等于这四面体的高.

性质 16 对于四个相异的平行平面,总存在一个正四面体,其顶点分别在这四个平面上.

性质 17 以正四面体的每条棱为直径作球,设 S 是所作六个球的交集,则 S 中含有两点,它们的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 倍棱长.

性质 18 过正四面体的一棱及所对的棱的中点的截面面积与其侧面三角形面积之比为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

性质 19 四面体为正四面体的充要条件是,其棱均作为外接平行六面体的侧面对角线时,平行六面体为正方体.

性质 20 四面体为正四面体的充要条件是,其共顶点三棱作为外接平行六面体的棱时,平行六面体为一个三面角面角均为 60°的菱形六面体.

性质 21 四面体为正四面体的充要条件是,四面体在平行于两棱的每一个平面上的射影是正方形.

性质 22 四面体为正四面体的充要条件是,四面体的展开图是一个引出了三条中位线的正三角形.

性质 23 正四面体每条高的中点与底面三角形三顶点均构成直角四面体的四顶点,且高的中点为直三面角顶点.

性质 24 正四面体是垂心四面体(四条高共点的四面体),且四面体的垂心、重心、

内心、外心这四心合一.

性质 25 设 P 为正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面上任一点，R 为该球的半径.

(Ⅰ) $\sum\limits_{i=1}^{4} PA_i^2 = 8R^2$；

(Ⅱ) 若 $B_1, B_2, \cdots, B_6$ 分别为 $A_2A_3, A_3A_4, A_2A_4, A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4$ 的中点，则 $\sum\limits_{i=1}^{4} PB_i^2 = 8R^2$；

(Ⅲ) 若 O_i 为 A_i 所对面的中心($i=1,2,3,4$)，则 $\sum PO_i^2 = \frac{40}{9}R^2$.

证明 (Ⅰ) 设 O 为正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的中心，则

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}, \text{于是} \sum_{i=1}^{4} PA_i^2 = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{PA_i}^2 = \sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OP})$$
$$= \sum_{i=1}^{4}(OA_i^2 + OP^2) - 2\overrightarrow{OP} \cdot \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i} = 8R^2.$$

(Ⅱ) 由 $\sum\limits_{i=1}^{4} \overrightarrow{OB_i} = \vec{0}$，及 $|OB_i|^2 = |OO_i|^2 + |O_iB_i|^2 = \frac{1}{3}R^2$，

有 $\sum\limits_{i=1}^{4} PB_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{4} \overrightarrow{PB_i}^2 = \sum\limits_{i=1}^{4}(\overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OP})^2 = 8R^2$.

(Ⅲ) 由 $\sum\limits_{i=1}^{4} \overrightarrow{OO_i} = \vec{0}$ 及 $|OO_i|^2 = \frac{1}{9}R^2$，

有 $\sum\limits_{i=1}^{4} PO_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{4} \overrightarrow{PO_i}^2 = \sum\limits_{i=1}^{4}(\overrightarrow{OO_i} - \overrightarrow{OP})^2 = \frac{40}{9}R^2$.

性质 26 设 Q 为正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切球面上任一点，r 为内切球半径.

(Ⅰ) $\sum\limits_{i=1}^{4} QA_i^2 = 40r^2$；

(Ⅱ) B_i 同性质 25 中所设，则 $\sum\limits_{i=1}^{4} QB_i^2 = 24r^2$；

(Ⅲ) O_i 同性质 25 中所设，则 $\sum QO_i^2 = 8r^2$.

证明 (Ⅰ) 由 $\sum\limits_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$，有 $\sum\limits_{i=1}^{4} QA_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{4}(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OQ})^2$ 即证；

(Ⅱ) 由 $\sum\limits_{i=1}^{4} \overrightarrow{OB_i} = \vec{0}$，及 $|OB_i|^2 = 3r^2$，有 $\sum\limits_{i=1}^{4} QB_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{4}(\overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OQ})^2$ 即证；

(Ⅲ) 由 $\sum\limits_{i=1}^{4} \overrightarrow{OO_i} = \vec{0}$ 及 $|OQ| = r$，有 $\sum\limits_{i=1}^{4} QO_i^2 = \sum(\overrightarrow{OO_i} - \overrightarrow{OQ})^2$ 即证.

【典型例题与基本方法】

例 1 四面体 $ABCD$ 的 4 条高 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 相交于 H 点(A_1, B_1, C_1, D_1 分别为垂足). 三条高上的内点 A_2, B_2, C_2 满足 $AA_2 : A_2A_1 = BB_2 : B_2B_1 = CC_2 : C_2C_1 = 2 : 1$. 证明 H, A_2, B_2, C_2, D_1 在同一个球面上. （第 21 届全俄竞赛题）

证明 设 M 是$\triangle ABC$ 的中线 AA_3，CC_3 的交点．下证：M，A_2，B_2，C_2，D_1 及 H 这6点在以 MH 为直径的球面上．由 $MA:A_3A=A_2A:A_1A=2:3$，以及$\angle MAA_2=\angle A_3AA_1$，知$\triangle MAA_2\backsim\triangle A_3AA_1$，所以 $MA_2/\!/A_3A_1$．因为 $AA_2\perp$面 BCD，所以 $AA_1\perp A_3A_1$，从而 $MA_2\perp A_1A$，$\angle MA_2H=90°$．同理，$\angle MB_2H=\angle MC_2H=90°$．

又 DD_1 是四面体的高，所以 $DD_1\perp MD_1$，即$\angle MD_1H=90°$．因此 M，A_2，B_2，C_2，D，H 在以 MH 为直径的球面上．

例2 设 E，F，G，H，I，J 分别是四面体 $ABCD$ 的三对对棱 AB 和 CD，AC 和 BD，AD 和 BC 的中点．试证：这六个中点在同一球面上的充要条件是这三组对棱互相垂直．

证明 如图 23－9，易见四边形 $EIFJ$ 是平行四边形，EF 与 IJ 互相平分，即 IJ 过 EF 的中点 O．同理，GH 也过 EF 的中点，故 EF，GH，IJ 共点于 O．

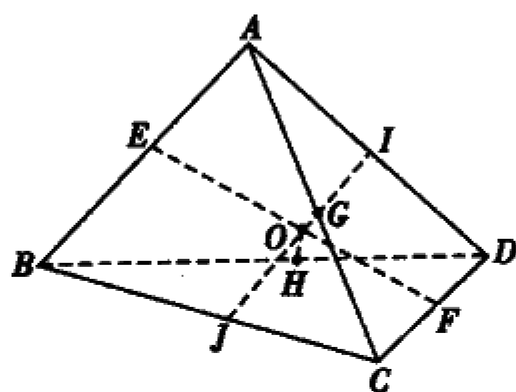


图 23－9

必要性：设这六个中点在同一球面 η 上．由 $EIFJ$ 是平行四边形，令其所在平面为 α，则 $EIFJ$ 是 α 与 η 的交线（圆）的内接平行四边形，从而是矩形，于是 $EI\perp IF$．而 $EI/\!/BD$，$IF/\!/AC$，则 $BD\perp AC$．

同理，$AD\perp BC$，$AB\perp CD$．

充分性：设 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$，$AD\perp BC$．由 $AC\perp BD$，可知 $IF\perp EI$，从而▱$EIFJ$ 是矩形，$EF=IJ$．

又 O 是 EF，IJ 的中点，则 $OE=OF=OI=OJ$．

同理，$OE=OF=OG=OH$．故以 O 为球心，OE 为半径的球面必过各棱中点．

例3 已知正三棱锥 $D-ABC$ 的各条棱长都相等，过它的高 DH 作一个平面，与三个侧面所在平面都相交，所得三条交线与底面的夹角分别为 α，β，γ．求证：$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma=12$．

证明 设所作平面与侧面 DBC，DCA，DAB 的交线分别是 DM，DN，DP，则$\angle DMH=\alpha$，$\angle DNH=\beta$，$\angle DPH=\gamma$，如图 23－10．

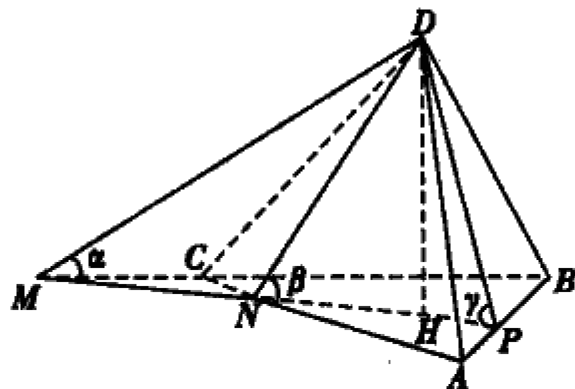


图 23－10

设 r 为正$\triangle ABC$ 的内切圆半径，则

$DH^2=DA^2-AH^2=8r^2$．

在 Rt$\triangle DMH$，Rt$\triangle DNH$，Rt$\triangle DPH$ 中，有

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma=\frac{DH^2}{MH^2}+\frac{DH^2}{NH^2}+\frac{DH^2}{PH^2}$$

$$=\frac{8r^2}{MH^2}+\frac{8r^2}{NH^2}+\frac{8r^2}{PH^2}.$$

在$\triangle ABC$所在平面中，H为其$\triangle ABC$的中心，M,N,P是过点H的任一直线与直线BC,CA,AB的交点，从H点作三边BC,CA,AB的垂线段HX,HY,HZ，则$HX=HY=HZ=r$.令$\angle MHX=\varphi,\angle NHY=\theta,\angle PHZ=\lambda$，则上述等式右边可化为

$$\cos^2\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\lambda=\frac{3}{2}.$$

而$\angle XHY=\angle YHZ=120°$，则$\varphi+\theta=120°,\theta+\lambda+120°=180°$，于是

$$\begin{aligned}\cos^2\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\lambda&=\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi+1+\cos2\theta+1+\cos2\lambda)\\&=\frac{3}{2}+(\cos2\varphi+\cos2\lambda)+\cos2\theta\\&=\frac{3}{2}+2\cdot\cos(180°-2\theta)\cdot\cos60°+\cos2\theta=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

故 $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma=12$.

例4 三棱锥$D-ABC$中，$AD=a,BD=b,AB=CD=c$，且$\angle DAB+\angle BAC+\angle DAC=180°,\angle DBA+\angle ABC+\angle DBC=180°$.求异面直线$AD$与$BC$所成的角.

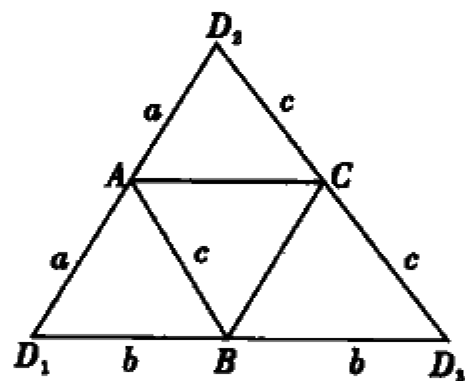


图 23-11

解 将三棱锥$D-ABC$侧面沿各条棱剪开后展在底面所在平面上，如图23-11.

由$\angle D_1AB+\angle BAC+\angle D_2AC=\angle DAB+\angle BAC+\angle DAC=180°$，知$D_1,A,D_2$三点共线.同理，$D_1,B,D_3$三点共线.

由$AD_1=AD_2,BD_1=BD_2$，知AB是$\triangle D_1D_2D_3$的中位线，即$D_2D_3=2AB=2c$.而$CD_2=CD_3=c$，从而D_2,C,D_3三点共线.

从而$\triangle ABD_1\cong\triangle BCD_3\cong\triangle ACD_2$，即三棱锥是等面四面体.由等面四面体性质1，于是异面直线AD与BC所成的角是$\arccos\dfrac{|b^2-c^2|}{a^2}$.

例5 正四面体和正四棱锥的侧面全等，因此它们的侧面可以彼此重合.试问：拼合成的多面体有几个侧面？

（第19届全俄竞赛题）

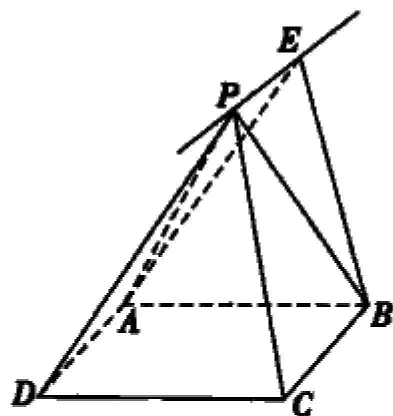


图 23-12

解 如图23-12，给定的四棱锥为$P-ABCD$，l是面PAD与面PBC的交线，点E在l上，使得$EP=AD=BC$，则$PABE$是侧面与四棱锥侧面全等的四面体.

事实上，$EP\parallel BC$且EP与BC相等，即$PEBC$是平行四边形.又$PC=BC$，故$PEBC$是菱形.同理，$PEAD$也是菱形，因此四面体$PABE$的所有棱都相

等.由上即 $EPDABC$ 是符合题设条件的多面体,它有5个侧面.

例6 四面体存在棱内切球(与六条棱都相切)的充要条件是该四面体的三组对棱之和相等.

证明 必要性:如图23-13,设四点 E,F,G,H,M,N 分别为四面体 $ABCD$ 棱内切球与各棱的切点.由球的切线长性质,从每个顶点出发的三条切线长相等.易验证,有

$AB+CD=AC+BD=AD+BC$.

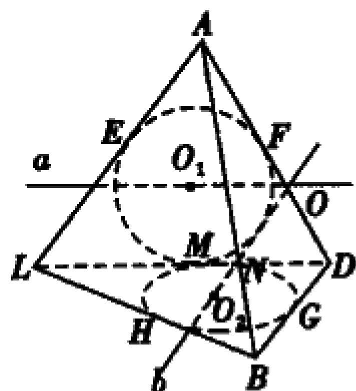


图23-13

充分性:设$\triangle ACD$ 的内切圆为$\odot O_1$,$\triangle BCD$ 的内切圆为$\odot O_2$,且 a,b 分别为过 O_1,O_2 与两面垂直的直线.下证 a,b 一定交于一点 O,为此只需证明$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 切于 CD 的同一点.

若$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 分别切 CD 于 M,N 两点,由 $AD+BC=AC+BD$,知$(AF+FD)+(BH+HC)=(AE+EC)+(BG+GD)$,即 $DF+HC=CE+DG$,即 $DM+CN=CM+DN$,所以$(DM-DN)+(CN-CM)=0$,即 $2MN=0$,亦即 M 与 N 重合.故 a,b 交于一点 O,且 O 到除 AB 外的各棱距离均相等.

同理可证,任两面的过内心的垂线交于一点,因此它们必交于点 O,而 O 到六条棱的距离相等.

注 1.类似于例6,可证得:四面体 $ABCD$ 存在面 BCD 的棱旁切球(与$\triangle BCD$ 的三边相切,且与棱 AB,AC,AD 的延长线相切的球)的充要条件是,从顶点 A 引出的任两棱之和等于两对棱之和,即有 $AB+AC=CD+BD$,$AB+AD=CD+BC$,$AC+AD=BD+BC$.

2.由例6及上述结论,我们有结论:四面体有一个棱内切球和一个棱旁切球的充要条件是,该四面体为正三棱锥(或正等腰四面体),其证明参见习题A第1题.

【解题思维策略分析】

1.注意立体几何中几个基本定理诸如三垂线定理、射影定理等的应用

例7 在四面体 $ABCD$ 中,$\angle BDC$ 是直角,由 D 到$\triangle ABC$ 所在的平面的垂线的垂足 H 是$\triangle ABC$ 的垂心.证明:$(AB+BC+CA)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2)$,并指出对于哪一种四面体,上面的等号成立. (IMO-12试题)

证明 如图23-14,分别连结 AH,CH,延长后交 BC,AB 于 E,F.

因为 H 为$\triangle ABC$ 的垂心,所以 $AB\perp CF$.CH 是 CD 在平面 ABC 内的射影,$CH\subset CF$,故由三垂线定理知 $AB\perp CD$.

又 $CD\perp BD$,所以 $CD\perp$面 ABD,从而 $CD\perp AD$.

再由 $BC\perp AE$,及三垂线定理知 $BC\perp AD$,则 $AD\perp$面 BCD,从而又有 $AD\perp BD$.

因此四面体 $ABCD$ 是直角四面体，于是有 $AD^2+BD^2=AB^2$，$BD^2+CD^2=BC^2$，$CD^2+AD^2=CA^2$. 三式相加，有

$6(AD^2+BD^2+CD^2)=3(AB^2+BC^2+CA^2)$.

但 $3(AB^2+BC^2+CA^2)\geqslant(AB+BC+CD)^2$, (＊)

故 $(AB+BC+CA)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2)$.

由于(＊)式中等号当且仅当 $AB=BC=CA$，即$\triangle ABC$ 为正三角形时取得，故所证不等式中的等号当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

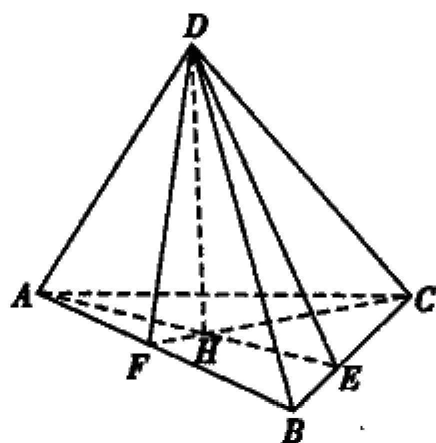


图 23－14

例 8 (1)证明：如果给定四面体的六个二面角(即两面之间)相等，那么，这个四面体一定是正四面体.

(2)如果五个二面角相等，这个四面体一定是正四面体吗？

(第 7 届美国奥林匹克题)

解 (1)设四面体 $ABCD$ 的六个二面角都相等，易知各二面角的度数小于 90°，因此，四面体 $ABCD$ 的每个顶点在对面的射影应在对面的三角形内，如图 23－15. 设 A 在$\triangle BCD$ 所在平面的射影为 O，作 $OE\perp BC$ 于 E，作 $OF\perp CD$ 于 F，连 AE，AF，则$\angle AEO=\angle AFO$.

由 $\mathrm{Rt}\triangle AEO\cong\mathrm{Rt}\triangle AFO$，有 $AE=AF$.

又由三垂线定理，知 $AE\perp BC$，$AF\perp CD$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ACE\cong\mathrm{Rt}\triangle ACF$，故$\angle ACB=\angle ACD$.

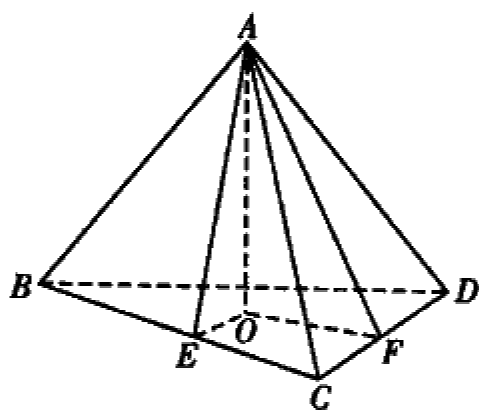


图 23－15

同理，$\angle BCD=\angle ACD$. 故$\angle ACB=\angle ACD=\angle BCD$. 即过顶点 C 的三个面角均相等.

同理，这四面体 $ABCD$ 的其余三个顶点的三面角的面角均相等，设顶点 A,B,C,D 的相等的各面角记为 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. 由 $\alpha+\beta+\gamma=180°=\alpha+\beta+\delta$，得 $\gamma=\delta$. 同理 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$，即各面为正三角形，结论获证.

(2)如果有五个二面角相等，还不一定是正四面体. 例如，作四面体 $ABCD$，使$\angle ABC=\angle CBD=\angle DBA=\angle ACB=\angle DCA=40°$，$\angle BAD=\angle CAD=\angle CDA=\angle BDA=70°$，$\angle BAC=\angle BDC=100°$，这样的四面体显然存在，且除二面角 $B-AD-C$ 外，其他五个二面角都相等，但不是正四面体.

例 9 四面体的内切球与三个界面的切点分别是它们的内心、垂心和重心. 证明：该四面体是正四面体.

(第 23 届全俄竞赛题)

证明 如图 23－16，设 O 是内切球心，O_1 是$\triangle ABC$ 的内心，H 是$\triangle ACD$ 的垂心，M 是$\triangle ABD$ 的重心，O_1,H,M 是内切球与四面体的切点.

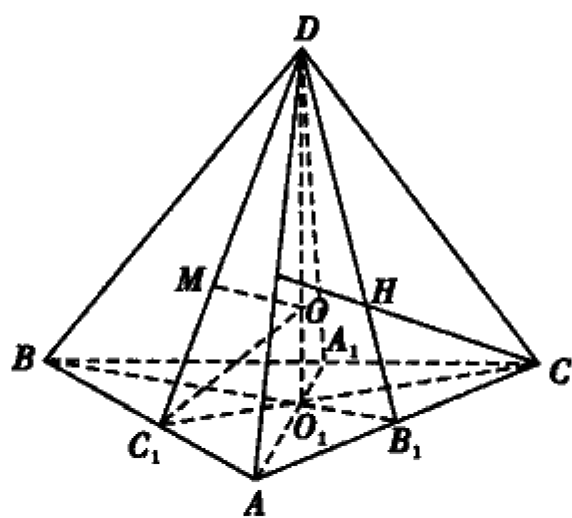


图 23－16

设$\triangle ABC$的内切圆O_1切三角形的边BC,CA,AB分别于A_1,B_1,C_1，则$O_1A_1=O_1B_1=O_1C_1$.因此，$Rt\triangle OO_1A_1\cong Rt\triangle OO_1B\cong Rt\triangle OO_1C_1$.由此得$\angle OA_1O_1=\angle OB_1O_1=\angle OC_1O_1=\varphi$.同时$O_1A_1\perp BC$，所以由三垂线定理，知$OA_1\perp BC$，即面$BOC$与面$BO_1C$的夹角为$\varphi$.

另一方面，面BOC是面BDC与面BAC所成的二面的平分面（O是内切球心），所以面BDC与面BAC所成的二面角为2φ.同理，面ADC，面ADB分别与底面ABC所成的二面角均为2φ.因此，点O在底面ABC的射影O'与边AB,BC和CA的距离分别相等.又点O',C在AB的同侧；点O',B在AC同侧；点O',A在BC同侧，所以$O'=O_1$，即DO_1是四面体的高.

因为$AB\perp O_1C_1$和$AB\perp DO_1$，所以$AB\perp$面DO_1C_1.过O点分别向DB_1和DC_1引垂线OH_1和OM_1，那么$OH_1\perp$面ADC.因为$OH_1\perp DB_1$及$OH_1\perp AC$（$AC\perp$面DO_1B_1），即是说$H_1=H$，即$H\in DB_1$.同理，$OM_1\perp$面ADB，即$M_1=M$，亦即$M\in DC_1$，于是直线DM同时是$\triangle ADB$的中线和高，因此$AD=DB$，进而$AO_1=BO_1$，因此，$AC=BC$，于是C,O_1,C_1在一直线上.

由三垂线定理，$CO\perp AD$（$AB\perp$面ADC，$CH\perp AD$），此外，$CO\perp AB$（$AB\perp$面CDC_1），所以$CO\perp$面ADB.由于$OM\perp$面ADB，所以点O在CM上，由此得点M是$\triangle ADB$的内心.考察$\triangle CDC_1$，DO_1和CM分别是它的高，C_1O是角平分线，所以$C_1O=C_1C$，由此得$C_1O_1:O_1C=C_1M:MD=1:2$，$\triangle ABC$和$\triangle ADB$的内心分别是它们的重心，所以$\triangle ABC$和$\triangle ADB$都是正三角形.

由上知，棱锥的高过底面正$\triangle ABC$的中心，所以四面体是正的.

2. 析取平面图形，突出问题的平面特征

例 10 已知正三棱锥$S-ABC$的高$SO=3$，底面边长为6，过A点向它所对的侧面SBC作垂线，垂足为O'，在AO'上取点P，使$AP:PO'=8$.求过P点且平行于底面的截面的面积.

（1989年全国高中联赛题）

解 如图23－17，取BC中点D，由正三棱锥的性质，知O'在SD上.O为$\triangle ABC$的重心，故O在AD上.可以析取$\triangle SAD$进行考察，设过P平行于底面的截面α交SD于R，因$\frac{\text{截面}\alpha\text{的面积}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{SR^2}{SD^2}$，故只须求出$SR$与$SD$的比即可求出截面$\alpha$的面积.

而$SR:SD$可通过具体计算SD与RD获得.事实上，$SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=2\sqrt{3}$，

$\frac{RD}{O'D}=\frac{PA}{O'A}=\frac{8}{9}$, $RD=\frac{8}{9}O'D$.

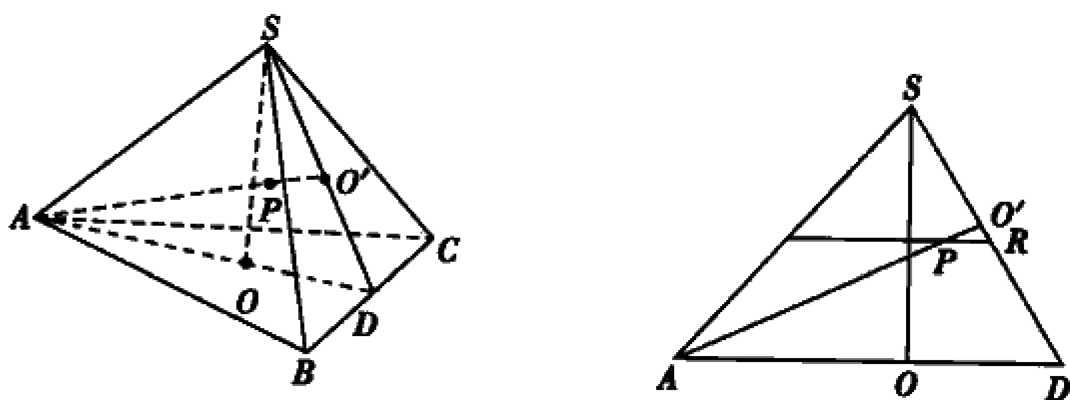


图 23-17

又$\frac{O'D}{AD}=\frac{OD}{SD}$, $O'D=\frac{OD}{SD}\cdot AD=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,从而 $RD=\frac{4}{3}\sqrt{3}$, $SR=SD-RD=\frac{2}{3}\sqrt{3}$,故所求截面面积为$\sqrt{3}$.

例 11 四个半径为 1 的球彼此相切,三个在地板上,第四个在它们上面,一个边长为 S 的四面体的面与这些球都相切,求 S.

(IMO-29 预选题)

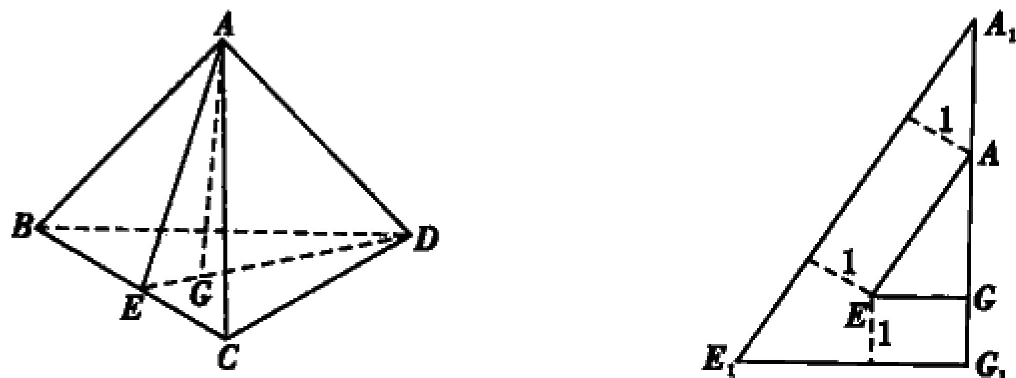


图 23-18

解 四个球的球心是边长为 2 的正四面体的顶点.设该四面体为 $ABCD$,过 A 的高交底面 BCD 于 G,则 G 为$\triangle BCD$ 的重心.取 BC 的中点 E,析出平面图形$\triangle AEG$,如图 23-18.

与球都外切的四面体各面到球心四面体 $ABCD$ 相应各面的距离皆为 1,仍然是一个正四面体.于是,将$\triangle AEG$ 扩展为该四面体中相应的$\triangle A_1E_1G_1$,这只须分别作 $A_1E_1 /\!/ AE$, $E_1G_1 /\!/ EG$,平行线间距离皆为 1,即得$\triangle A_1E_1G_1$,通过$\triangle AEG$ 求出$\triangle A_1E_1G_1$ 的边,从而求出 S.

事实上,易见 $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\sqrt{3}$, $EG=\frac{1}{3}AE=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $AG=\sqrt{AE^2-EG^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$, $\frac{A_1A}{AE}=\frac{1}{EG}$, $A_1A=\frac{AE}{EG}=3$, $A_1G_1=A_1A+AG+GG_1=4+\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

又$\frac{A_1G_1}{A_1E_1}=\frac{A_1G_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}S}=\frac{AG}{AE}$,得 $S=\frac{A_1G_1\cdot AE}{\frac{\sqrt{3}}{2}AG}=2+2\sqrt{6}$.

例 12 四面体 $ABCD$ 的外接球及内切球两球有共同的中心 O,H 为$\triangle ABC$ 的垂心,H'为 D 在平面 ABC 上的射影.求证:$ABCD$ 为等面四面体,且 $OH=OH'$.

(1985 年英国竞赛题)

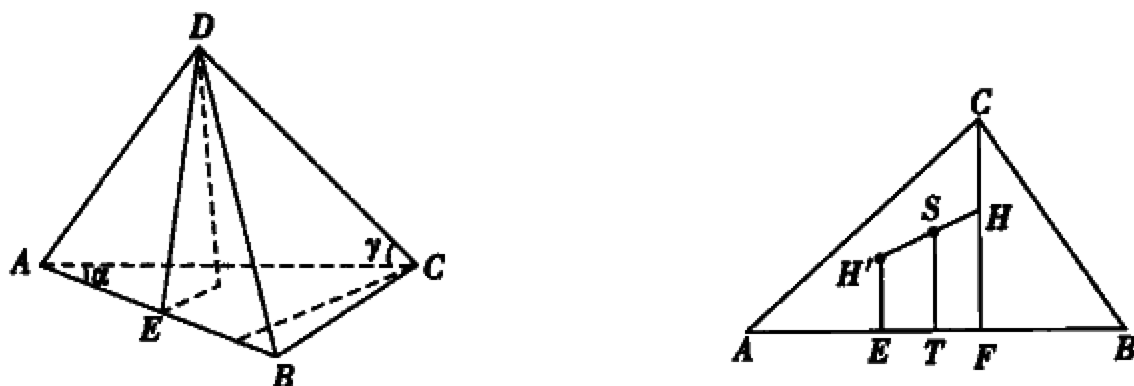


图 23-19

证明 如图 23-19,设 r,R 分别为四面体 $ABCD$ 内切、外接球半径,O'为内切球与面 ABC 的切点.

在 Rt$\triangle OO'A$ 中,$O'A=\sqrt{R^2-r^2}$,这样的点 O'与面 ABC 的各顶点等距离,所以 O'点即为$\triangle ABC$ 的外心,由此即知四面体各面外接圆半径为$\sqrt{R^2-r^2}$,它们的圆心皆在各面内,故各面皆为锐角三角形.在$\triangle ABC$ 与$\triangle CBD$ 中,由正弦定理,有

$$\sin\angle BAC=\frac{BC}{2\sqrt{R^2-r^2}},\sin\angle BDC=\frac{BC}{2\sqrt{R^2-r^2}},\text{所以}\sin\angle BAC=\sin\angle BDC,$$

而 $0<\angle BAC,\angle BDC<\frac{\pi}{2}$,故$\angle BAC=\angle BDC=\alpha$.同理,$\angle ABC=\angle ADC=\beta$,$\angle ACB=\angle ADB=\delta$,$\angle ABD=\angle ACD=\gamma$,$\angle BAD=\angle BCD=\varepsilon$,$\angle CAD=\angle CBD=\varphi$,所以 $\alpha+\beta+\delta=\pi$,$\beta+\gamma+\varphi=\pi$,从而 $\alpha+2\beta+\delta+\gamma+\varphi=2\pi$.

又 $\gamma+\delta+\varepsilon=\pi$,$\alpha+\varepsilon+\varphi=\pi$,从而 $\alpha+\delta+\gamma+2\varepsilon+\varphi=2\pi$.

由上得 $\beta=\varepsilon$,故$\angle ABC=\angle BCD$,所以锐角$\triangle ABC$ 和锐角$\triangle DCB$ 全等.

同理,四面体 $ABCD$ 的任两个侧面全等.故四面体 $ABCD$ 为等面四面体.

作 $DE\perp AB$ 于 E,$CF\perp AB$,则 Rt$\triangle ADE\cong$Rt$\triangle BCF$,从而 $AE=BF$.

析取底面$\triangle ABC$,设 HH'中点为 S,作 $ST\perp AB$ 于 T,则 $ET=TF$,所以 $AT=BT$.故 S 在 AB 的中垂线上.

同理,S 在 AC,BC 的中垂线上,所以 S 为$\triangle ABC$ 的外心,因此 S 即为四面体 $ABCD$ 的外接球球心 O 在面 ABC 上的射影 O'(O 也是四面体 $ABCD$ 内切球球心,O'也是此内切球与面 ABC 的切点).

因为 $OO'\perp$ 面 ABC，$OO'\perp H'H$，所以 $OH=OH'$.

注 此题前半部分的条件也是必要的，由此即证等面四面体性质 22.

3. 运用类比、转化，寻找数量关系比较集中的解剖图作为突破口

例 13 四面体 $ABCD$ 的三组对棱长分别为 a 与 a'，b 与 b'，c 与 c'，其外接球半径为 R. 试证：$16R^2=a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2$ 的充要条件是 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$.

证明 如图 23-20，设 O，G 分别为四面体 $ABCD$ 的外心和重心，延长 AG 交面 BCD 于 M，延长 BM 交 CD 于 E，并记 $AB=a$，$CD=a'$，$AC=b$，$BD=b'$，$AD=c$，$BC=c'$. 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中应用中线长公式，在 $\triangle ABE$ 中由斯特瓦尔特定理，有 $AE^2=\frac{1}{4}\cdot[2(b^2+c^2)-a'^2]$，$BE^2=\frac{1}{4}[2(b'^2+c'^2)-a'^2]$，$AM^2=\frac{1}{9}\cdot[3(2AE^2+a^2)-2BE^2]$，得 $AM^2=\frac{1}{9}[3(a^2+b^2+c^2)-(a'^2+b'^2+c'^2)]$.

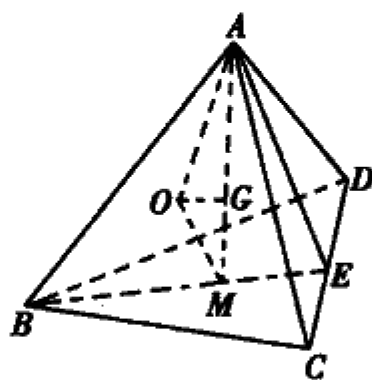


图 23-20

又 $OM^2=\frac{1}{9}[9R^2-(a'^2+b'^2+c'^2)]$.

在 $\triangle AOM$ 中，由斯特瓦尔特定理有

$$OG^2=\frac{1}{16}[4(3OM^2+R^2)-3AM^2]=\frac{1}{16}[16R^2-(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)].$$

因此 O 与 G 重合 $\Leftrightarrow 16R^2=a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2$.

若 O 与 G 重合，有 $AG:GM=3:1$，$AG^2=(\frac{3}{4}AM)^2=\frac{1}{16}[3(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)-4(a'^2+b'^2+c'^2)]$. 同理，有

$$BG^2=\frac{1}{16}[3(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)-4(a'^2+b^2+c^2)],$$

$$CG^2=\frac{1}{16}[3(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)-4(a^2+b'^2+c^2)],$$

$$DG^2=\frac{1}{16}[3(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)-4(a^2+b^2+c'^2)].$$

注意到 $AG=BG=CG=DG=R$，得 $b'^2+c'^2=b^2+c^2$，$a'^2+c'^2=a^2+c^2$，$a'^2+b'^2=a^2+b^2$，故有 $c=c'$，$a=a'$，$b=b'$.

反之，把 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$ 代入(*)式，即证.

例 14 设一个四面体 $SABC$ 具有如下性质：存在五个球和它的棱 SA，SB，SC，AB，BC，CA 或其延长线相切. 求证：(Ⅰ) $SABC$ 是正四面体；(Ⅱ)反之，对每一个正四面体都有这样的五个球存在.

(IMO-7 试题)

证明 如图 23 - 21,设球$\sum$和四面体 $SABC$ 的六条棱或其延长线相切,则$\sum$和四面体 $SABC$ 各侧面各截成一个圆,这圆是对应面上三角形的内切圆或旁切圆,而且与某一棱相邻的两个面上的圆切于该棱上同一点.

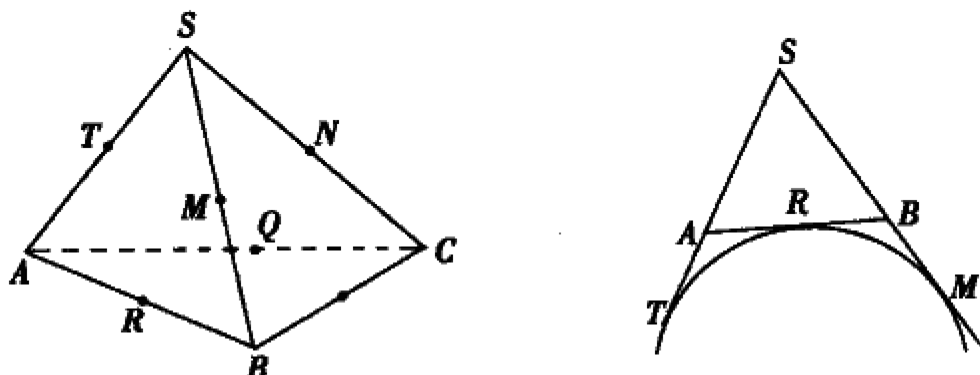


图 23 - 21

(Ⅰ)考虑以下两种可能情况:

(a)球和六条棱所在线的切点都在棱上.这时球面$\sum$必过某一面如$\triangle ABC$ 内切圆与三边的切点 P,Q,R,而且还通过$\triangle SAB$ 内切圆与 SA 的切点 T.由于 P,Q,R,T 不在同一直线上,故 T 与 P,Q,R 不共面,过 D,Q,R,T 可确定一个唯一的外接球,所以在这一情况下,球是唯一的.

(b)若球与一边的切点在四面体外,可证明这样的球不超过四个,且每一面对应一球.

设 $SA=a'$, $SB=b'$, $SC=c'$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$,并设 T,M,N,P,Q,R 是在情况(a)下球和这六条棱的切点,则 $ST=SM=SN$, $AT=AQ=AR$, $BM=BP=BR$, $CN=CP=CQ$.又 $AT+TS=AS$, $BP+PC=BC$, $\cdots$,故 $a'+a=b'+b=c'+c$.

现在考察在情况(b)下对应于$\triangle SAB$ 那一面的球.这时,$ST-AT=SA$, $SM-BM=SB$, $AR+RB=AB$,而且 $SN-CN=SC$, $BP+PC=BC$, $AQ+QC=AC$,从而 $a'-a=b'-b=c-c'$,于是得 $a'=b'=c$, $a=b=c'$.

再考察对应于$\triangle ABC$ 那一面的球,可得 $a=b=c$,所以 $a'=b'=c'=a=b=c$,即 $SABC$ 是一个正四面体.

(Ⅱ)设 $SABC$ 是正四面体,G 是它的重心(若 E,F 分别是 AS 和 BC 的中点,则 G 是 EF 的中点),G 点和各条棱等距离,故可作一内切球.

如果以 SG 为轴,把 $SABC$ 旋转 $120°$,则 S,G 两点不变,A 移至 B,B 移至 C,C 移至 A,故原四面体和经过这样变换的四面体是一样的.由此知以 SG 上任意一点为中心的球若与 SA 相切,亦必与 SB,SC 的延长线相切;若与 AB 相切,亦必与 AC,BC 相切.

在对应于$\triangle SAB$ 的平面上,作$\angle SAB$ 的外角平分线,过此线作平面使垂直于含$\triangle SAB$ 的平面.若 X 是所作平面和 SG 的交点,则 X 和 SA,AB 等距离,以 X 为球心可作一个适合情况(b)的球.另三个适合情况(b)的球可以同样作出.

例 15 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一四面体，S_1,S_2,S_3,S_4 分别是以 A_1,A_2,A_3,A_4 为球心的球，它们两两相切．如果存在一点 Q，以这点为球心可以作一个半径为 r 的球与 S_1,S_2,S_3,S_4 都相切，还可以作一个半径为 R 的球与四面体的各棱都相切．求证：这个四面体是正四面体．（CMO－2 试题）

证法 1 把问题类比到平面上来考虑："$\triangle A_1A_2A_3$ 中，S_1,S_2,S_3 分别是以 A_1,A_2,A_3 为圆心的圆，它们两两相切．如果存在一点 O，以这点为圆心可以作一个半径为 r 的圆与 S_1,S_2,S_3 都相切，还可以作一个半径为 R 的圆与 $\triangle A_1A_2A_3$ 的各边相切，则 $\triangle A_1A_2A_3$ 是正三角形．"

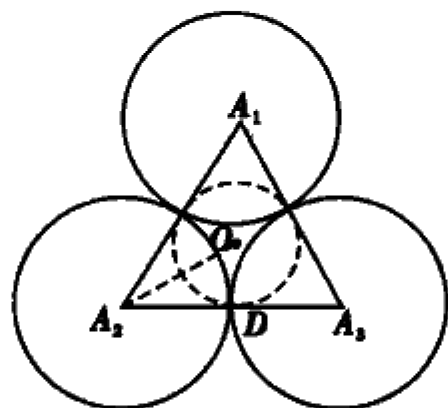


图 23－22

考察这个命题，先设 S_1,S_2,S_3 两两外切．(i)若$\odot O(r)$与 S_1,S_2,S_3 均外切，如图 23－22，设$\odot O(R)$为$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆，与 A_2A_3 切于 D．令 S_1,S_2,S_3 的半径分别为 r_1,r_2,r_3，若 $A_2D>r_2$，即$\sqrt{(r+r_2)^2-R^2}>r_2\Rightarrow A_3D<r_3$，即$\sqrt{(r+r_3)^2-R^2}<r_3\Rightarrow\sqrt{(r+r_1^2)-R^2}>r_1\Rightarrow\sqrt{(r+r_2)^2-R^2}<r_2$，矛盾．同样 $A_2D<r_2$ 不成立．故$\sqrt{(r+r_2)^2-R^2}=r_2$，即 $r(r+2r_2)=R^2$．同理 $r(r+2r_3)=r(r+2r_1)=R^2\Rightarrow r_1=r_2=r_3$，从而$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形．(ii)若$\odot O(r)$与 S_1,S_2,S_3 均内切，类似于(i)仍可证明$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形．如果 S_1,S_2,S_3 中有一对外切，两对内切，则易证点 O 必在$\triangle A_1A_2A_3$ 外，过 O 不能作它的内切圆，因而命题的条件不成立．

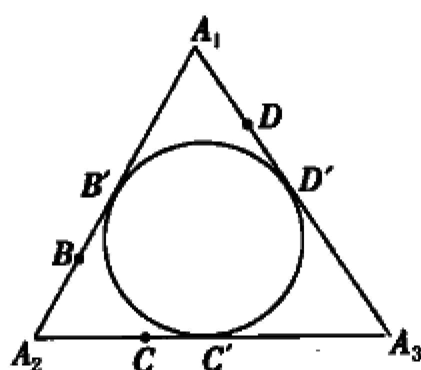
现在考虑原命题．S_1,S_2,S_3,S_4 两两外切时，用完全类似的方法可推得$\triangle A_1A_2A_3$，…，$\triangle A_2A_3A_4$ 皆为正三角形，故四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体．若 S_1,S_2,S_3,S_4 不两两外切，类似于上面的讨论也可知不能作出球 $Q(R)$与六条棱相切．

证法 2 先考虑以 O 为球心，半径为 r 的球面 P 与 S_1,S_2,S_3,S_4 都外切的情形．设球面 S_1,S_2,S_3,S_4 的半径分别为 r_1,r_2,r_3,r_4，球面 S_1,S_2,S_3 两两外切的切点为 B，C，D，则 B,C,D 必分别在 A_1A_2,A_2A_3,A_3A_1 上，且有 $A_1B=A_1D=r_1$，$A_2B=A_2C=r_2$，$A_3C=A_3D=r_3$，如图 23－23．

而面 $A_1A_2A_3$ 截以点 O 为球心且半径为 R 的球面 Q 所得的截面圆 $B'C'D'$ 是$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆，它在 A_1A_2,A_2A_3,A_3A_1 上的切点分别为 B',C',D'，从而 $A_1B'=A_1D'$，$A_2B'=A_2C'$，$A_3D'=A_3C'$．因为 $A_1A_2=A_1B+BA_2=A_1B'+B'A_2$，

$A_2A_3=A_2C+CA_3=A_2C'+C'A_3$，$A_3A_1=A_3D+DA_1=A_3D'+D'A_1$，

所以 $A_1B=\frac{1}{2}(A_1A_2+A_1A_3-A_2A_3)$，$A_1B'=\frac{1}{2}(A_1A_2+A_1A_3-A_2A_3)$．



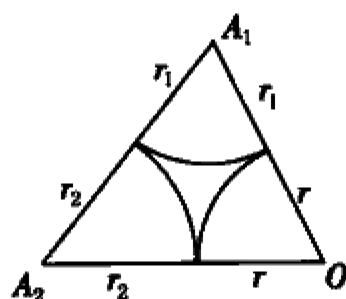


图 23－23

又 B 和 B' 都是 A_1A_2 的内点，所以 $B=B'$.

同理 $C=C'$，$D=D'$. 这表明，球面 S_1，S_2，S_3，S_4 两两外切的切点与球面 Q 和各棱的切点分别重合.

下面通过计算来证明四面体各面均为正三角形. 过点 A_1，A_2 和 O 作截面如图. OB 是球面 S_1 和 S_2 的公切线，且 $OB=R$，则由切割线定理，有 $R^2=r(r+2r_1)=r(r+2r_2)$，则 $r_1=r_2$. 同理 $r_1=r_2=r_3=r_4$. 从而 $A_1A_2=A_1A_3=A_1A_4=A_2A_3=A_2A_4=A_3A_4$. 即四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体，至于球 P 与球面 S_1，S_2，S_3，S_4 都内切的情形，证明是类似的，故原题得证.

【模拟实战】

习题 A

1. 试证：四面体有一个棱内切球和一个棱旁切球的充分必要条件是该四面体为正三棱锥（或正等腰四面体）.
2. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$SA=SB=SC=2$，$AB=2$，设 S，A，B，C 四点均在以 Q 为球心的某个球面上，则点 O 到平面 ABC 的距离为______.（1997 年全国高中联赛题）
3. 一个球与正四面体的六条棱都相切，若正四面体的棱长为 a，则这个球的体积是______.（2000 年全国高中联赛题）
4. 已知将给定的两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，恰得到一个所有二面角都相等的六面体，并且该六面体的最短棱长为 2，则最远的两顶点间的距离是______.（1996 年全国高中联赛题）
5. 正四面体 $ABCD$ 中，E 在棱 AB 上，F 在棱 CD 上，使得 $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}=\lambda\ (0<\lambda<+\infty)$，

记 $f(\lambda)=\alpha_\lambda+\beta_\lambda$，其中 α_λ 表示 EF 与 AC 所成的角，β_λ 表示 EF 与 BD 所成的角，则(　　).　　(1997 年全国高中联赛题)

A. $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加

B. $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少

C. $f(\lambda)$ 在 $(0,1)$ 单调增加，在 $(1,+\infty)$ 单调减少

D. $f(\lambda)$ 在 $(1,+\infty)$ 为常数

6. 设点 E,F,G 分别是正四面体 $ABCD$ 的棱 AB,BC,CD 的中点，则二面角 $C-FG-E$ 的大小是(　　).

A. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{2}$

C. $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\pi-\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 一个给定的四面体是等面的，即 $AB=CD,AC=BD,AD=BC$. 证明：这个四面体的各面都是锐角三角形.(见本章等面四面体性质 5)

8. 设直角四面体 $PABC$(即 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$)的六条棱长之和为 S，试求(并证明)其最大体积.　　(第 5 届美国奥林匹克题)

9. 在棱长都相等的四面体 $ABCD$ 中，E,F 分别为 AD,BC 的中点，连 AF,CE.(Ⅰ)求异面直线 AF 与 CE 所成的角；(Ⅱ)求 CD 与面 BCD 所成的角.

10. 正四面体 $ABCD$ 的四顶点在同一球面上，CC' 和 DD' 是该球的直径，求平面 ABC 与平面 $AC'D'$ 所成的角.

11. 甲烷分子(CH_4)的空间结构为一正四面体，碳原子位于该四面体的中心，四个氢原子分别位于该四面体的四个顶点上.若碳原子和氢原子间的距离都是 a，则以四个氢原子为顶点的这个正四面体的体积是多少?

12. 将正四面体的每一条棱都三等分，过每一个分点作两个平面，分别平行于四面体中不过这个分点的两个侧面.试问，这些平面将四面体分成多少部分?

(第 26 届莫斯科竞赛题)

13. 在正四面体中，过每条棱及其对棱的中点作六个平面.试确定这些平面将四面体分成几个部分? 并且当四面体体积为 1 时，求每个部分的体积.

(1974 年民主德国竞赛题)

14. 在四面体 $ABCD$ 中，棱 AD,BD 和 CD 互相垂直，它们的长分别为 a,b,c. 证明：对 $\triangle ABC$ 的一条边上的任意一点 M，从顶点 A,B,C 到直线 DM 的距离之和 S 满足 $S\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$，并确定等式何时成立.　　(1983 年民主德国竞赛题)

15. 能否在棱长为 1 的正方体形状的盒子里放入三个互不相交的棱长为 1 的正四面体?

习题 B

1. 一个正四面体的棱长为 1,用它的每条棱为直径作球,设 S 是所作的六个球的交集.证明:S 中含有两个点,它们的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}$. (IMO-26 预选题)
2. 设 O 为正四面体 $ABCD$ 的中心,点 E 在面 ABC 上,E 在其他三个面上的射影分别为 F、G、H.证明:OE 通过$\triangle FGH$ 的重心 Q.
3. 证明:一个正四面体的外接球中心到四个顶点的距离之和,小于空间中其他任意一点到这四个顶点的距离之和. (IMO-8 试题)
4. 点 G 是正四面体 $ABCD$ 的内切球球心,点 O 是四面体内部一点,直线 OG 与四面体各侧面所在的平面分别相交于 A',B',C',D'.证明:$\frac{A'O}{A'G}+\frac{B'O}{B'G}+\frac{C'O}{C'G}+\frac{D'O}{D'G}=4$.
5. 证明:空间中一点到棱长为 2 的正四面体四个顶点的距离都是整数的必要且充分条件是,该点是这个四面体的一个顶点.
6. 在正四面体 $ABCD$ 的底面 ABC 中取一点 M,使得外接于四面体 $ABMD$,$BCMD$,$CAMD$ 的球的半径相等.证明:DM 是四面体 $ABCD$ 的高.

第二十四章　三面角的性质及应用

【基础知识】

我们称有公共端点 S 并且不在同一平面内的 n 条射线 $SA,SB,SC,\cdots,SK$，以及相邻两条射线间的平面部分组成的图形，叫做以 S 为顶点的多面角，记作 $S-ABC\cdots K$，射线 $SA,\cdots,SK$ 叫做多面角的棱，相邻两棱间的角叫做多面角的面角，相邻的两个面组成的二面角叫做多面角的二面角.

将多面角的任何一个面伸展为平面，如果其他各面都在这个平面的同侧，这样的多面角叫做凸多面角.

最简单的多面角是三面角.显然三面角总是凸的.下面介绍三面角 $S-ABC$ 的一系列有趣的性质.

性质 1　用三个小于 π 的正角作为面角，构成一个三面角的充要条件是：这三个面角的和小于 2π，并且其中一个面角小于其他两面角的和，大于其他两面角的差.

推论　凸多面角的所有面角和小于 2π.

性质 2　若 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$，且 $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$，那么以 α,β,γ 为面角构成一个三面角的充要条件是 $\cos(\alpha+\beta)<\cos\gamma<\cos(\alpha-\beta)$.

证明　必要性：在三面角 $S-ABC$ 中，$\angle ASB=\alpha$，$\angle ASC=\beta$，$\angle BSC=\gamma$，在 SA 上取 $SP=1$，过 P 作 SA 的垂面与 SB,SC 分别交于 Q,H，连 PQ,PH,QH.令 $\angle QPH=\varphi$，则 $PQ=\tan\alpha$，$PH=\tan\beta$，$SQ=\sec\alpha$，$SH=\sec\beta$.由 $QH^2=\tan^2\alpha+\tan^2\beta-2\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\cos\varphi$ 与 $QH^2=\sec^2\alpha+\sec^2\beta-2\sec\alpha\cdot\sec\beta\cdot\cos\gamma$ 相减，整理得

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi.$$

由题设各角的取值范围，从而有 $\cos(\alpha+\beta)<\cos\gamma<\cos(\alpha-\beta)$.

充分性：不妨设 $\alpha\geqslant\beta$，则 $0\leqslant\alpha-\beta<\pi$.当 $\alpha+\beta\geqslant\pi$ 时，$\gamma,\alpha-\beta\in[0,\pi)$，且 $\cos\gamma<\cos(\alpha-\beta)$，则 $\gamma>\alpha-\beta$.

故 $\alpha-\beta<\gamma<\alpha+\beta$.

当 $0<\alpha+\beta<\pi$ 时，$\gamma,\alpha-\beta,\alpha+\beta\in[0,\pi)$.由条件即有 $\alpha-\beta<\gamma<\alpha+\beta$.

由性质 1 知，以 α,β,γ 为面角可构成三面角.

性质 3　三面角的三个面角分别记为 α,β,γ，它们所对的二面角分别记为 $\theta_\alpha,\theta_\beta$，

θ_γ(以下均同).则有 $\cos\theta_\alpha=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.

还有两式略(以下对称式均略).

证明 如图 24-1,设三面角 $P-EFH$ 中,$\angle EPH=\alpha$,$\angle EPF=\beta$,$\angle FPH=\gamma$,取 $PA=PB=1$,作 $AC\perp PF$(或反向延长线)于 C,作 $BD\perp PF$(或反向延长线)D,则 AC 与 BD 所成的角就是面角为 α 所对二面角的大小 θ_α,且 $PC=\cos\beta$,$AC=\sin\beta$,$PD=\cos\gamma$,$BD=\sin\gamma$,$CD=|PD-PC|=|\cos\gamma-\cos\beta|$.由异面直线上两点间距离公式,有

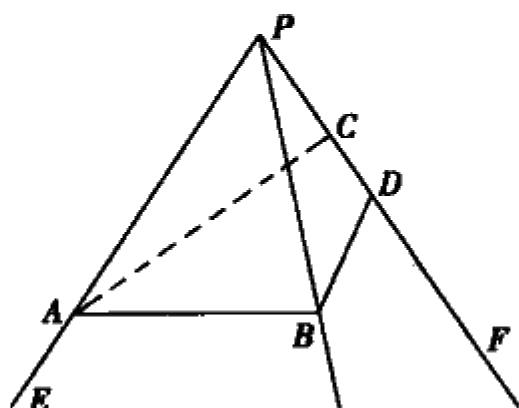


图 24-1

$$AB^2=AC^2+BD^2+CD^2-2AC\cdot BD\cdot\cos\theta_\alpha$$
$$=2-2\cos\beta\cdot\cos\gamma-2\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\theta_\alpha.$$

又 $AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cdot\cos\alpha=2-2\cos\alpha$.

由此两式,即有 $\cos\theta_\alpha=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.

推论 1 $\theta_\alpha=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos\alpha=\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

推论 2 $\tan\dfrac{\theta_\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)}}$.

推论 3 三面角的两个面角相等$\Leftrightarrow$这两个面角所对的两个二面角相等;
三个面角相等$\Leftrightarrow$三个二面角相等.

推论 4 三面角的两个面角相等$\Leftrightarrow$这两个面角的公共棱在第三个面角所在平面内的射影必平分第三个面角.

推论 5 论 $S(P)=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$,则 $S(P)>0$.($S(P)$叫二面角的特征值)

略证 由 $\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$,及 $\sin\alpha>0,\sin\beta>0,-1<\cos\gamma<1$,有 $\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta<\cos\gamma<\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$,即 $\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta)<0$,$\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)>0$.此两不等式相乘,有 $\cos^2\gamma-\cos\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]+\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)<0$.从而 $S(P)>0$.

性质 4 设三面角的三个面角 α,β,γ 与所对棱的夹角分别为 $\tau_\alpha,\tau_\beta,\tau_\gamma$,则
$S(P)=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\tau_\alpha=\sin^2\beta\cdot\sin^2\tau_\beta=\sin^2\gamma\cdot\sin^2\tau_\gamma$.

性质 5 设三面角的三个面角 α,β,γ 所对棱为棱的二面角分别为 $\theta_\alpha,\theta_\beta,\theta_\gamma$,则
$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta_\alpha}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\theta_\beta}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\theta_\gamma}$.

证明 由$\frac{\sin\alpha}{\sin\theta_\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\theta_\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sqrt{S(P)}}$等即证.

推论 1 三面角中,一面角和它相对的二面角相等或相补,则另外两个面角与其相对的二面角也相等或相补.

推论 2 $\sin\theta_\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\sin\theta_\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin\alpha=\sin\theta_\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

推论 3 $\dfrac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\dfrac{\tan\dfrac{\theta_\alpha+\theta_\beta}{2}}{\tan\dfrac{\theta_\alpha-\theta_\beta}{2}}$.

推论 4 $\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\tau_\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\tau_\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\tau_\gamma}$.

性质 6 $\pi<\theta_\alpha+\theta_\beta+\theta_\gamma<3\pi$.

事实上,可从三面角内一点向各面引垂线段,并运用性质及平面凸四边形内角和定理即证.

推论 凸 n 面角的 n 个二面角之和大于 $(n-2)\pi$,而小于 $n\pi$.

性质 7 三面角的两个二面角不等时,较大的二面角所对的面角也较大.反之亦真.

性质 8 在三面角 $S-A_1B_1C_1$ 中,三个面角$\angle C_1SB_1=\alpha$,$\angle A_1SC_1=\beta$,$\angle A_1SB_1=\gamma$,且棱 SA_1 和平面 C_1SB_1 所成棱面角为 θ_1,棱 SB_1 和平面 A_1SC_1 所成棱面角为 θ_2,棱 SC_1 和平面 A_1SB_1 所成棱面角为 θ_3,则

$$\cos\theta_1=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma},$$

$$\cos\theta_2=\frac{1}{\sin\beta}\cdot\sqrt{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma},$$

$$\cos\theta_3=\frac{1}{\sin\gamma}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

证明 如图 24-2,在 SA_1 上取一点 P,作 $PO\perp$平面 B_1SC_1 于 O.当点 O 在$\angle B_1SC_1$ 内部时(点 O 在$\angle B_1SC_1$ 外部时类同),连 SO 并延长至 Q,则$\angle PSQ=\theta_1$.作 $OK\perp SB_1$ 于 K,作 $OR\perp SC_1$ 于 R,连 PK,PR,则 $PK\perp SB_1$,$PR\perp SC_1$.

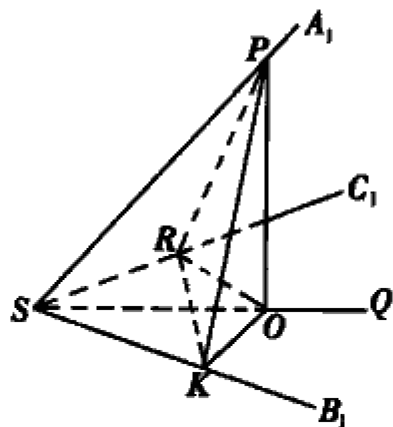


图 24-2

连 RK,设 $SP=a$,则 $SK=a\cdot\cos\gamma$,$SR=a\cdot\cos\beta$.在$\triangle SKR$ 中,由余弦定理得

$$KR=a\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

又 $OK\perp SK$,$OR\perp SR$,则 S,K,O,R 四点共圆,且 SO 为其直径,即 SO 为$\triangle SKR$ 的外接圆直径.

在△SKR 中,由正弦定理得

$$SQ=\frac{KR}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

在 Rt△PSO 中,

$$\cos\theta_1=\frac{SQ}{SP}=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

同理,可得其余两式.

注 此结论也可不运用正、余弦定理来证.当 O 点落在$\angle B_1SC_1$ 内部时,令$\angle OSB_1=\varphi$,则$\angle OSC_1=\alpha-\varphi$,于是有 $\cos\theta_1\cdot\cos(\alpha-\varphi)=\cos\beta$,$\cos\theta_1\cdot\cos\varphi=\cos\gamma$.又$\cos\varphi=\cos[\alpha-(\alpha-\varphi)]=\cos\alpha\cdot\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-\varphi)$,从而 $\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sqrt{\cos^2\theta_1-\cos^2\beta}$,故 $\cos\theta_1=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.同理得其余两式.

当 O 点在$\angle B_1SC_1$ 外部时,注意 $\cos(\alpha-\varphi)=\cos(\varphi-\alpha)$,$\sin(\varphi-\alpha)=-\sin(\alpha-\varphi)$,即可证.

性质 9 三面角的各棱与对面所成的三角之和比三个三面角之和小,比三个面角之和之半大.

性质 10 由三面角顶点出发且在三面角内部的一条射线和三条棱所夹的三角之和,小于三个面角之和,而大于三个面角之和之半.

性质 11 三面角中的下列面共线:

(Ⅰ)过三面角各面角的平分线且垂直于该平面的三个平面共线;

(Ⅱ)三面角的各棱与它所对的面角的平分线所确定的三个平面共线;

(Ⅲ)过三面角的各棱并且和它所对的面垂直的三个平面共线;

(Ⅳ)三面角各二面角的平分面,或一个二面角的平分面与另外两个二面角的补二面角的平分面共线.

事实上,如图 24-1,取 $PA=PB=PC$.在△ABC 中,利用其外心、重心、内心及旁心性质,即证得(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅳ),题设中的平面就共线于三面角顶点和这些心的连线.对于(Ⅲ)注意作某棱的垂面分情况讨论即可证.

性质 12 三面角中的下列线共面:

(Ⅰ)通过顶点在每一面所在平面上引直线垂直于对棱,这样的三条直线共面;

(Ⅱ)在每个二面角的补二面角的平分面上,通过顶点且垂直于这二面角的棱引直线,则此三条直线共面,这个平面与三面角的三面成等二面角.

(Ⅲ)各面角的补角的平分线共面;两个面角的平分线和第三个面角的补角的平分线也共面.这样得到的每个平面与三面角的三棱成等角.

事实上,上述性质运用性质 11 即可推证.

性质 13 在两个三面角中,

(Ⅰ)三个面角对应相等,则这两个三面角相等;

(Ⅱ)两个二面角及其所夹面角对应相等,则这两个三面角相等;

(Ⅲ)三个二面角对应相等,则这两个三面角相等;

(Ⅳ)两个面角及其所夹二面角对应相等,则这两个三面角相等;

(Ⅴ)两个面角对应相等,而它们所夹二面角不等,则第三个面角也不等,大的二面角所对的面角也较大.

三面角中,也有如下的一些特殊名称:

定义 1 有两个面角相等的三面角,称为等腰三面角;三个面角皆相等的三面角,称为等面三面角或正三面角.

定义 2 三个面角都是直角的三面角,称为直三面角.

定义 3 依次规定三面角的棱的绕向顺序的三面角称为有向三面角.截口三角形是逆时针绕向时,称为正向三面角,否则称为负向三面角.

定义 4 延长三面角的三棱得一新三面角,称为原三面角的对顶三面角.

显然,三面角与其对顶三面角的面角、二面角均对应相等,但它们的转向相反.

定义 5 两个三面角的对应面角相等,对应二面角相等时,称它们相等;两个相等的三面角同向时,称两个三面角全相等或全等.

定义 6 设给定三面角 $S-ABC$,从顶点 S 出发作射线 SA',SB',SC'分别垂直于平面 BSC,CSA,ASB 并与射线 SA,SB,SC 分别在这各平面的同侧,那么三面角 $S-A'B'C'$称为三面角 $S-ABC$ 的补三面角.

性质 14 若三面角 $S-A'B'C'$是三面角 $S-ABC$ 的补三角,则 $S-ABC$ 也是 $S-A'B'C'$的补三面角.

性质 15 两个互补三面角中,就度量来说,一个的面角跟另一个相应的二面角互补.

推论 如果任意三面角的面角(或二面角)具有某种性质 P,则其面角(或二面角)所对二面角(或面角)之补角亦有这种性质 P.

性质 16 设 $\theta_\alpha,\theta_\beta,\theta_\gamma$ 分别为三面角的面角 α,β,γ 所对的二面角的大小,且满足

$$f(\alpha,\beta,\gamma,\theta_\alpha,\theta_\beta,\theta_\gamma)=0, g(\alpha,\beta,\gamma,\theta_\alpha,\theta_\beta,\theta_\gamma)>0,$$

则

$$f(\pi-\theta_\alpha,\pi-\theta_\beta,\pi-\theta_\gamma,\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma)=0,$$

$$g(\pi-\theta_\alpha,\pi-\theta_\beta,\pi-\theta_\gamma,\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma)>0.$$

【典型例题与基本方法】

例 1 三面角 $V-ABC$ 中，VD 是面角 BVC 的平分线.若$\angle AVD \gtreqless \frac{\pi}{2}$，则有

$\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle AVC)\lesseqgtr\angle AVD$. (1957 年上海市竞赛题)

证明 当$\angle AVD<\frac{\pi}{2}$时，扩展面 AVD 如图 24－3，在这个平面内作$\angle VDA'=\angle DAV$，则$\angle AVA'<\pi$.

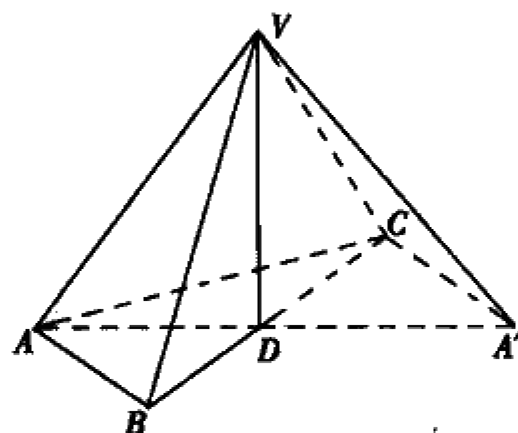


图 24－3

在三面角 $V-ABD$ 和三面角 $V-A'CD$ 中，面角$\angle AVD=$面角$\angle A'VD$，面角$\angle BVD=$面角$\angle CVD$，二面角 $A-VD-B=$二面角 $A'-VD-C$，由性质 12 或性质 3，有面角$\angle AVB=$面角$\angle A'VC$.在三面角 $V-AA'C$ 中.由性质 1，面角$\angle AVC+$面角$\angle A'VC>$面角$\angle AVA'=2\times$面角$\angle AVD$，即$\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle AVC)>\angle AVD$.

若$\angle AVD=\frac{\pi}{2}$，扩展面 AVD.在这平面内作$\angle DVA'$，使$\angle DVA'=\angle AVD$，则$\angle AVA'=\pi$，此时 AVA'成一直线.仿上可证得三面角 $V-ABD$ 与三面角 $V-A'CD$ 相等，有$\angle AVB=\angle A'VC$，$\because\angle AVC+\angle CVA'=\pi$，$\therefore\angle AVC+\angle AVB=\pi$，即有$\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle AVC)=\frac{\pi}{2}=\angle AVD$.

若$\angle AVD>\frac{\pi}{2}$，扩展面 AVD，在这平面内作 VA'，使$\angle A'VD=\angle DVA$，则$\angle AVD+\angle DVA'>\pi$.由性质 12，得$\angle AVB=\angle A'VC$，在三面角 $V-ACA'$中，面角$\angle AVA'=2\pi-2\angle AVD$，$\angle AVC+\angle A'VC+\angle AVA'<2\pi$(性质 2)，$\therefore\angle AVC+\angle AVB+2\pi-2\angle AVD<2\pi$，即有$\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle AVC)<\angle AVD$.

例 2 设一个凸多面角的各平面角之和等于它的各二面角之和.证明：这个多面角是三面角. (1981 年美国奥林匹克题)

证法 1 由于以 S 为顶的凸 n 面角 $S-A_1A_2\cdots A_n$ 的各面角之和小于 2π，任取 n 面角的一个内点 O 作平面 SA_iS_{i+1}的垂线 OH_i($i=1,2,\cdots,n$，且记 $A_{n+1}=A_1$)，所得到的以 O 为顶点，OH_i 为棱的 n 面角是凸的.其原因是，每个面，它的每条棱连同点 S 都在同一半空间内，它的每一个平面角$\angle H_iOH_{i-1}$($H_0=H_n$)与关于棱 OA_i 的二面角的平面角之和为 180°.因为 n 面角的各平面角之和小于 360°，所以原 n 面角的二面角之和大

于 $\pi\cdot n-2\pi$. 当 $n\geqslant 4$ 时,它不可能小于 2π,因此题中条件只有三面角才能满足.

证法 2 设多面角的面数为 n,由题设有 $\sum$面角 = $\sum$二面角.

由性质 6 的推论,有 $(n-2)\pi<\sum$二面角.

又由性质 1,有 $\sum$面角 $<2\pi$. 从而 $(n-2)\pi<2\pi$,即 $n<4$. 又 $n\geqslant 3$,故 $n=3$.

这就证明了此多面角是一个三面角.

例 3 设 P,A,B,C 和 D 是空间中不同的五个点,使得 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPA=\theta$,这里 θ 是一个给定的锐角. 试确定出 $\angle APC+\angle BPD$ 的最大值和最小值.

(第 13 届美国奥林匹克题)

解 如图 24-4, $\angle APB+\angle BPC+\angle CPD+\angle DPA=4\theta$. 设 $\angle APC=2\theta_1$, $\angle BPD=2\theta_2$, PO 为 PB 在面 APC 内的射影. 由性质 3 的推论 4,知 $\angle APO=\angle OPC=\theta_1$,且平面 $OPB\perp$平面 APC. 由此又有 $\angle DPO=\angle OPB=\theta_2$. 又由性质 3 的推论 1,知 $\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2=\cos\theta$,且 $0<\theta_1+\theta_2<2\theta<\pi$,故

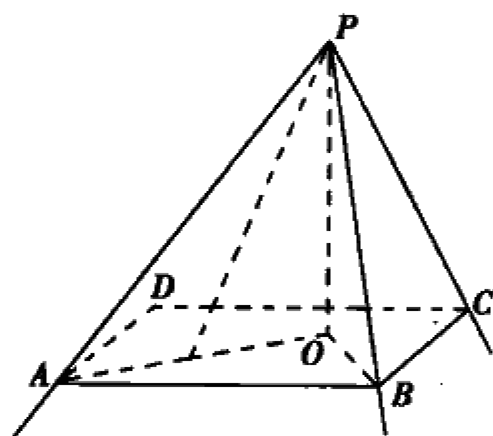


图 24-4

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1+\theta_2)&=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\\&=2\cos\theta-\cos(\theta_1-\theta_2).\qquad (*)\end{aligned}$$

对于 $(*)$ 式,当 $\theta_1=\theta_2$ 时取极小值 $2\cos\theta-1$,此时 $\theta_1+\theta_2$ 有极大值 $\arccos(2\cos\theta-1)$,从而 $\angle APC+\angle BPD$ 的极大值为 $2\arccos(2\cos\theta-1)$,易知它即为最大值.

由性质 1, $\theta_1+\theta_2>\theta$,从而 $\angle APC+\angle BPD>2\theta$. 由 $(*)$ 式知此值可与 2θ 任意接近,当 $\theta=0$ 时, $\angle APC+\angle BPD$ 有最小值 0.

【解题思维策略分析】

1. 善于运用三面角性质处理多面角问题

例 4 在一个直圆柱体的底面圆圆上取对径点 A 与 B,在另一底面圆周上取一点 C,使得 C 不在平面 ABO 上,其中点 O 是圆柱体的轴的中点. 证明:以 O 为顶点, OA, OB, OC 为棱的三面角中,诸二面角之和为 $360°$.

(IMO-23 试题)

证明 设点 C' 与 C 关于圆柱体的中心 O 是对称的. 如果三面角 $OABC$ 关于棱 OA, OB, OC 的二面角依次为 α,β,γ,则三面角 $OABC'$ 关于棱 OA, OB, OC' 的二面角依次为 $180°-\alpha$, $180°-\beta$, γ. 设 D 是以 AB 为直径的圆的圆心,因为棱锥 $OADC'$ 关于棱 OD 的二面角的平分平面对称,所以,棱锥 $OADC'$ 中关于棱 OA 与 OC' 的二面角相等.

同理,在棱锥 $OBDC'$ 中,关于棱 OB 与 OC 的二面角也相等.

因此, $(180°-\alpha)+(180°-\beta)=r$,故 $\alpha+\beta+\gamma=360°$.

例 5 用平面去截三面角的三条棱,若截下的三段棱长之积为常数 K,则所得到的

四面体体积 V 也是个定值.

证明 如图 24-5,三面角 $P-ABC$ 被平面 M 截于 $\triangle A'B'C'$,且 $PA'\cdot PB'\cdot PC'=K$.设 $\angle A'PB'=\alpha$,PC' 与平面 ABP 的夹角为 τ_α,则点 C' 到平面 ABP 的距离为 $PC'\cdot\sin\tau_\alpha$.因此

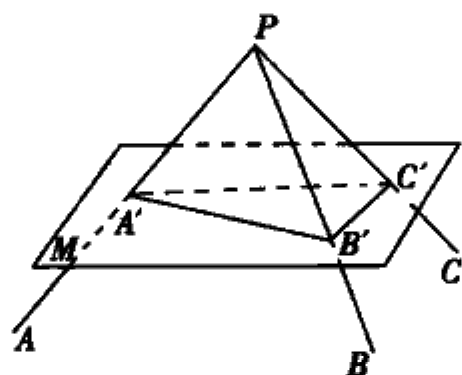


图 24-5

$$\begin{aligned}V_{P-A'B'C'}&=\frac{1}{3}S_{\triangle PA'B'}\cdot PC'\cdot\sin\tau_\alpha\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}PA'\cdot PB'\cdot\sin\alpha\cdot PC'\cdot\sin\tau_\alpha\\&=\frac{K}{6}\sin\alpha\cdot\sin\tau_\alpha.\end{aligned}$$

由性质 4 及性质 3 的推论 5,知 $\sin\alpha\cdot\sin\tau_\alpha$ 为定值.故 V 也是定值.

2. 善于运用三面角性质解答四面体问题

例 6 已知四面体的对棱均相等.证明它的四个面都是锐角三角形.

(第 1 届美国奥林匹克题)

证明 如图 24-6,设 $AD=BC$,$AC=BD$,$AB=CD$.显然,这个四面体的四个表面均是全等的三角形,则 $\angle BAC=\angle BDC$,$\angle ABC=\angle ADC$,$\angle ACB=\angle ADB$.

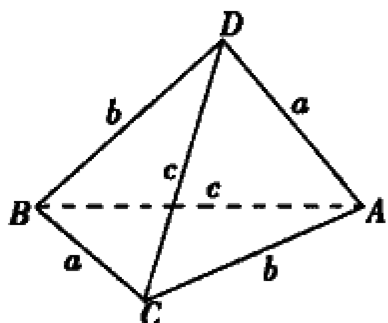


图 24-6

在三面角 $D-ABC$ 中,由性质 1 有 $\angle ADC+\angle ADB>\angle BDC$.设 $\angle ADC+\angle ADB=\angle BDC+\theta(\theta>0)$.

又在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180°$,从而 $\angle BAC+\angle ADC+\angle ADB=\angle BAC+\angle BDC+\theta=2\angle BAC+\theta=180°$,即

$$\angle BAC=90°-\frac{\theta}{2}<90°.$$

同理,$\angle ABC$,$\angle ACB$ 均小于 90°.

同理,四面体的另三个面也是锐角三角形.

例 7 如果四面体的六个二面角相等,则这四面体必是正四面体.

(第 7 届美国奥林匹克题)

证明 如图 24-5,由性质 3 的推论 3,有 $\angle ADC=\angle BDC$,$\angle ACD=\angle BCD$.在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中,$\angle CAD=180°-\angle ACD-\angle ADC$,$\angle DBC=180°-\angle BCD-\angle BDC$,从而 $\angle DAC=\angle DBC$.再由性质 3 的推论 3,有 $\angle BAC=\angle DAC$,$\angle ABC=\angle DBC$.故 $\angle BAC=\angle ABC$.

同理,$\angle ABC=\angle ACB$.即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

同理可证另三个侧面也为正三角形.故四面体必为正四面体.

例 8　求证:四面体的一个面的面积的平方,等于其他各面面积的平方和减去每两个面的面积与这两个面夹角余弦乘积的两倍.

证明　如图 24－7,在四面体 $ABCD$ 中,设 $AD=a$, $BD=b$, $DC=c$, $\angle BDC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$, $\angle ADB=\gamma$,顶点 A、B、C、D 所对面的面积为 S_A、S_B、S_C、S_D,面角 α、β、γ 所对的二面角分别记为 θ_α、θ_β、θ_γ.

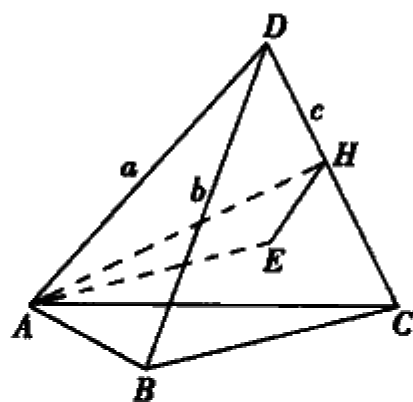


图 24－7

由海伦公式及余弦定理,有

$$S_A^2=\frac{1}{4}[(BC+CD)^2-BD^2]\cdot\frac{1}{4}[BD^2-(BC-CD)^2]$$

$$=\frac{1}{4}[a^2b^2\sin^2\gamma+a^2c^2\sin^2\beta+b^2c^2\sin^2\alpha+2a^2bc(\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha)+2ab^2c(\cos\gamma\cdot\cos\alpha-\cos\beta)+2abc^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma)].$$

注意到性质 3,故

$$S_A^2=S_D^2+S_C^2+S_B^2-2S_D\cdot S_C\cdot\cos\theta_\alpha-2S_D\cdot S_B\cdot\cos\theta_\beta-2S_C\cdot S_B\cdot\cos\theta_\gamma.$$

还有三式可同样证得.

例 9　在四面体中,所设同例 7 证明设的,令 $\omega=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$,则四面体的体积 V 为 $V=\frac{abc}{3}\sqrt{\sin\omega\cdot\sin(\omega-\alpha)\cdot\sin(\omega-\beta)\cdot\sin(\omega-\gamma)}$.

略证　如图 24－6,设 A 点在面 BCD 内的射影为 E,作 $AH\perp CD$ 于 H,连 EH,则 $\angle AHE=\theta_\gamma$.

由 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot AH$,有 $AH=\frac{2}{c}S_B$.又 $AE=AH\cdot\sin\theta_\gamma=\frac{2}{c}\cdot S_B\cdot\sin\theta_\gamma$.

注意到性质 3,
$$V=\frac{1}{3}S_A\cdot AE=\frac{2}{3c}S_A\cdot S_B\cdot\sin\theta_\gamma=\frac{abc}{6}\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta_\gamma}$$

$$=\frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

$$=\frac{abc}{3}\sqrt{\sin\omega\cdot\sin(\omega-\alpha)\cdot\sin(\omega-\beta)\cdot\sin(\omega-\gamma)},$$

其中　$\omega=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$.

3. 善于运用三面角性质解答其他立体几何问题

例 10　由平面 M 外一点 A 向平面 M 引斜线 AB、AC,使 $\angle BAC=\alpha$.又 AB、AC 与平面 M 的交角分别为 β、γ,求 AB、AC 在平面 M 上的射影所成的角.

(1962 年福建省竞赛题)

解 如图 24－8 作 $AD\perp$ 面 M 于 D，连 BD、DC，则 $\angle ABD=\beta$，$\angle ACD=\gamma$，$\angle BDC=\theta$ 为 AB、AC 在面 M 内的射影所成的角，亦为二面角 $B-AD-C$ 的平面角．

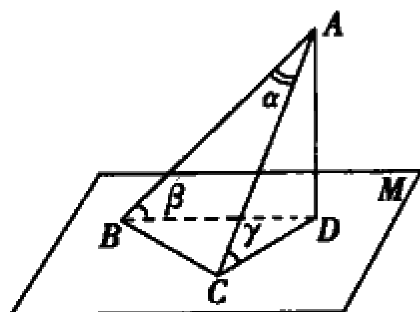


图 24－8

在三面角 $A-BCD$ 中，由性质 3，则

$$\cos\theta=(\cos\alpha-\cos\angle BAD\cdot\cos\angle CAD)/(\sin\angle BAD\cdot\sin\angle CAD)$$
$$=\sec\beta\cdot\sec\gamma\cdot\cos\alpha-\tan\beta\cdot\tan\gamma.$$

故 $\theta=\arccos(\sec\beta\cdot\sec\gamma\cdot\cos\alpha-\tan\beta\cdot\tan\gamma)$．

类似于上例，运用性质 3 及推论，还可解答一系列竞赛题(参见习题 A1～5)．

例 11 若两条异面直线 a、b 所成角(规定两异面直线正方向间的夹角)为 $\theta(0<\theta<\pi)$，在直线 a、b 上分别取点 A'、E，A、F．若 $A'E$、AF 的正方向与 a、b 的正方向相同，且 $\angle EA'A=\alpha$，$\angle A'AF=\beta$，$A'A=m$，则 a、b 间的距离为

$$d=\frac{m}{\sin\theta}\sqrt{1-\cos^2\theta-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\theta}.$$

证明 如图 24－9，过 A 作 $AE'\parallel A'E$，则在三面角 $A-FE'A'$ 中，$\angle E'AF=\theta$，$\angle A'AE'=\pi-\alpha$．由性质 5，$A'A$ 与面 $E'AF$ 的夹角 $\tau_{A'A}$ 有 $\sin\tau_{A'A}=\sqrt{S(A)}/\sin\theta$，而 A' 到面 $E'AF$ 的距离就是 a 与 b 间的距离 d，故

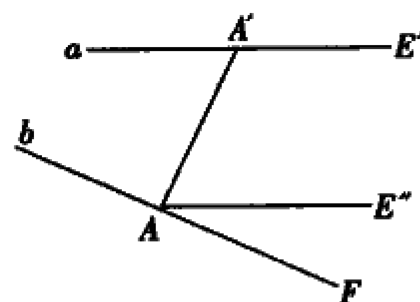


图 24－9

$$d=m\cdot\sin\tau_{A'A}$$
$$=\frac{m}{\sin\theta}\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\theta}.$$

例 12 在空间中有 n 个点，其中任何三个点都是一个内角大于 $120°$的三角形的顶点．证明：可以把这些点用字母 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 表示，角 $A_iA_jA_k$(这里 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$)中的任何一个都大于 $120°$． (第 3 届全俄奥林匹克题)

证明 在已知点中取两个距离最大的点，例如 A 和 B．我们证明，$\angle XAY$ 和 $\angle XBY$(这里 X 和 Y 是某些已知点)中的每一个都小于 $120°$．

事实上，因为$\triangle AXB$ 和$\triangle AYB$ 的边 AB 最长，所以，$\angle AXB>120°$，并且$\angle AYB>120°$．于是$\angle XAB<60°$，并且 $YAB<60°$．而由性质 1 知$\angle XAY<\angle XAB+<\angle YAB<120°$．

这样，应从 A 点开始编号，直到 B．我们指出，从已知点到点 A 的所有距离都不相等．事实上，若 $AX=AY$，$\triangle AXY$ 是等腰三角形，则$\angle XAY>120°$．正如我们在上面看到的，这是不可能的．我们给已知点编上号，设 $A_1=A$，A_2 是离点 A 最近的点，A_3 是其余的点中距离点 A 最近的点，$\cdots$，A_k 是其余还没编号的距离 A 最近的点，$\cdots$，$A_n=B$．下证这样编号能满足条件．

由于当 $1<i<k\leqslant n$ 时，$\angle A_1A_iA_k>120°$，可证当 $1<i<j<k<n$ 时，$\angle A_iA_jA_k>120°$．

因为在点系 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中，点 A_1 和 A_k 是距离最远的点，所以$\angle A_iA_kA_j < 120°$，正如开始时所证.

下面证明$\angle A_kA_iA_j < 120°$.事实上，因为$\angle A_1A_iA_j > 120°$，并且$\angle A_1A_iA_k > 120°$，那么不等式$\angle A_kA_iA_j \leqslant 120°$成立，因为以 A_i 为顶点的三面角的面角之和不能大于 360°.

这样，对任何 $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$，都有$\angle A_iA_jA_k > 120°$.结论得证.

【模拟实战】

习题 A

1. 已知二面角 $M-AB-N$ 是直二面角，P 为棱 AB 上的一点，PX、PY 分别在 M、N 内，$\angle XPB = \angle YPB = 45°$.求$\angle XPY$ 的大小. （1964 年北京市竞赛题）
2. 棱长为 12 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 被过 A、E(在 BB' 上)、F(在 DD' 上)三点的平面 α 所截.若 $DE = DF = 9$，试求正方体被平面 α 所截的截面面积. （1979 年辽宁省竞赛题）
3. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面与底面的夹角为 α，相邻两侧面的夹角为 β.求证：$\cos\beta = -\cos^2\alpha$. （1981 年上海市竞赛题）
4. 已知四面体 $S-ABC$ 中，$\angle ASB = \frac{\pi}{2}$，$\angle ASC = \alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$，$\angle BSC = \beta\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$，以 SC 为棱的二面角的平面角为 θ.求证：$\theta = \pi - \arccos(\cot\alpha \cdot \cot\beta)$. （1982 年全国高中联赛题）
5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 中点，F 在 AA_1 上，且 $A_1F : FA = 1:2$.求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角. （1985 年全国高中联赛题）

习题 B

1. 若三面角 $P-ABC$ 的三个面角中有一个是锐角，则存在平面 $A_1B_1C_1$ 截三面角所得的$\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形.
2. 若三面角 $P-ABC$ 的三个面角中有一个是锐角，则存在平面 $A_1B_1C_1$ 截三面角所得的$\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形.
3. 若三面角 $P-ABC$ 的三个面角中有一个是锐角，则存在平面 $A_1B_1C_1$ 截三面角所得的$\triangle A_1B_1C_1$ 是直角三角形.

第三篇 平面解析几何问题

第二十五章　一般圆锥曲线的性质及应用

【基础知识】

对于一般圆锥曲线 $f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，令 $\Delta=B^2-4AC$. 若 $\Delta<0$，则 $f(x,y)=0$ 为椭圆型；若 $\Delta=0$，则 $f(x,y)=0$ 为抛物线型；若 $\Delta>0$，则 $f(x,y)=0$ 为双曲线型.

对于一般圆锥曲线，有如下一系列有趣性质：

性质 1　直线 $y=kx+m$ 与圆锥曲线 $f(x,y)=0$ 若交于两个不同的点 A,B，则称线段 AB 为该曲线的一条弦，弦长由下列公式给出：

$$|AB|=\frac{1}{|a|}\sqrt{(1+k^2)(b^2-4ac)}.$$

其中 a,b,c 为 $y=kx+m$ 代入 $f(x,y)=0$ 中消去 y 所得二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的各次项系数.

性质 2　设 AB 是圆锥曲线过焦点 F 的弦，其长度记作 l，AB 相对于焦点所在对称轴的倾角为 $\theta(\theta\neq 90°)$，$\tan\theta=k$，e 为离心率，p 为焦点到相应准线的距离，则有 l 与 k 的关系式：$l=\dfrac{2ep(1+k^2)}{(1+k^2)-e^2}$，或 $k^2=\dfrac{e^2 l}{l-2ep}-1$.

证明　由圆锥曲线统一的极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，得 $|AF|=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，$|PF|=$

$\frac{ep}{1+e\cos\theta}$,从而 $l=|AF|+|FB|=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$.

再注意到 $\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+k^2}$,代入即证得.

注 (ⅰ)$\theta=90°$时,$l=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}=2ep$(通径长);

(ⅱ)对于椭圆和双曲线 $p=|\frac{a^2}{c}-c|=\frac{b^2}{c}$.

性质3 设 F 为圆锥曲线焦点,其相应准线为 L,作一直线交圆锥曲线于 A,B,交 L 于 M,则 FM 平分$\triangle AFB$ 的$\angle AFB$ 的外角(即 BF,AF 与直线 MF 成等角).

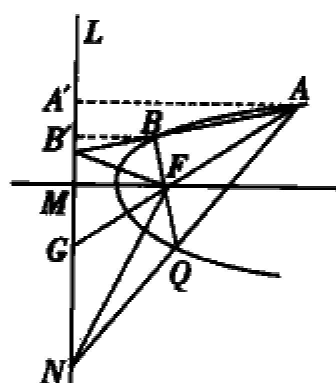


图 25-1

证明 如图 25-1,从 A,B 分别向 L 作垂线 AA' 与 BB',垂足为 A',B',由圆锥曲线定义,有$\frac{|AF|}{|AA'|}=e=\frac{|BF|}{|BB'|}$.

又$\triangle AA'M\backsim\triangle BB'M$,则$\frac{|AA'|}{|BB'|}=\frac{|AM|}{|BM|}$.

从而 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AM|}{|BM|}$.故 FM 平分$\triangle AFB$ 的$\angle AFB$ 的外角.

推论1 设过圆锥曲线焦点 F 作一直线与圆锥曲线相交于P,Q 两点,A 为圆锥曲线上除 P,Q 外任一点,连 AP 和 AQ 分别交相应焦点 F 的准线于 M,N,则$\angle MFN=90°$.

若运用同一法则可证明性质3的逆命题也是正确的,即有:"从圆锥曲线的一个焦点出发的两条不等长且不共线的焦半径 FA,FB,若与过焦点 F 的直线 l 所夹的锐角相等,则连结 A,B 的直线必过定点(焦点 F 所对应的准线 L 和直线 l 的交点)."

如果性质3及其逆命题中的 A,B 重合时,则可有如下推论:

推论2 过圆锥曲线的准线 L 上的一点 M 作圆锥曲线的两条切线 MA,MB,则切点弦 AB 必过焦点 F 且与 MF 垂直;且当 M 为准线与焦点轴交点时,则 $k_{MA}^2=e$.

推论3 连结圆锥曲线的准线 L 与直线 l(过准线 l 所对应的焦点 F 的直线)的交点 M 和垂直于直线 l 的焦点 AFB 的端点的直线是圆锥曲线的切线.

性质4 设 AB,CD 是圆锥曲线过焦点 F 的两动弦,弦端点连线 AC,BD 交于点 M,则动点 M 的轨迹是圆锥曲线的相应准线.

证明 如图 25-2,设圆锥曲线为 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$,点 $A(\rho_1,\theta_1)$,$B(\rho'_1,\theta_1+\pi)$,$C(\rho_2,\theta_2)$,$D(\rho'_2,\theta_2+\pi)$.

设直线 AC 上的动点 $P(\rho,\theta)$,则由平面几何中的张角公式,有$\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\rho}=$

$\frac{\sin(\theta_1-\theta)}{\rho_2}+\frac{\sin(\theta-\theta_2)}{\rho_1}$.

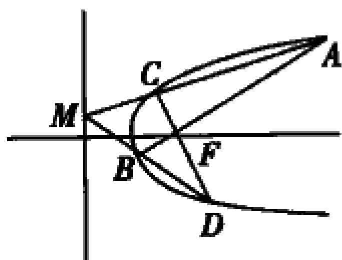


图 25－2

整理得直线 AC 的方程：

$$\rho\left[\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta\right)-e\cdot\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cdot\cos\theta\right]=ep\cdot\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}.$$

同理，有直线 BD 的方程：

$$\rho\left[\cos\left(\frac{\theta_1+\pi+\theta_2+\pi}{2}-\theta\right)-e\cdot\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cdot\cos\theta\right]=ep\cdot\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}.$$

上述两式相加，整理得 $\rho\cos\theta=-p$，此为圆锥曲线的准线方程，所以点 M 的轨迹是圆锥曲线的准线.

注 直线 AD,BC 的交点的轨迹仍是圆锥曲线的准线.当焦点弦 AB,CD 重合时，直线 AC,BD 退化为圆锥曲线的两条切线.

推论 设 AB 是圆锥曲线的动焦点弦，过弦端点 A,B 分别作圆锥曲线的切线，则两切线交点的轨迹是圆锥曲线的准线.

性质 5 若 F 是圆锥曲线的焦点，E 是与焦点 F 相对应的准线 L 和圆锥曲线对称轴的交点，AB 是过焦点 F 的弦，点 C 在 L 上，则直线 AC 平分线段 EF 的充要条件是 $BC/\!/FE$.

证明 充分性：如图 25－3，设直线 AC 与 EF 交于 N，过 A 作 $AD\perp L$ 于 D.由圆锥曲线定义，有 $\frac{|AF|}{|AD|}=\frac{|BF|}{|BC|}=e$，由 $AD/\!/FE/\!/BC$，从而 $\frac{|NE|}{|AD|}=\frac{|CN|}{|CA|}=\frac{|BF|}{|AB|},\frac{|FN|}{|BC|}=\frac{|AF|}{|AB|}$，即有

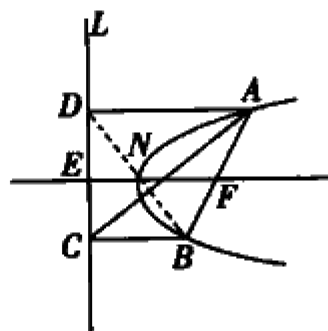


图 25－3

$$|NE|=\frac{|AD|\cdot|BF|}{|AB|}=e\cdot\frac{|AD|\cdot|BC|}{|AB|}=\frac{|AF|\cdot|BC|}{|AB|}=|FN|.$$

所以直线 AC 平分线段 EF.（同样有 BD 平分 EF）

必要性：由 $AD/\!/FE$ 及 $|FN|=|NE|$，连 BD，则

$$\frac{|NE|}{|AD|}=\frac{|EC|}{|DC|},\frac{|FN|}{|AD|}=\frac{|FB|}{|AB|}.$$

所以 $\frac{|EC|}{|DC|}=\frac{|FB|}{|AB|}$，从而 $BC/\!/FE$.

推论 1 若 F 是圆锥曲线的焦点，E 是与焦点 F 相对应的准线 L 和圆锥曲线对称轴的交点，AB 是过焦点 F 的弦，$BC/\!/FE$，N 是线段 EF 的中点，则 BC 与 AN 的交点 C 在准线 L 上.

推论 2 若 F 是圆锥曲线的焦点，E 是与焦点相对应的准线 L 和圆锥曲线对称轴的交点，点 B 在圆锥曲线上，点 C 在 L 上，$BC/\!/EF$，N 是线段 EF 的中点，则直线 BF

与 CN 的交点 A 恰在圆锥曲线上.

性质 6 设圆锥曲线的焦点为 F,过曲线上一点 P 的切线与相应于焦点 F 的准线 L 相交于 Q,则 $\angle PFQ=90°$.

证明 取焦点 F 为原点,e 为离心率,圆锥曲线的直角坐标方程为 $(1-e^2)x^2+y^2-2epx=p^2$.

设 $P(x_0,y_0)$,则过 P 的切线方程为(见性质 7)

$(1-e^2)x_0x+y_0y-ep(x_0+x)=p^2$.

又相应于焦点 F 的准线 L 的方程为 $x=-\dfrac{p}{e}$.

联立上述两方程求得 Q 点坐标 $\left(-\dfrac{p}{e},\dfrac{px_0}{ey_0}\right)$,从而有 $k_{QF}=\dfrac{y_Q}{x_Q}=-\dfrac{x_0}{y_0}$,而 $k_{PF}=\dfrac{y_0}{x_0}$,即 $k_{QF}\cdot k_{PF}=-1$,故 $\angle PFQ=90°$.

性质 7 设 $P(x_0,y_0)$ 为圆锥曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 上一点,则过点 P 的切线方程为 $Ax_0x+B\dfrac{y_0x+x_0y}{2}+Cy_0y+D\cdot\dfrac{x+x_0}{2}+E\cdot\dfrac{y+y_0}{2}+F=0$,或 $(2Ax_0+By_0+D)x+(Bx_0+2Cy_0+E)y+Dx_0+Ey_0+2F=0$.

证明 设过点 $P(x_0,y_0)$ 的直线参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\y=x_0+t\sin\theta\end{cases}$($t$ 为参数),代入圆锥曲线,化简得 $(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cdot\cos\theta+C\sin^2\theta)t^2+[(2Ax_0+By_0+D)\cos\theta+(Bx_0+2Cy_0+E)\sin\theta]t+Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$.

注意到 $f(x_0,y_0)=0$,直线与曲线 $f(x,y)=0$ 相切,有 $\triangle=0$,即 $(2Ax_0+By_0+D)\cdot\cos\theta+(Bx_0+2Cy_0+E)\cdot\sin\theta=0$,亦即 $(2Ax_0+By_0+D)(x-x_0)+(Bx_0+2Cy_0+E)\cdot(y-y_0)=0$. 由上式即有 $Ax_0x+\dfrac{B}{2}(x_0y+y_0x)+Cy_0y+\dfrac{D}{2}(x+x_0)+\dfrac{E}{2}(y+y_0)+F=0$.

注 此性质结论,也可看作是用 $x_0x,y_0y,\dfrac{x_0y+y_0x}{2},\dfrac{x_0+x}{2},\dfrac{y_0+y}{2}$ 分别代替 x^2,y^2,xy,x,y 即得.

推论 点 (x_0,y_0) 关于圆锥曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 切点弦方程为

$Ax_0x+B\cdot\dfrac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\cdot\dfrac{x_0+x}{2}+E\cdot\dfrac{y_0+y}{2}+F=0$.

注 点 (x_0,y_0) 关于此圆锥曲线的极线方程与上述方程形式相同.

性质 8 设定点 $Q(x_0,y_0)$ 不在圆锥曲线 $C:Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 上,

过 Q 作直线交曲线 C 于 A,B 两点，P 为动直线 AB 上不同于 Q 的另一点，且满足$\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{|AQ|}{|QB|}$，则 P 点的轨迹是直线 $Ax_0x+B\cdot\frac{x_0y+y_0x}{2}+Cy_0y+D\cdot\frac{x+x_0}{2}+E\cdot\frac{y+y_0}{2}+F=0$ 本身或它的局部.

证明 设 A,B,P 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x,y)$，则有

$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0, Ax_2^2+Bx_2y_2+Cy_2^2+Dx_2+Ey_2+F=0.$

令$\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{|AQ|}{|QB|}=\lambda$，则$\begin{cases}x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$和$\begin{cases}x_0=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\\ y_0=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}.\end{cases}$

于是 $Ax_0x+B\cdot\frac{x_0y+y_0x}{2}+Cy_0y+D\cdot\frac{x+x_0}{2}+E\cdot\frac{y+y_0}{2}+F$

$=\frac{Ax_1^2-\lambda Ax_2^2}{1-\lambda^2}+\frac{Bx_1y_1-\lambda Bx_2y_2}{1-\lambda^2}+\frac{Cy_1^2-\lambda^2Cy_2^2}{1-\lambda^2}+\frac{Dx_1-\lambda^2Dx_2}{1-\lambda^2}+\frac{Ey_1-\lambda^2Ey_2}{1-\lambda^2}+\frac{F-\lambda^2F}{1-\lambda^2}$

$=\frac{1}{1-\lambda^2}[(Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F)-\lambda^2(Ax_2^2+Bx_2y_2+Cy_2^2+Dx_2+Ey_2+F)]$

$=\frac{1}{1-\lambda^2}(0-\lambda^2\cdot0)=0.$

注 若点 Q 在圆锥曲线内部，则 P 点轨迹实际上就是性质 7 推论后说明中的极线方程. 若 Q 点在圆锥曲线外部，则 P 点轨迹是被截在圆锥曲线内的线段(不包括端点)，此时即为过 Q 所作圆锥曲线切线切点间连结线段(不包含切点).

性质 9 设曲线 $C_1:f(x,y)=1$，曲线 $C_2:g(x,y)=1$，P 是 C_2 上一点，O 为坐标系原点，射线 OP 交 C_1 于 R. 又点 Q 在 OP 上，且满足 $|OQ|\cdot|OP|=k|OR|^2(k>0)$，当点 P 在曲线 C_2 上移动时，若对任意实数 t 都有 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$，$g(tx,ty)=t\cdot g(x,y)$，则点 Q 的轨迹方程是 $f(x,y)=kg(x,y)>0$.

证明 设点 P 的坐标为 (x_P,y_P)，设点 R 的坐标为 (x_R,y_R)，点 Q 的坐标为 (x,y)，则由 $|OQ|\cdot|OP|=k|OR|^2$，R 在 $C_1:f(x,y)=1$ 上，而 $f(x,y)$ 满足 $f(tx,ty)=t^2\cdot f(x,y)$，知 R 不是原点，即 $|OR|\neq0$，有 $|OQ|\neq0$，$|OP|\neq0$.

又设$\frac{|OP|}{|OR|}=t$，则 $t>0$，且$\frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{|OP|^2}{k|OR|^2}=\frac{t^2}{k}>0$，

即 $\frac{|OR|}{|OQ|}=\frac{|OP|}{k|OR|}=\frac{t}{k}$，且 O,P,Q 均在射线 OP 上，于是，$x_P=\frac{t^2}{k}x$，$y_P=\frac{t^2}{k}y$；$x_R=\frac{t}{k}x$，$y_R=\frac{t}{k}y$.

又 P 在 C_2 上，R 在 C_1 上，分别代入曲线方程，得

$$g(x_P,y_P)=g(\frac{t^2}{k}x,\frac{t^2}{k}y)=\frac{t^2}{k}g(x,y)=1,$$

所以 $f(x_R,y_R)=f(\frac{t}{k}x,\frac{t}{k}y)=\frac{t^2}{k^2}f(x,y)=1.$

从而 $g(x,y)=\frac{k}{t^2}>0,f(x,y)=\frac{k^2}{t^2}>0.$

故点 Q 的轨迹方程为 $f(x,y)=kg(x,y)$，且 $g(x,y)>0$.

性质 10 设 $P(x_0,y_0)$ 是圆锥曲线 $C:f(x,y)=0$ 的一条弦 AB 的中点，C' 是 C 关于点 P 对称的曲线，则曲线 C' 的方程为 $f(2x_0-x,2y_0-y)=0$，而弦 AB 就是曲线 C 与 C' 的公共弦，且公共弦所在的直线方程为 $f(x,y)-f(2x_0-x,2y_0-y)=0$.

性质 11 已知圆锥曲线 $\Gamma:f(x,y)=Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 上一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 作倾斜角互补的两条直线 PM，PN 分别与 Γ 交于异于 P 的两点 M，N，则直线 MN 的倾斜角为定值.

证明 当点 P 在曲线 Γ 的对称轴上时，直线 MN 的倾斜角为 0°或 90°，结论显然成立.

当点 P 不在曲线 Γ 的对称轴上时，直线 PM，PN，MN 的斜率 k_{PM}，k_{PN}，k_{MN} 均存在且都不为 0，此时由条件可设 $k_{PM}=k$，$k_{PN}=-k$，并设 M，N 的坐标分别为 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $f(x_0,y_0)=0,f(x_1,y_1)=0,f(x_2,y_2)=0$.

由 $f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)=0$，两边同除以 x_1-x_0，得

$$[C(y_1+y_0)+E]k+D+A(x_1+x_0)=0.$$

同理，由 $f(x_2,y_2)-f(x_0,y_0)=0$ 得 $[C(y_2+y_0)+E](-k)+D+A(x_2+x_0)=0$.

由上述两式分别相加、相减，得

$$Ck(y_1-y_2)+A(x_1+x_2)+2D+2Ax_0=0,$$

$$A(x_1-x_2)+Ck(y_1+y_2)+2Ek+2Cky_0=0.$$

又由 $y_1-y_0=k(x_1-x_0)$ 与 $y_2-y_0=-k(x_2-x_0)$ 相减、相加，得

$$x_1+x_2=\frac{1}{k}(y_1-y_2)+2x_0,y_1+y_2=k(x_1-x_2)+2y_0.$$

并将其代入前两式，得 $(Ck+\frac{A}{k})(y_1-y_2)=-(2D+4Ax_0)$，

$$(Ck+\frac{A}{k})(x_1-x_2)=-(2E+4Cy_0).$$

此两式相除，得 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{D+2Ax_0}{E+2Cy_0}$（定值）.

所以直线 MN 的倾斜角为定值.

注 当 $f(x,y)=x^2+2p(y-b)=0$ 时，$k_{MN}=\dfrac{x_0}{p}$；当 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ 时，$k_{MN}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$；当 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ 时，$k_{MN}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

推论 1 设 $P(x_0,y_0)$ 为圆锥曲线 $\Gamma:Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 上一点，l 为过点 P 的切线，PM，PN 为倾斜角互补的动弦，则（Ⅰ）直线 MN 与 l 的倾斜角也互补；（Ⅱ）线段 MN 中点的轨迹是与原曲线具有相同离心率的圆锥曲线.（证明略，可参见《数学通报》2002 年第 4 期）

推论 2 已知点 $P(x_0,y_0)$ 不在圆锥曲线 $\Gamma:Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 上，过 P 作倾斜角互补的两条直线分别交 Γ 与 S,M 和 T,N，则直线 MN 与 ST 的倾斜角互补或同为零.

证明 不妨设 P 的坐标为 $(0,b)$（因 Γ 的方程缺 xy 项）及直线的倾斜角经平移后保持不变，再由 SM 与 TN 的倾斜角互补可设其方程分别为

$y=kx+b,y=-kx+b$.

将其代入 Γ，有 $(A+Ck^2)x^2+(D+Ek+2Ckb)x+Cb^2+Eb+F=0$,

$$(A+Ck^2)x^2+(D-Ek-2Ckb)x+Cb^2+Eb+F=0. \qquad (*)$$

设 S,M,T,N 的坐标分别为 (x_i,y_i)，$i=1,2,3,4$，ST 与 MN 的倾斜角分别为 θ_1,θ_2 $(\theta_1,\theta_2\in[0,\pi))$，则

$\theta_1+\theta_2=\pi$ 或 $\theta_1=\theta_2=0\Leftrightarrow\tan\theta_1+\tan\theta_2=0$

$$\Leftrightarrow\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}+\frac{y_2-y_4}{x_2-x_4}=0\Leftrightarrow\frac{x_1+x_3}{x_1-x_3}+\frac{x_2+x_4}{x_2-x_4}=0\Leftrightarrow x_1x_2=x_3x_4.$$

因 x_1,x_2 与 x_3,x_4 分别是（$*$）式两方程的根，有 $x_1x_2=x_3x_4=\dfrac{Cb^2+Eb+E}{A+Ck^2}$，从而 θ_1 与 θ_2 互补或同时为零.

性质 12 若直线 $l:ax+by=c(c\neq0)$ 与圆锥曲线 $\Gamma:Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的两交点为 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 满足齐次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+(Dx+Ey)\cdot\frac{ax+by}{c}+F\left(\frac{ax+by}{c}\right)^2=0.$$

性质 13 过圆锥曲线上的一个定点 M 任作两条互相垂直的弦 MP，MQ，若曲线为非等轴双曲线，则直线 PQ 必过定点；若曲线为等轴双曲线，则直线 PQ 必有定向.

注 当定点 $M(x_0,y_0)$ 在(1)抛物线 $y^2=2px$ 上时，过定点 $(x_0+2p,-y_0)$；(2)椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上时，过定点 $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0\right)$；(3)双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$(a>0,b>0)$上时，$a\neq b$，过定点$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0,-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_0\right)$，$a=b$ 则 PQ 有定向，平行于定直线 $y=-\frac{y_0}{x_0}x$.（见《数学通报》2001 第 9 期）

性质 14 圆锥曲线（包括圆）的半曲线上的周角（或直径所张角）两边斜率（斜率存在）之积为定值.

注 对于圆 $x^2+y^2=r^2$，直径所张角的两边斜率乘积为 -1；对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，直径所张角的两边斜率乘积为 $-\frac{b^2}{a^2}$；对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，直径所张角的两边斜率乘积为$\frac{b^2}{a^2}$；对于抛物线 $y^2=2px$，直径所张角的两边斜率乘积为 0.（见《数学通报》2000 年第 11 期）

性质 15 过圆锥曲线上一点作 90°的张角所对的动弦必过定点.

特别地，设曲线上的点为(x_0,y_0)对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，动弦过定点$\left(\frac{e^2}{2-e^2}x_0,\frac{e^2}{2-e^2}y_0\right)$；对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，动弦过定点$\left(\frac{e^2}{2-e^2}x_0,\frac{e^2}{2-e^2}\cdot y_0\right)$；对于抛物线 $y^2=2px(p>0)$，动弦过定点$(x_0+2p,-y_0)$.

性质 16 若直线 AB 的方程为 $F_1(x,y)=0$，直线 BC 的方程为 $F_2(x,y)=0$，直线 CD 的方程为 $F_3(x,y)$，直线 DA 的方程为 $F_4(x,y)=0$，则方程 $F_1(x,y)\cdot F_3(x,y)+\lambda F_2(x,y)\cdot F_4(x,y)=0$ 表示过 A,B,C,D 四点的二次曲线方程（其中 λ 为参数）.

性质 17 圆锥曲线的内接三角形面积与对应的切线三角形面积之比记为 δ，则

（Ⅰ）椭圆型圆锥曲线　$0<\delta<2$；

（Ⅱ）抛物线型圆锥曲线　$\delta=2$；

（Ⅲ）双曲线型圆锥曲线　$\delta>2$.

注 其证明见《数学通报》1999 年第 7 期.

【典型例题与基本方法】

例 1 设抛物线的顶点在原点 O，F 为焦点，PQ 为过 F 的弦，$|OF|=a$，$|PQ|=b$，求 $S_{\triangle OPQ}$.　　（1991 年全国高中联赛题）

解 $e=1,p=2|OF|=2a,l=|PQ|=b$.

设弦 PQ 的方程为 $y=k(x-a)$，即 $kx-y-ak=0$. 由性质 2，知 $k^2=\frac{e^2l}{l-2ep}-1=$

$\frac{4a}{b-4a}$,点 O 到 PQ 的距离 $h=\frac{ak}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2a\sqrt{a}}{b}$,于是 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}bh=a\sqrt{ab}$.

例 2 给定曲线族 $2(2\sin\theta-\cos\theta)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)y=0$,$\theta$ 为参数,求该曲线族在直线 $y=2x$ 上所截得的弦长的最大值. (1995 年全国高中联赛题)

解 显然曲线族及直线 $y=2x$ 都过原点,将 $y=2x$ 代入曲线族得 $(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta-\cos\theta+1)x=0$,注意到 $2\sin\theta-\cos\theta+3=\sqrt{5}\sin(\theta-\arctan\frac{1}{2})+3\neq0$,方程的根为 $x_1=0,x_2=\frac{8\sin\theta-\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3}$.

设所截弦长为 l,则 $l=\sqrt{1^2+2^2}|x_2-x_1|=\sqrt{5}|x_2|$.

设 $x_2=l$,则 $(8-2t)\sin\theta+(1+t)\cos\theta=3t+1$,即 $\sin(\theta+\varphi)=\frac{3t-1}{\sqrt{(8-2t)^2+(1+t)^2}}$,则由 $\left|\frac{3t-1}{\sqrt{(8-2t)^2+(1+t)^2}}\right|\leqslant1$ 有 $4t^2+24t-64\leqslant0$,即 $-8\leqslant t\leqslant2(t\neq0)$.故 $|t|\leqslant8$,等号成立当且仅当 $t=-8$,即 $\cos\varphi=\frac{24}{25},\sin\varphi=\frac{7}{25}$ 时,$\sin(\theta+\varphi)=-1$,故当 $\theta=\frac{3\pi}{2}+\arcsin\frac{7}{25}$ 时,$|t|_{\min}=8\sqrt{5}$,即弦长最大值为 $8\sqrt{5}$.

例 3 设曲线 $C_1:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$,曲线 $C_2:x+y=1$,P 是 C_2 上一点,射线 OP 交 C_1 于 R.又点 Q 在 OP 上,且满足 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$,当 P 在曲线 C_2 上移动时,求 Q 点的轨迹方程.

解 记 $f(x,y)=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}$,$g(x,y)=x+y$.

注意到性质 9,又 $f(tx,ty)=\frac{(tx)^2}{3}+\frac{(ty)^2}{4}=t^2(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4})=t^2f(x,y)$,$g(tx,ty)=tx+ty=t\cdot g(x,y)$,从而点 Q 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=x+y(x+y>0)$,即

$$\frac{(x-\frac{3}{2})^2}{\frac{21}{4}}+\frac{(y-2)^2}{7}=1\text{(除去原点)}.$$

注 此例的类似题可参见 1995 年全国高考题第 26 题.

例 4 已知椭圆 $C:(x-2)^2+\frac{y^2}{4}=1$,直线 $l:x-y+1=0$ 和点 $R(1,4)$.

(Ⅰ)在椭圆 C 的内部寻求一点 M,要求满足以下条件:过 M 的直线若与直线 l 交于点 Q,与椭圆 C 交于两点 A,B,则必有 $\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|AQ|}{|QB|}$.试问这样的点 M 是否存在?

(Ⅱ)过点 R 引直线交椭圆于 E,F 两点,若 $|RE|=|EF|$,求直线 EF 的方程.

解 (Ⅰ)设点 Q 的坐标为$(a,a+1)$(a 为参数),椭圆 C 的方程可以化为 $4x^2+y^2-16x+12=0$,运用性质 8,在此方程中,以 ax 代 x^2,$(a+1)y$ 代 y^2,$\frac{x+a}{2}$代 x,则得 $4ax+(a+1)y-16\cdot\frac{x+a}{2}+12=0$,可化为 $y-8x+12+a(4x+y-8)=0$,它表示经过直线 $y-8x+12=0$ 和直线 $4x+y-8=0$ 的交点$(\frac{5}{3},\frac{4}{3})$的直线系方程.

点$(\frac{5}{3},\frac{4}{3})$在椭圆 C 内,它就是所求的点 M.

(Ⅱ)设 P 是线段 EF 上的点,且满足$\frac{|EP|}{|PF|}=\frac{|ER|}{|RF|}$.

在椭圆 C 的方程 $4x^2+y^2-16x^2+12=0$ 中,运用性质 8,以 x 代 x^2,$4y$ 代 y^2,$\frac{x+1}{2}$代 x,便有 $4x+4y-16\cdot\frac{x+1}{2}+12=0$,即 $x-y-1=0$.

由于 P 点满足$\frac{|EP|}{|PF|}=\frac{|ER|}{|RF|}$,所以它一定在直线 $x-y-1=0$ 上,故设其坐标为$(b,b-1)$.

又 R 是椭圆 C 外的点,P 是椭圆 C 内的点,且$\frac{|EP|}{|PF|}=\frac{|ER|}{|RF|}=\frac{1}{2}$,所以点 E 是有向线段$\overrightarrow{RP}$的内分点,并可求得$\frac{RE}{EP}=3$.

设点 E 的坐标为(x,y),则 $x=\frac{1+3b}{1+3}=\frac{3b+1}{4}$,$y=\frac{4+3(b-1)}{1+3}=\frac{3b+1}{4}$,将其代入 C 的方程$(x-2)^2+\frac{y^2}{4}=1$,并整理,得 $45b^2-162b+133=0$,由此求得 $b=\frac{7}{3}$或 $b=\frac{19}{15}$,所以 P 点坐标为$(\frac{7}{3},\frac{4}{3})$或$(\frac{19}{15},\frac{4}{15})$.

由 R,P 两点的坐标,可求得直线 EF 的方程为 $2x+y-6=0$ 或 $14x+y-18=0$.

例 5 过抛物线 $\Gamma:y^2=2px$ 的顶点 O 作两条互相垂直的弦 OA,OB.(Ⅰ)求证:直线 AB 恒过定点 M_0,并求出其坐标;(Ⅱ)求顶点 O 在 AB 上的射影 H 的轨迹方程.

证明 (Ⅰ)设 $AB:ax+by=1$(a,b 不同时为零),由性质 12,得齐次方程:$y^2=2px(ax+by)$.令 $t=\frac{y}{x}$,得 $t^2-2bpt-2ap=0$,从而由题设 $t_1\cdot t_2=-1$,得 $a=\frac{1}{2b}$,即 AB 的方程为$\frac{1}{2p}x+by=1$,此直线过定点 $M_0(2p,0)$.

(Ⅱ)设 $H(x_0,y_0)$,代入$\frac{1}{2p}x+by=1$,得 $x_0+2pby_0=2p$.

又 $OH\perp AB$,则$(\frac{y_0}{x_0})\cdot(-\frac{a}{b})=-1$,得 $cy_0=bx_0(x_0\neq 0)$.

由 $a=\frac{1}{2p}$代入,得 $y_0=2pbx_0$.

此方程与 $x_0+2pby_0=2p$ 联立消去 b,得所求轨迹方程:

$x^2+y^2-2px=0(x\neq 0)$.

例6 一直线的斜率等于椭圆的离心率,且过此椭圆的准线与焦点轴的交点.求证:这条直线与椭圆相切.

证明 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,准线与焦点轴的交点 $K(-\frac{a^2}{c},0)$,则过 K 且斜率等于$\frac{c}{a}$的直线方程为$y=\frac{c}{a}(x+\frac{a^2}{c})$.当 $x=-c$ 时,

$$y=\frac{c}{a}(-c+\frac{a^2}{c})=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}.$$

这就是说直线与椭圆有公共点 $P(-c,\frac{b^2}{a})$,而 P 是过椭圆焦点的通径,由性质 13 的推论 2,知这条直线与椭圆相切.

例7 求证:抛物线上任取四点所组成的四边形不可能是平行四边形.

证明 证其等价命题:过平行四边形四个顶点的二次曲线不是抛物线.

设 $Ax+By+C_i=0(i=1,2)$,$A'x+B'y+C'_i=0(i=1,2)$分别为一平行四边形的两组对边,则过其四个顶点的二次曲线系为

$(Ax+By+C_1)(Ax+By+C_2)+\lambda(A'x+B'y+C'_1)(A'x+B'y+C'_2)=0$,其中 x^2 的系数为 $A^2+\lambda A'^2$,y 的系数为 $B^2+\lambda B'^2$,xy 的系数为 $2(AB+\lambda A'B')$.

$$\begin{aligned}\text{而 }\Delta&=4(AB+\lambda A'B')^2-4(A^2+\lambda A'^2)(B^2+\lambda B'^2)\\&=-4\lambda(AB'-A'B)^2.\end{aligned}$$

又 $\lambda\neq 0$,$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$,故 $\Delta\neq 0$,故二次曲线系方程不表示抛物线.命题获证.

例8 在抛物线的准线上任取一点 C_1,使 C_1 不在抛物线的对称轴上,过 C_1 作抛物线的切线,设切点为 A_1,B_1,直线 A_1B_1 交准线于 C_2.又过 C_2 作抛物线的切线,设切点为 A_2,B_2,直线 A_2B_2 交准线于 C_3.如此继续,得到一个点列 C_1,C_2,C_3,试求此点列的特性.

解 设抛物线为 $y^2=2px$,则 $F(\frac{p}{2},0)$,$C_1(-\frac{p}{2},y_1)$,$C_2(-\frac{1}{2}p,y_2)$.

由性质 3 的推论 2,知 A_1B_1 过焦点 F,且 $A_1B_1\perp C_1F$,即 $C_2F\perp C_1F$.则 $\frac{y_1}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}\cdot\frac{y_2}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}=-1$,即 $y_1y_2=-p^2$.

同理,A_2B_2 过焦点 F,且 A_2B_2 即 $C_3F\perp C_2F$.这样,直线 C_1F,C_3F 同过焦点 F 且都与 C_2F 垂直,故 C_3F 与 C_1F 重合,于是 C_3 与 C_1 重合.

如此类推,于是可知点列 $C_1,C_2,C_3,\cdots$ 具有以下性质:(1) $C_{2n+1}=C_1$,$C_{2n}=C_2$(n 是正整数);(2) $y_1y_2=-p^2$.

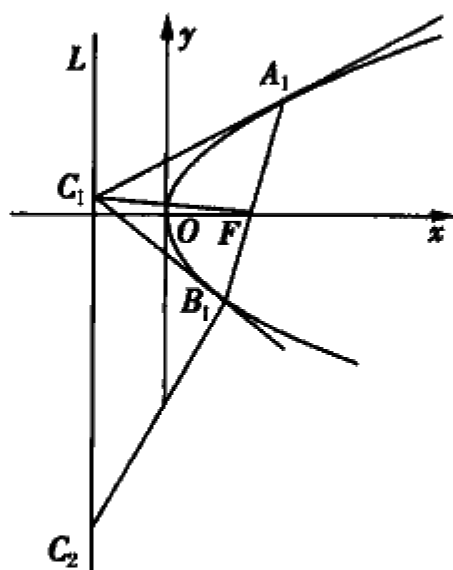


图 25－4

例 9 已知过点(0,1)的直线 l 与曲线 $C:y=x+\frac{1}{x}(x>0)$交于两个不同的点 M 和 N. 求曲线 C 在点 M、N 处的切线的交点轨迹.

(2007 年全国高中联赛题)

解 设点 M、N 的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2),曲线 C 在点 M、N 处的切线分别为 l_1、l_2,其交点 P 的坐标为(x_P,y_P).

若直线 l 的斜率为 k,则 l 的方程为 $y=kx+1$.

由方程组 $\begin{cases}y=x+\frac{1}{x},\\ y=kx+1\end{cases}$ 消去 y 得 $(k-1)x^2+x-1=0$.

由题意知,该方程在$(0,+\infty)$内有两个相异的实根 x_1,x_2,故 $k\neq1$,且

$$\Delta=1+4(k-1)>0,x_1+x_2=\frac{1}{1-k}>0,x_1x_2=\frac{1}{1-k}>0. \qquad (*)$$

解得 $\frac{3}{4}<k<1$.

对 $y=x+\frac{1}{x}$ 求导,得 $y'=1-\frac{1}{x^2}$,则 $y'|_{x=x_1}=1-\frac{1}{x_1^2}$,$y'|_{x=x_2}=1-\frac{1}{x_2^2}$.于是,直线 l_1 的方程为 $y-y_1=(1-\frac{1}{x_1^2})(x-x_1)$,即 $y-(x_1+\frac{1}{x_1})=(1-\frac{1}{x_1^2})(x-x_1)$,亦即

$$y=(1-\frac{1}{x_1^2})x+\frac{2}{x_1}.$$

同理可求得直线 l_2 的方程为 $y=(1-\frac{1}{x_2^2})x+\frac{2}{x_2}$.

由同上述两方程相减,有 $(\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_1^2})x_P+\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}=0$.因 $x_1\neq x_2$,则

$x_P=\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$.由(*)式知 $x_P=2$.

由前述两方程相加,有 $2y_P=[2-(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2})]x_P+2(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})$.

其中$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1$,$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2-x_2^2}=1-2(1-k)=2k-1$,即得 $2y_P=(3-2k)x_P+2$. 而 $x_P=2$,得 $y_P=4-2k$.

又$\frac{3}{4}<x<1$,得　$2<y_P<\frac{5}{2}$.

即点 P 的轨迹为$(2,2)$,$(2,\frac{5}{2})$两点之间的线段(不含端点).

【模拟实战】

习题 A

1. 已知中心在原点,实轴在 x 轴的双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$,直线 $y=2x+\frac{\sqrt{210}}{3}$与双曲线相交且所得弦长为 4,求双曲线方程.
2. 过双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的焦点且斜率为$\frac{2}{21}\sqrt{21}$的直线被双曲线所截,求截得的弦长.
3. 设过 $A(2,1)$的直线 l 与双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 交于 P_1,P_2 两点,求线段 P_1P_2 的中点的轨迹方程.
4. 设曲线 $C_1:x^2+y^2=1$,曲线 $C_2:x+y=1$,P 是C_2 上一点,射线 OP 交C_1 于 R.又点 Q 在OP 上,且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.当 P 在曲线 C_2 上移动时,求 Q 点的轨迹方程.
5. 已知直线 $l_1:x-2y-1=0$ 和 $l_2:2x-y-2=0$,过点 $Q(2,-1)$作直线交 l_1 于 A,交 l_2 于 B,P 是动直线AB 上不同于Q 的一点,且$\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{|AQ|}{|QB|}$.求点 P 的轨迹.
6. 设动直线 l 与定椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相交于 A,B 两点.若 $OA\perp OB$,求证直线 l 恒与定圆L 相切,并求 L 的方程.

7. 设 P 为过椭圆的一个焦点且垂直于焦点轴的弦的一个端点，若点 P 的法线恰好过短轴的一个端点，求椭圆的离心率.

8. 已知二次曲线切直线 $x-2y+3=0$ 于点 $P(-1,1)$，切直线 $5x+2y-6=0$ 于点 $Q(2,-2)$，且经过点 $R(1,0)$. 求此二次曲线的方程.

习题 B

1. 设圆锥曲线的焦点为 F，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是圆锥曲线上的几个点，且有$\angle A_1FA_2=\angle A_2FA_3=\cdots=\angle A_nAF_1$，则$\frac{1}{|FA_1|^2}+\frac{1}{|FA_2|^2}+\cdots+\frac{1}{|FA_n|^2}$为定值.

2. 设$\triangle ABC$ 的三个顶点在圆锥曲线Γ 上，则其两边 AB 和 AC 与Γ 的一条对称轴夹角相等的充要条件是：边 BC 和切Γ 于点 A 的直线 l 与Γ 的一条对称轴的夹角相等.

3. 设圆与某一圆锥曲线有四个交点，依次为 A,B,C,D，则公共弦 AC,BD 与焦点轴的倾角互补.

4. 过任意圆锥曲线的弦 PQ 的中点 O，作两弦 AB,CD. 如过 A,B,C,D 的圆锥曲线(包括退化圆锥曲线)与直线 PQ 交于 R,S 两点，求证：$|OR|=|OS|$.

5. 已知 F 是焦点，P,Q 是圆锥曲线上两动点，而$\angle PFQ=2\delta$(δ 为锐角). 求证：(Ⅰ)过点 P,Q 的交点的轨迹是以 F 为焦点的圆锥曲线；(Ⅲ)直线 PQ 恒切于一以 F 为焦点的圆锥曲线.

6. 设 $ABCDEF$ 是圆锥曲线的内接六边形，三对对边 AB 和 DE 交于 M 点，BC 和 EF 交于 N 点，CD 和 FA 交于 P 点. 求证：M,N,P 三点共线.

第二十六章 圆锥曲线的相关性质及应用

【基础知识】

椭圆、抛物线和双曲线，既可看作平面截圆锥面所得到的截线，又有统一定义与分别定义，因而，这几种曲线的同一性和特殊性决定了它们的几何性质具有相同性和不同性．所以，当我们在一种曲线上得到某项性质时，也容易在其他曲线上找到相关的性质．

由于椭圆、抛物线和双曲线可以看作与无穷远直线分别有零个交点、一个交点和两个交点，又双曲线、椭圆各有唯一的中心且为有穷远点，而抛物线的中心为无穷远点，由此，可得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$y^2=2px$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$这三种曲线的互变规律(注意 $e\in(0,1)$，$e=1$，$e>1$)：

规律 1 椭圆的两焦点连线先演变成抛物线上自焦点出发的射线(中心 O 由有穷远点演变成右边无穷远点)，继而演变成双曲线轴上自焦点出发的两条无重合的射线(中心又由无穷远点演变成左边有穷远点)；

规律 2 椭圆内部含焦点区域(或外部不含焦点的区域)，先演变成抛物线的右侧含焦点区域(或左侧不含焦点的外部区域)，继而演变成双曲线左右两支含焦点的内部区域(或左右两支中间不含焦点的外接区域)．

关注三种曲线性质的相关性，可以根据一些已有的知识，通过类比的途径进行探索，发掘出更多的知识，也可以将某些命题适当改编，而得到一些新的相关命题．

【典型例题与基本方法】

例 1 F_1,F_2 分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点 P 是椭圆上的一点，则$\angle PF_1F_2$ 所含的$\triangle PF_1F_2$ 的旁切圆必切于椭圆的右顶点 A_2，$\angle PF_2F_1$ 所含的$\triangle PF_1F_2$ 的旁切圆必切于椭圆的左顶点 A_1．

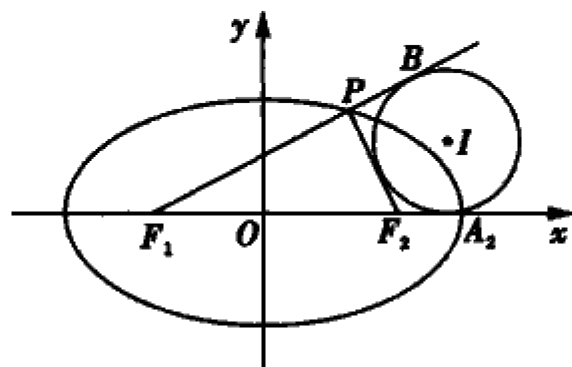


图 26－1

证明 设 A'_2，B 为旁切圆 I 与边 F_1F_2，F_1P 的延

长线相切的切点，因$|F_1A'_2|=|F_1P|$，$|F_1A'_2|+|F_1B|=|F_1F_2|+|F_1P|+|PF_2|=2(a+c)$，从而$|F_1A'_2|=a+c$，故点$A'_2$就是椭圆的右顶点，即$A'_2=A_2$.

同理，可证圆切于左顶点的情形.

由于$\odot I$既与椭圆含焦点区域有关，也与不含焦点的区域有关，由互变规律，有对于双曲线、抛物线的如下结论：

结论 1(1) 若F_1,F_2分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，点$P$是双曲线右支上的一点，则$\triangle PF_1F_2$的内切圆必切于双曲线的右顶点；若点$P$是双曲线左支上的一点，则$\triangle PF_1F_2$的内切圆必切于双曲线的左顶点.

结论 1(2) 若F为抛物线$y^2=2px$上的一点，点P是抛物线上的一点，过点P作平行于抛物线的对称轴(x轴)的直线l，则与x轴、PF、直线l同时相切的圆必切于抛物线的顶点.

例 2 设P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上异于长轴顶点的任一点，$F_1,F_2$是椭圆的两个焦点，$I$是$\triangle PF_1F_2$的内心，$PI$的延长线交$F_1F_2$于$T$，则$|TI|$与$|IP|$的比等于椭圆的离心率.

证明 如图 26-2，I为$\triangle PF_1F_2$的内心，连F_1I,F_2I，则有$\frac{|TI|}{|IP|}=\frac{|F_1T|}{|F_1P|}$，$\frac{|TI|}{|IP|}=\frac{|F_2T|}{|F_2P|}$.

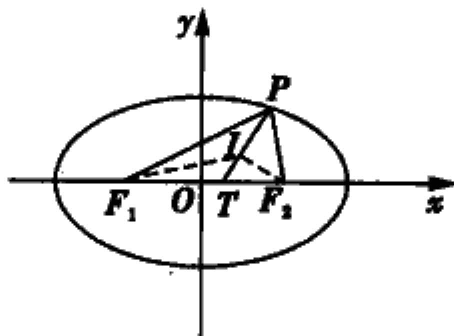


图 26-2

由等比定理、椭圆定义及离心率定义，得

$$\frac{|TI|}{|IP|}=\frac{|F_1T|}{|F_1P|}=\frac{|F_2T|}{|F_2P|}=\frac{|F_1T|+|F_2T|}{|F_1P|+|F_2P|}=\frac{2c}{2a}=e.$$

即证.

由互变规律，对于双曲线、抛物线有下述结论：

结论 2(1) 将例 2 中椭圆、内心分别改为双曲线、旁心即可.

结论 2(2) 设P是抛物线$y^2=2px(p>0)$上异于顶点任一点，F为其焦点，Px'与x轴平行且同向，$\angle x'Fx$和$\angle PFx$的内角平分线交于I，PI交Fx于T，则$\frac{|TI|}{|IP|}=e$.

例 3 如图 26-3，A_1,A_2分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点，$F_2$为其右焦点，$l$为$F_2$对应的准线，$P$是椭圆上(除$A_1,A_2$外)任一点，设$A_1P,A_2P$分别与$l$交于$M,N$.则：(Ⅰ)$MF_2\perp NF_2$；(Ⅱ)以$MN$为直径的圆与$PF_2$相切于$F_2$；(Ⅲ)$F_2M$平分$\angle PF_2A_2$.

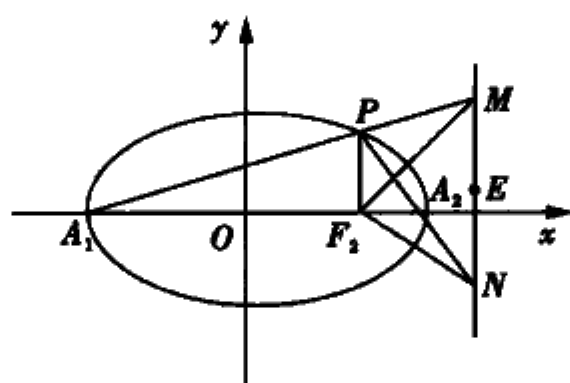


图 26－3

证明 （Ⅰ）设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，$F_2(c,0)$，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$l:x=\frac{a^2}{c}$，则 A_1P，A_2P 的方程分别为 $y=\frac{b\sin\theta}{a(\cos\theta+1)}(x+a)$，$y=\frac{b\sin\theta}{a(\cos\theta-1)}(x-a)$．于是易求得

$$M\left(\frac{a^2}{c},\frac{(a+c)b\sin\theta}{c(\cos\theta+1)}\right),N\left(\frac{a^2}{c},\frac{(a-c)b\sin\theta}{c(\cos\theta-1)}\right),$$

从而 $k_{MF_2}\cdot k_{NF_2}=\frac{(a+c)\cdot\sin\theta}{b(\cos\theta+1)}\cdot\frac{(a-c)\cdot\sin\theta}{b(\cos\theta-1)}=-1$，所以 $MF_2\perp NF_2$．

（Ⅱ）设 MN 的中点为 E，则 $E\left(\frac{a^2}{c},\frac{b(c-a\cos\theta)}{c\sin\theta}\right)$，由 $k_{EF_2}\cdot k_{PF_2}=\frac{c-a\cos\theta}{b\sin\theta}\cdot\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-c}=-1$，知 $EF_2\perp PF_2$，故⊙E 与 PF_2 相切于点 F_2．

（Ⅲ）因为 l 垂直于 x 轴，则 $\angle NMF_2$ 与 $\angle MF_2A_2$ 互余．又 $\angle NMF_2$ 与 $\angle MNF_2$ 互余，所以 $\angle MF_2A_2=\angle MNF_2$．又弦切角 $\angle PF_2M=\angle MNF_2$，所以 $\angle PF_2M=\angle MF_2A_2$，故 F_2M 平分 $\angle PF_2A_2$．

由互变规律，对于双曲线、抛物线有如下结论：

结论 3(1) A_1，A_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点，F_2 为右焦点，l 是与 F_2 对应的准线，P 是双曲线右支上异于 A_2 的任一点，设 A_1P，A_2P 分别交 l 于 M，N，则（Ⅰ）$MF_2\perp NF_2$；（Ⅱ）以 MN 为直径的圆与 PF_2 相切于 F_2；（Ⅲ）F_2M 平分 $\angle PF_2A_2$．

结论 3(2) A，F，l 分别为抛物线 $y^2=2px$ 的顶点，焦点，准线，P 为抛物线上异于 A 的任一点，AP 交 l 于 N，PM 平行于对称轴且交 l 于 M，则（Ⅰ）$MF\perp NF$；（Ⅱ）以 MN 为直径的圆与 PF 相切于 F；（Ⅲ）FM 平分 $\angle PFA$．

注 例 3 及结论 3(1)，(2)中的条件若变为：过焦点 F_2 的直线与曲线交于 P，Q（不与 A_1，A_2 重合），A_1P（抛物线中为 $MP/\!/x$ 轴）和 A_2Q 交于 M，A_2P 和 A_1Q（抛物线中为 $NP/\!/x$ 轴）交于 N，则有（Ⅰ）$MF_2\perp NF_2$；（Ⅱ）以 MN 为直径的圆与 PQ 相切于 F_2；（Ⅲ）F_2M 平分 $\angle PF_2A_2$，F_2N 平分 $\angle QF_2A_2$．

例 4 在椭圆中，（Ⅰ）焦点弦的一端点和相应准线上的一点的连线过焦点轴上的一个顶点的充要条件是另一端点和准线上这点的连线过焦点轴的另一顶点；（Ⅱ）不过中心及焦点轴顶点的一条弦的两端点和其他轴上的两顶点的连线的交点在准线上的充要条件是这条弦过该准线相应的焦点．

证明 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,弦 AB 的两端点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,如图 26-4.

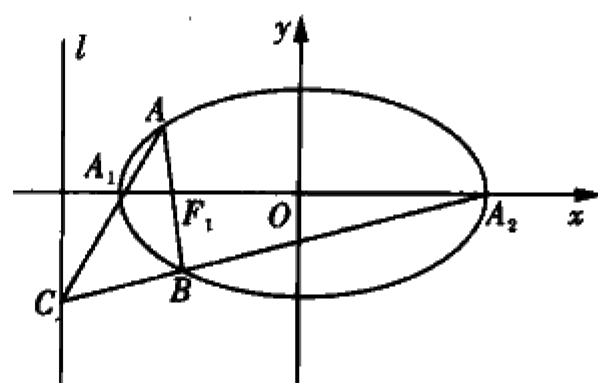


图 26-4

又设 $A'_1(a_1,0)$,$A'_2(a_2,0)$,其中 $a_1\neq x_1$,$a_2\neq x_2$(与下面的 $A_1(-a,0)$,$A_2(a_2,0)$不同,但最终要证它们分别重合),则直线 AA'_1 和 BA'_2 的方程分别为

$$y=\frac{y_1}{x_1-a_1}(x-a_1),\ y=\frac{y_2}{x_2-a_2}(x-a_2).$$

联立两方程消去 y 并整理,得

$$[(x_2y_1-x_1y_2)-a_2y_1+a_1y_2]x=a_1x_2y_1-a_2x_1y_2-a_1a_2(y_1-y_2). \quad ①$$

又设弦 AB 的方程为 $y=k(x-m)(k\neq0,m\neq0)$,代入椭圆方程消去 x 并整理,得

$$(a^2k^2+b^2)y^2+2b^2mky+b^2k^2(m^2-a^2)=0,$$

则 $$y_1+y_2=-\frac{2b^2mk}{a^2k^2+b^2},\ y_1y_2=\frac{b^2k^2(m^2-a^2)}{a^2k^2+b^2}.$$

于是 $$x_1y_2+x_2y_1=(\frac{y_1}{k}+m)y_2+(\frac{y_2}{k}+m)y_1=\frac{2y_1y_2}{k}+m(y_1+y_2)=\frac{a^2}{m}(y_1+y_2). \quad ②$$

又由 A,$M(m,0)$,B 三点共线,有$\frac{y_1}{x_1-m}=\frac{y_2}{x_2-m}$,即

$$x_1y_2-x_2y_1=-m(y_1-y_2). \quad ③$$

②+③得 $$x_1y_2=\frac{1}{2}[\frac{a^2}{m}(y_1+y_2)-m(y_1-y_2)]. \quad ④$$

②-③得 $$x_2y_1=\frac{1}{2}[\frac{a^2}{m}(y_1+y_2)+m(y_1-y_2)]. \quad ⑤$$

易见,若 $AB\perp x$ 轴时,斜率 k_{AB}不存在,设 AB 的方程为 $x=m$,则③,④,⑤仍成立.

把③,④,⑤代入①并整理,得

$$[m(y_1-y_2)-a_2y_1+a_1y_2]x$$
$$=\frac{1}{2}\frac{a^2}{m^2}(a_1-a_2)(y_1+y_2)+[\frac{1}{2}(a_1+a_2)m-a_1a_2](y_1-y_2). \quad ⑥$$

(Ⅰ)在⑥式中,令 $x=-\frac{a^2}{c}$,$m=-c$,整理得

$$[a^2c+a_1a_2c+\frac{1}{2}(a_1+a_2)(a^2+c^2)](y_1-y_2)=0. \quad ⑦$$

设 C 为准线上的点,则 AC 过 $A_1(-a,0)\Leftrightarrow a_1=-a$

$$\Leftrightarrow[ac(a-a_2)+\frac{1}{2}(-a+a_2)\cdot(a^2+c^2)]\cdot(y_1-y_2)=0$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_2-a)(a-c)^2(y_1-y_2)=0 \Leftrightarrow a_2=a$

$\Leftrightarrow BC$ 过点 $A_2(a,0)$.

(Ⅱ)在⑥式中,令 $a_1=-a, a_2=a$,得

$$[m(y_1-y_2)-ay_1-ay_2]x=-\frac{a^3}{m}(y_1+y_2)+a^2(y_1-y_2), \text{即 } x=\frac{a^2}{m}. \quad ⑧$$

则 AB 过焦点 $F(-c,0) \Leftrightarrow m=-c \Leftrightarrow x=-\frac{a^2}{c}$

$\Leftrightarrow AA_1, BA_2$ 的交点 C 在准线 $x=-\frac{a^2}{c}$ 上.

注 (1)由例 4 即可推知:椭圆焦点弦的两端点和其焦点轴上的两顶点的连线的交点 C 的轨迹是与该焦点相应的准线.(2)例 4 及(1)中的焦点换为定点$(m,0)$(即用 m 换 c),结论仍成立.

由互变规律,对于双曲线、抛物线有下述结论:

结论 4(1) 将例 3 中的椭圆改为双曲线(或用 $-b^2$ 代 b^2)即可.

结论 4(2) 在抛物线中,(Ⅰ)焦点弦的一个端点和准线上一点的连线过抛物线顶点的充要条件是该弦的另一端点和准线上这点的连线平行于抛物线的对称轴;(Ⅱ)不过顶点的一条弦的一端点和抛物线顶点的连线与过另一端点且平行于抛物线对称轴的直线的交点在准线上的充要条件是这条弦过抛物线的焦点.

注 结论 4(1),(2)也有例 4 中的注的结论.

【解题思维策略分析】

1. 注意曲线的同型性及椭圆的特殊情形——圆所具有的性质

例 5 设 $M(m,0)(m\neq \pm a)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点轴上一点,过 M 作割线 MAB, MCD 交椭圆于 A,B,C,D 四点.(Ⅰ)若 AD, BC 分别交直线 $x=m$ 于 P, Q,则 $|MP|=|MQ|$;(Ⅱ)设 O 为中心,若 $\angle OMA=\angle OMC$,则 AD 与 BC 交于定点 $N(\frac{a^2}{m},0)$ 且 $\angle ANM=\angle BNR$(R 为 NM 反向延长线上的点);(Ⅲ)若 AD(或 BC)与 x 轴交于 $N(\frac{a^2}{m},0)$,则 $\angle OMA=\angle OMC$,且 $\angle ANM=\angle BNR$.

证明 (Ⅰ)设割线 MAB, MCD 的方程分别为 $y=k_1(x-m)$, $y=k_2(x-m)$,如图 26-5.

考虑曲线系

$$\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+\mu[y-k_1(x-m)][y-k_2(x-m)]=0. \quad ①$$

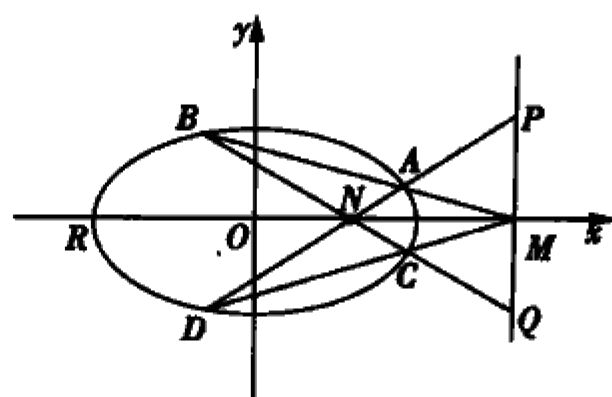


图 26-5

令 $x=m$，得 $y=\pm\sqrt{\dfrac{a^2b^2\lambda-b^2m^2\lambda}{a^2\lambda+\mu}}$，从而

$|MP|=|MQ|$.

(Ⅱ)在①式中 $y=0$，有

$(\lambda b^2+\mu k_1k_2)x^2-2m\mu k_1k_2x+\mu k_1k_2m^2-a^2b^2\lambda=0$. ②

由 $\angle OMA=\angle OMC$，有 $k_1=-k_2$，则可设 $k_1k_2=-k^2$. 若 $\lambda\neq0,\mu\neq0$，由对称性，此时 AD 与 BC 的交点 N 在 x 轴上. 设 AD，BC 交 x 轴的横坐标分别为 x_1,x_2，则 $x_1=x_2$，从而 $x_1=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{m\mu k^2}{\lambda b^2-\mu k^2}$，$x_1^2=x_1x_2=-\dfrac{\mu k^2m^2+a^2b^2\lambda}{\lambda b^2-\mu k^2}$.

由 $\left(-\dfrac{m\mu k^2}{\lambda b^2-\mu k^2}\right)^2=-\dfrac{\mu k^2m^2+a^2b^2\lambda}{\lambda b^2-\mu k^2}$，得 $\lambda=\dfrac{a^2\mu k^2-\mu k^2m^2}{a^2b^2}$，于是

$x_1=-\dfrac{m\mu k^2}{\lambda b^2-\mu k^2}=\dfrac{a^2}{m}$.

又按对称性知 $\angle MNP=\angle MNQ=\angle BNR$.

(Ⅲ)若 AD 与 x 轴交于 $N(\dfrac{a^2}{m},0)$，以 $x_1=\dfrac{a^2}{m}$ 代入②式并化简，得

$(a^2-m^2)(\lambda a^2b^2+\mu k_1k_2)(a^2-m^2)=0$.

由 $a\neq\pm a$，有 $\mu k_1k_2=\dfrac{\lambda a^2b^2}{m^2-a^2}$.

又由②式及韦达定理，并注意上式有 $x_2=\dfrac{2m\mu k_1k_2}{\lambda b^2+\mu k_1k_2}-\dfrac{a^2}{m}=\dfrac{a^2}{m}$. 这说明 AD，BC 交于点 $N(\dfrac{a^2}{m},0)$. 又由(Ⅰ)知 Rt△PMN≌Rt△QMN，则 $\angle PNM=\angle QNM=\angle BNR$. 由对称性△$ANM$≌△$CNM$，从而 $\angle OMA=\angle OMC$.

注 将例 5 中的椭圆改为圆，结论仍成立.

由互变规律，对于双曲线、抛物线有下述结论：

结论 5(1) 将例 5 中的椭圆改为双曲线(或用 $-b^2$ 代 b^2)即可.

结论 5(2) 设 $M(-a,0)(a\neq0)$ 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 对称轴上一点，过 M 作两条割线 MAB，MCD 交抛物线于 A,B,C,D 四点.(Ⅰ)若 AD 和 BC 分别交直线 $x=-a$ 于 P,Q，则 $|MP|=|MQ|$；(Ⅱ)若 $\angle AMX=\angle CMX$，则 AD 与 BC 交于一定点 $N(a,0)$，且 $\angle ANM=\angle BNX$；(Ⅲ)若 AD(或 BC)经过点 $N(a,0)$，则 $\angle AMX=\angle CMX$，且 $\angle ANM=\angle BNX$.

例 6 设 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆 Γ 内部一定点(异于中心 O),过点 P 引直线 l 交椭圆于 A, B 两点,以 OA, OB 为邻边作平行四边形(当 A, O, B 共线时视为退化情形)$OAQB$,则点 Q 的轨迹是以 P 为中心且与椭圆 Γ 有相同离心率的椭圆 Γ',同时椭圆 Γ' 过 Γ 的中心.

证明 设椭圆方程为 $mx^2 + ny^2 = 1(m>0, n>0)$,又设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q(x, y)$,直线 l 的斜率为 k,其方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$,如图 26-6.

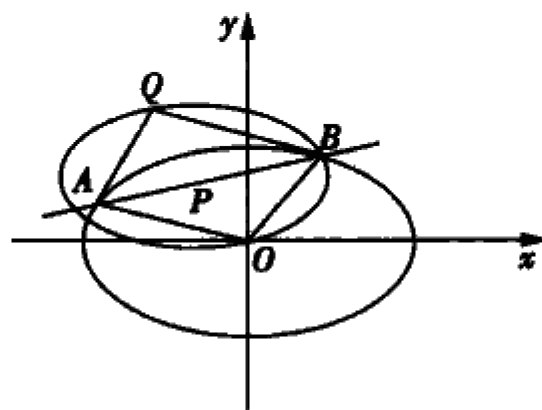


图 26-6

l 与 Γ 的方程联立消去 y,得

$(m + nk^2)x^2 + 2nk(y_0 - kx_0)x + n(y_0 - kx_0)^2 - 1 = 0$.

由于四边形 $OAQB$ 为平行四边形,所以

$x = x_1 + x_2 = \dfrac{2nk(kx_0 - y_0)}{m + nk^2}$, $y = y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 2x_0) + 2y_0 = -\dfrac{2m(kx_0 - y_0)}{m + nk^2}$,由此得 $\dfrac{y}{x} = -\dfrac{n}{m}k$.

又 $k = \dfrac{\frac{1}{2}y - y_0}{\frac{1}{2}x - x_0} = \dfrac{y - 2y_0}{x - 2x_0}$,即 $\dfrac{y}{x} = -\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{y - 2y_0}{x - 2x_0}$,亦即

$m(x - x_0)^2 + n(y - y_0)^2 = mx_0^2 + ny_0^2$.

若 l 的方程 $x = x_0$,则 Q 点坐标为 $(2x_0, 0)$,仍适合上式,故点 Q 的轨迹方程为上所求.

注 将例 6 中的椭圆改为圆结论也成立,即当曲线 Γ 为圆时,点 Q 的轨迹 Γ' 也为圆.

由互变规律,对于双曲线、抛物线也有下述结论:

结论 6(1) 将例 6 中椭圆改为双曲线即可,且 Γ' 与 Γ 的渐近线平行.

结论 6(2) 设 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px(p>0)$ 的内部一定点,过 P 作直线 l 交 Γ 于 A, B 两点,抛物线顶点为 O,以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OAQB$,则点 Q 的轨迹仍是抛物线 $\Gamma': (y - y_0)^2 = 2p(x - 2x_0) + y_0^2$,且与 Γ 有相同的焦准距和开口方向.

例 7 若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a>b>0)$ 的一个焦点 F 在直线 l 上的射影是 H,则直线 l 和椭圆相切(相交、相离)的充要条件是点 H 在圆 $x^2 + y^2 = a$ 上(内,外).

略证 设直线 $l: px + qy + r = 0$,焦点 $F(-c, 0)$.当 $q = 0$ 或 $p = 0$ 时分别讨论,易

知结论成立.当 $q\neq0$ 且 $p\neq0$ 时,将 l 的方程代入椭圆方程消去 y,得

$(a^2p^2+b^2q^2)x^2+2a^2prx+a^2(r^2-b^2q^2)=0$,其中 $\Delta=4a^2b^2q^2(a^2p^2+b^2g^2-r^2)$.

又过 F 且垂直于 l 的直线方程为 $y=\frac{q}{p}(x+c)$,与 l 的方程联立,得 H 的横坐标

$H_x=-\frac{pr+q^2c}{p^2+q^2}$.

记 $\Delta'=x_N^2+y_N^2-a^2=-\frac{a^2p^2+b^2q^2-r^2}{p^2+q^2}$.

于是 l 与椭圆相切(相交,相离)$\Leftrightarrow\Delta=(>,<)0$

$\Leftrightarrow\Delta'=(<,>)0\Leftrightarrow$点 H 在圆 $x^2+y^2=a$ 上(内,外).

注 将例 7 中的椭圆改为圆,结论也成立.

由互变规律,对于双曲线、抛物线也有下述结论:

结论 7(1) 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点在直线 l 上的射影是点 H,则直线 l 与双曲线相切(相交、相离)的充要条件是 H 在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上(外、内).

结论 7(2) 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点在直线 l 上的射影是点 H,则 l 与抛物线相切(相交、相离)的充要条件是点 H 在 y 轴上(右边,左边).

例 8 PQ 是椭圆的非直径(不过中心的弦),A_1、A_2 为椭圆长轴上两顶点,A_1P 和 A_2Q 相交于点 M,A_2P 和 A_1Q 相交于点 N,则 $MN\perp A_1A_2$.

证明 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$P(a\cos\alpha+b\cos\alpha)$,$Q(a\cos\beta,b\sin\beta)$,如图 26-7,则直线 A_1P、A_2Q 的方程分别为

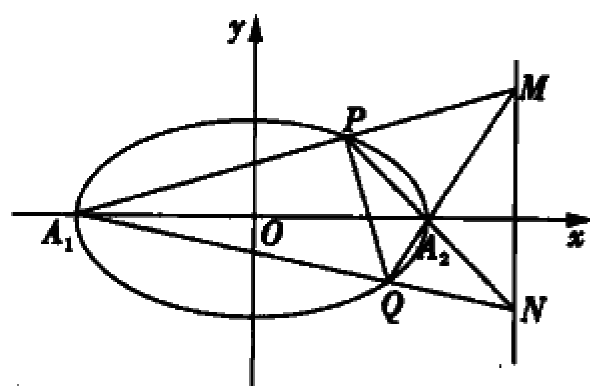


图 26-7

$y=\frac{b\sin\alpha}{a(\cos\alpha+1)}(x+a)$,$y=\frac{b\sin\beta}{a(\cos\beta-1)}(x-a)$.

由此求得点 M 的横坐标 $x_M=\frac{a\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$.

同理,求得点 N 的横坐标 $x_N=x_M$,故 $MN\perp A_1A_2$.

注 (ⅰ)若将例 8 的椭圆改为圆,A_1A_2 为圆的直径,则结论也成立;(ⅱ)若 PQ 是过椭圆焦点的弦,则直线 MN 是椭圆的准线.

由互变规律,对于双曲线、抛物线也有下述结论:

结论 8(1) 将例 8 的椭圆改为双曲线即可.

结论 8(2) PQ 是不过抛物线顶点 O 的任一弦,过 P_1Q 分别作抛物线对称轴的平

行线,交 OP,OQ 分别于点 M,N,则 MN 垂直于抛物线的对称轴.

注 结论 8(1)、(2)也有例 8 中的注(ⅱ)结论.

2. 注意曲线的互变性

例 9 设 A_1A_2 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴,$P_1P_2$ 是与 A_1A_2 垂直的弦,则直线 A_1P_1 与 A_2P_2 的交点的轨迹为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

证明 设 $P_1(a\cos\theta,b\sin\theta)$,则 $P_2(a\cos\theta,-b\sin\theta)$,直线 A_1P_1,A_2P_2 的方程分别为 $y=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}\cdot(x+a)$,$y=\frac{-b\sin\theta}{a\cos\theta-a}(x-a)$,如图 26-8.

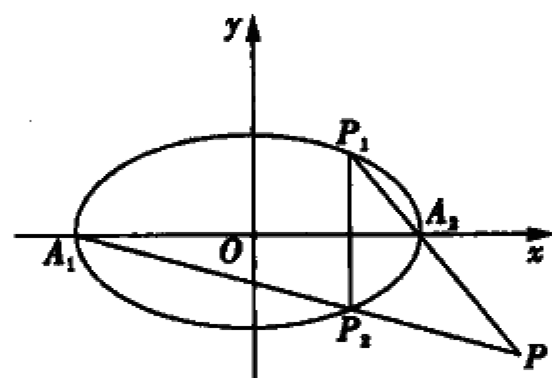


图 26-8

由此两方程消去 θ,即得$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由互变规律,对于圆、双曲线、抛物线有下述结论:

结论 9(1) 若 A_1A_2 是圆 $x^2+y^2=a^2(a>0)$在 x 轴上的直径,P_1P_2 是与 A_1A_2 垂直的弦,则直线 A_1P_1 与 A_2P_2 的交点轨迹为 $x^2-y^2=a^2$.

结论 9(2) 若 A_1A_2 是等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2(a>0)$的实轴,P_1P_2 是与 A_1A_2 垂直的弦,则直线 A_1P_1 与 A_2P_2 的交点轨迹为 $x^2+y^2=a^2(a>0)$.

结论 9(3) 若 A_1A_2 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的实轴,$P_1P_2$ 是与 A_1A_2 垂直的弦,则直线 A_1P 与 A_2P_2 交点的轨迹为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

结论 9(4) A_1 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$的顶点(另一个顶点 A_2 在 x 轴上无穷远处),P_1P_2 是与 A_1A_2 垂直的弦,则直线 A_1P_2 与 A_2P_2 的交点轨迹为 $y^2=-2px(p>0)$.

例 10 设 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两焦点,$P_1P_2$ 是与 F_1F_2 垂直的弦,则直线 P_1F_1 与 P_2F_2 的交点的轨迹为$\frac{x^2}{\frac{c^4}{a^2}}-\frac{y^2}{\frac{c^2b^2}{a^2}}=1(a>b>0)$.

证明 如图 26-9,设 $P_1(a\cos\theta,b\sin\theta)$,则 $P_2(a\cos\theta-b\sin\theta)$,$F_1P_1$ 与 P_2F_2 的方程分别为 $y=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+c}(x+c)$,$y=-\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-c}(x-c)$.

由此两方程消去 θ,得$\frac{x^2}{\frac{c^4}{a^2}}-\frac{y^2}{\frac{c^2b^2}{a^2}}=1$.

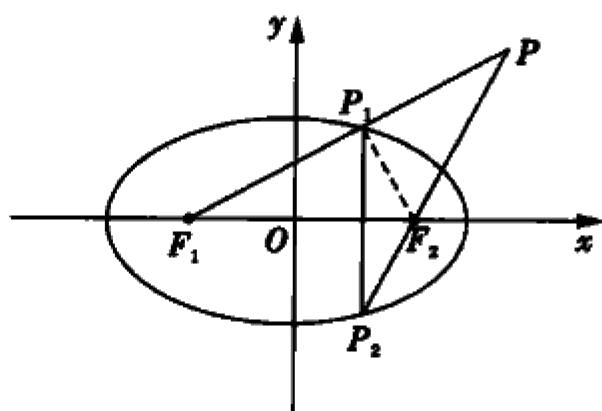


图 26-9

注 此例中,如图 26-9,连 P_1F_2,令$\angle P_1F_2F=\alpha$, $\angle P_1F_1F_2=\beta$, 则 $\frac{a-c}{a+c}=\frac{2a-2c}{2a+2c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}$.

由互变规律,对双曲线、抛物线有下述结论:

结论 10(1) 设 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$为双曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$的两焦点,$P_1P_2$ 是与 F_1F_2 垂直的弦,则 P_1F_1 与 P_2F_2 的交点轨迹为

$$\frac{x^2}{\frac{c^4}{a^2}}-\frac{y^2}{\frac{c^2b^2}{a^2}}=1(a>0,b>0).$$

注 若 $\alpha=\max\{\angle PF_1F_2,\angle PF_2F_1\}$,$\beta=\min\{\angle PF_1F_2,\angle PF_2F_1\}$,则$\frac{c-a}{c+a}=\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}$.

结论 10(2) 抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$,P_1P_2 是垂直于对称轴的弦,则过 P_1 与 x 轴平行的直线和 P_2F 的交点轨迹为 $y^2=-2p(x-p)(p>0)$.

【模拟实战】

习题 A

根据互变规律,写出下列命题的相关命题:

1. 若过椭圆一焦点的两条弦 MN 和 PQ 互相垂直,则$\frac{1}{|MN|}+\frac{1}{|PQ|}$为定值.
2. 椭圆上任意一点的两条焦半径的夹角被该点的法线所平分.
3. 抛物线的焦点在其切线上的射影的轨迹是过抛物线的顶点而垂直于抛物线对称轴的直线,并给出关于椭圆命题的证明.

第二十七章　圆的解析性质及应用

【基础知识】

圆有如下一系列有趣的解析性质：

性质 1　圆心为(a,b)，半径为 r 的圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

性质 2　二次方程表示圆的方程所应满足的条件是 $D^2+E^2-4F>0$，且 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

性质 3　圆心为(a,b)，半径为 r 的圆的参数方程为$\begin{cases}x=a+r\cdot\cos\theta\\ y=b+r\cdot\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

性质 4　与两定点$(a,0)$，$(b,0)$$(a\neq b)$距离的比为$\frac{m}{n}$($n\neq m$ 且 $n>0$，$m>0$)的点的轨迹是圆：$(x-\frac{an^2-bm^2}{n^2-m^2})+y^2=[\frac{mn(a-b)}{n^2-m^2}]^2$.

性质 5　与两定点$(a,0)$，$(0,c)$的距离的比为$\frac{m}{n}$($n\neq m$ 且 $n>0$，$m>0$)的轨迹是圆：$(x-\frac{an^2}{n^2-m^2})^2+(y+\frac{cm^2}{n^2-m^2})^2=[\frac{mn(a+c)}{n^2-m^2}]^2$.

性质 6　以点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$为圆的直径两端点的圆的方程为

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

注　上述方程可变形为 $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$.此式说明：若两曲线的两交点坐标满足它，则此两点为这圆的直径的两端点.

性质 7　若直线 $f(x,y)=0$ 与二次曲线 $F(x,y)=0$ 相交于 P，Q 两点，且由$\begin{cases}f(x,y)=0,\\ F(x,y)=0.\end{cases}$消去 y，得 $g(x)=0$；消去 x，得 $h(y)=0$(其中 $g(x)$与 $h(y)$的二次项系数均为 1)，那么以 P，Q 为直径端点的圆的直径式方程为$g(x)+h(y)=0$.

证明　设 P，Q 的坐标分别为$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 x_1，x_2 是方程 $g(x)=0$ 的两个根；y_1，y_2 是方程 $h(y)=0$ 的两个根，即 $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)=0$，$h(y)=(y-y_1)(y-y_2)=0$.两式相加，有

$g(x)+h(y)=(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

由性质 6,即证得结论成立.

性质 8 设 O 为平面直角坐标系原点,P 为直线 $l:g(x,y)=Ax+By=1$(A,B 不同时为零)上一点,射线 OP 交圆:$f(x,y)=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$ 于点 R,若点 Q 在 OP 上且满足 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2=r^2$,则点 P 在 l 上移动时,Q 点的轨迹是圆$(x-\frac{Ar^2}{2})^2+(y-\frac{Br^2}{2})^2=\frac{(A^2+B^2)\cdot r^4}{4}$,或 $f(x,y)-g(x,y)=0$.

证明 设 $P(x_0,y_0)$,$Q(x,y)$,则由 Q 在 OP 上可设$\overrightarrow{OP}=k\cdot\overrightarrow{OQ}$.由$|OQ|\cdot|OP|=r^2$,有$|OQ|\cdot|R\cdot OQ|=r^2$,即 $k=\frac{r^2}{|OQ|^2}$,亦即$\overrightarrow{OP}=\frac{r^2}{|OQ|^2}\cdot\overrightarrow{OQ}$,从而

$$x_0=\frac{r^2}{x^2+y^2}\cdot x,\ y_0=\frac{r^2}{x^2+y^2}\cdot y.$$

又(x_0,y_0)在直线 l 上,即有 $Ax_0+By_0=1$,亦即 $A\cdot\frac{r^2\cdot x}{x^2+y^2}+B\cdot\frac{r^2\cdot y}{x^2+y^2}=1$,由此得 $(x-\frac{Ar^2}{2})^2+(y-\frac{Br^2}{2})^2=\frac{(A^2+B^2)\cdot r^4}{4}$.

上式又可化为$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=Ax+By$,故 $f(x,y)-g(x,y)=0$.

性质 9 过两圆 $f_1(x,y)=0$,$f_2(x,y)=0$(或一圆与一二次曲线)交点的圆的方程为 $f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0(\lambda\neq-1)$.

注 若 $\lambda=-1$,则为一直线方程.

性质 10 设直线 $l:Ax+By+C=0$,圆 $\Gamma:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,圆心 $O(a,b)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$,则

(1)当 $d<R$ 时,直线 l 与圆 Γ 相交,反之亦真;

(2)当 $d=R$ 时,直线 l 与圆 Γ 相切,反之亦真;

(3)当 $d>R$ 时,直线 l 与圆 Γ 相离,反之亦真.

性质 11 直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切的充要条件是$(A^2+B^2)r^2=C^2$.

【典型例题与基本方法】

例 1 已知一圆在 x 轴上的截距为 a,b,在 y 轴上的截距为 $c(c\neq0)$,求此圆的方程.

解法 1 由于圆过点 $A(a,0)$,$B(b,0)$,$C(0,c)$三点,则圆心 M 在 AB,AC 的垂直

平分线上，即 M 点是两直线 $x=\frac{1}{2}(a+b)$，$(x-a)^2+y^2=x^2+(y-c)^2$ 的交点，求得 $M(\frac{a+b}{2},\frac{c^2+ab}{2c})$，又可求得半径 $r=|MA|=\sqrt{(\frac{a+b}{2}-b)^2+(\frac{c^2+ab}{2c})^2}$. 故由性质1，得所求圆的方程为 $(x-\frac{a+b}{2})^2+(y-\frac{c^2+ab}{2})^2=(\frac{b-a}{2})^2+(\frac{c^2+ab}{2c})^2$.

解法2 设此圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

此圆在 x 轴上的距离是 a,b，则 $a^2+Da+F=0$，① $b^2+Db+F=0$. ②

由①，②知 a,b 是方程 $x^2+Dx+F=0$ 的两根，从而由韦达定理，有 $a+b=-D$，$ab=F$.

又此圆在 y 轴上截距为 c，有 $c^2+Ec+F=0$. ③

从而 $c^2+Ec+ab=0$，即 $E=-\frac{c^2+ab}{c}$.

此时，显然满足 $D^2+E^2-4F>0$，故由性质2知所求圆的方程为

$x^2+y^2-(a+b)x-(c+\frac{ab}{c})y+ab=0$.

注 也可由①，②，③联立求出 D,E,F.

例2 设 A 为定点$(b,0)$，P 为圆 $x^2+y^2=9$ 上一点，M 是 AP 上的一点，且满足 $\frac{AM}{MP}=\frac{1}{2}$. 当点 P 在圆上运动时，求点 M 的轨迹方程.

解法1 如图27－1，作 $MN/\!/PO$ 交 x 轴于 N，显见 $|MN|$ 为定长，即 $|MN|=1$，且 N 为定点$(4,0)$.

由圆的平面几何定义知，到定点的距离等于定长的点的轨迹是圆，定点是圆心，定长为半径，故所求圆的方程为 $(x-4)^2+y^2=1$.

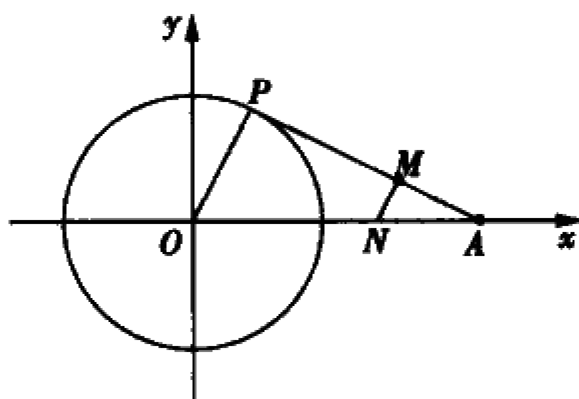


图27－1

解法2 设点 M 的坐标是(x,y)，设圆 $x^2+y^2=9$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\y=3\sin\theta.\end{cases}$ (θ 为参数)

于是可设点 P 的坐标为$(3\cos\theta,3\sin\theta)$，由此例定理(或由定比分点坐标公式)得点 M 的轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=4+\cos\theta,\\y=\sin\theta.\end{cases}$ (θ 为参数)

由此即知，线段 AP 上的点 M 的轨迹是以点$(4,0)$为圆心，以1为半径的圆.

例3 已知一曲线是与两个定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$的距离的比为 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹，求此曲线的方程.

解法1 由题设，运用性质4，知 $a=0, b=3, m=1, n=2$. 或运用性质5，知 $a=3, c=0, n=1, m=2$，可求得曲线方程为 $(x+1)^2+y^2=4$.

解法2 由题设及圆的轨迹定义和所求的曲线为圆，即可推知其圆心在直线 OA 上，且圆与直线 OA 的两个交点即为直径的两端点. 由平面几何知识得动点 P 满足 $\frac{|PO|}{|PA|}=\frac{1}{2}$ 的点为 $P(1,0)$，$Q(-3,0)$，从而所求方程为

$$(x-1)(x+3)+(y-0)(y-0)=0，即 (x+1)^2+y^2=4.$$

例4 求以相交两圆 $C_1: x^2+y^2+4x+y+1=0$，及 $C_2: x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 的公共弦为直径的圆的方程.

解法1 由两圆的方程相减即得公共弦所在直线的方程：$2x-y=0$.

设所求圆的方程为 $x^2+y^2+4x+y+1+\lambda(2x-y)=0$，即

$$x^2+y^2+(4+2\lambda)x+(1-\lambda)y+1=0.$$

其圆心 $\left(-2-\lambda, \frac{\lambda-1}{2}\right)$ 必在直线 $2x-y=0$ 上，即由 $2(-2-\lambda)-\frac{\lambda-1}{2}=0$，求得 $\lambda=-\frac{7}{5}$.

故所求圆的方程为 $5x^2+5y^2+16x+12y+5=0$.

解法2 可求得两已知圆的公共弦方程为 $2x-y=0$.

运用性质7，由 $\begin{cases}x^2+y^2+4x+y+1=0,\\2x-y=0.\end{cases}$ 分别消去 y, x，得

$5x^2+6x+1=0$ 及 $5y^2+12y+4=0$.

此两式相加，得 $5x^2+5y^2+6x+12y+5=0$，此即为所求圆的方程.

例5 直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A, B. 求证：$OA\perp OB$.

证明 由 $\begin{cases}y=x-2\\y^2=2x\end{cases}$ 分别消去 y, x，得 $x^2-6x+4=0$，$y^2-2y+4=0$.

此两式相加，得以 AB 为直径的圆的方程：$x^2+y^2-6x-2y=0$.

显然，原点 O 在圆 $x^2+y^2-6x-2y=0$ 上，故 $OA\perp OB$.

例6 已知双曲线的中心在原点，焦点在 x 轴上，过双曲线的右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P, Q 两点. 若 $OP\perp OQ$，且 $|PQ|=4$，求双曲线的方程.

（1991年全国高考理科题）

解 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，直线方程为 $y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

联立直线和双曲线方程分别消去 y, x，得

$$g(x)=x^2+\frac{6a^2c}{5b^2-3a^2}x-\frac{3a^2c^2+5a^2b^2}{5b^2-3a^2}=0.$$

$$h(y)=y^2+\frac{2\sqrt{15}b^2c}{5b^2-3a^2}y+\frac{3b^4}{5b^2-3a^2}=0.$$

由性质7,知以 PQ 为直径的圆的方程为 $g(x)+h(y)=0$.

因 $OP\perp OQ$,所以圆过原点,则 $g(0)+h(0)=0$,即 $3a^2c^2+5a^2b^2-3b^4=0$.解得 $b^2=3a^2$.

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 PQ 的中点为 $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$.由题设得 $|OM|=\frac{1}{2}|PQ|=2$,即 $(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=16$. (*)

而 $x_1+x_2=-\frac{6a^2c}{5b^2-3a^2}=-\frac{1}{2}c$,$y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{15}b^2c}{5b^2-3a^2}=-\frac{\sqrt{15}}{2}c$.

将其代入(*)式,得 $\frac{c^2}{4}+\frac{15c^2}{4}=16$,解得 $c^2=4$.由此求得 $a^2=1$,$b^2=3$.故所求双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

例7 已知函数 $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}$,求 y 的最大值. (新加坡竞赛题)

解 令 $u=\sqrt{1+\sin x}$,$v=\sqrt{1-\sin x}$,则有直线方程:$u+v-y=0$,及圆的方程:$u^2+v^2=2$.

由已知可知直线与圆有公共点 (u,v),从而

$\frac{|y|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{2}$,即 $|y|\leqslant 2$,等号当且仅当 $x=0$ 时成立,故 $y_{\max}=2$.

例8 确定最大的实数 z,使 $x+y+z=5$,$xy+yz+zx=3$,并且 x,y 也是实数.

(第7届加拿大竞赛题)

解 由已知,得 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=5^2-2\cdot 3=19$.

令直线 $l:x+y+(z-5)=0$,$\odot O:x^2+y^2=19-z^2$.

由已知可知 l 与 $\odot O$ 有公共点,从而

$\frac{|z-5|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{19-z^2}$,即 $3z^2-10z-13\leqslant 0$.

解得 $-1\leqslant z\leqslant\frac{13}{3}$,故 $z_{\max}=\frac{13}{3}$.

例9 解方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$. (1978年罗马竞赛题)

解 令 $\sqrt{x}=u$,$\sqrt{y-1}=v$,$\sqrt{z-2}=t$,$u+v+t=s$,则可令 $l:u+v+(t-s)=0$,

$\odot O: u^2+v^2=2s-t^2-3$.

因 l 与$\odot O$ 有公共点,则$\frac{|t-s|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{2S-t^2-3}$,即 $s^2-2t(t+2)s+3t^2+6\leqslant 0$.

因 s 有实数解,则 $\Delta=[-2(t+2)]^2-4(3t^2+6)\geqslant 0$,即$(t-1)^2\leqslant 0$,故 $t=1$.此时 $s=t+2=3$, $z=t^2+2=3$,代入 l 与$\odot O$ 的方程得 $u+v=2$, $u^2+v^2=2$.解此方程得 $u=v=1$,故原方程的解为 $x=1$, $y=2$, $z=3$.

【解题思维策略分析】

1. 运用圆的解析性质证明圆锥曲线性质

例 10 从椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点 P,引以短轴为直径、原点为圆心的$\odot O$ 的两条切线,切点为 A, B,直线 AB 与 x 轴,y 轴分别相交点 M, N,则$\frac{a^2}{|ON|^2}+\frac{b^2}{|OM|^2}=\frac{a^2}{b^2}$.

证明 如图 27-2,设 $P(x_0,y_0)$,$\odot O$ 的方程为 $x^2+y^2=b^2$,则切点弦 AB 的方程为$x_0x+y_0y=b^2$.

由 $x=0$ 得$|ON|=y=\frac{b^2}{y_0}$,$y=0$ 得$|OM|=x=\frac{b^2}{x_0}$,从而

$$\frac{a^2}{|ON|^2}+\frac{b^2}{|OM|^2}=\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2}{b^4}=\frac{a^2b^2}{b^4}=\frac{a^2}{b^2}.$$

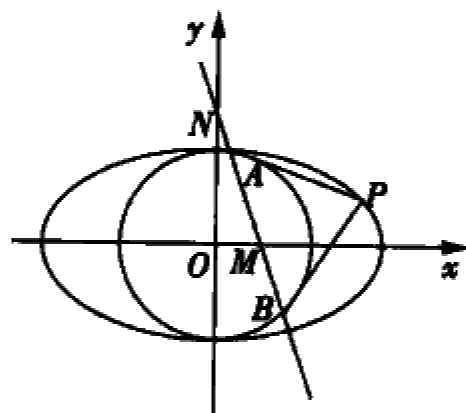


图 27-2

注 类似地,(ⅰ)可证明将上例中的$\odot O$ 换为以长轴为直径的圆,P 为此圆上一点,引椭圆的两条切线,则$\frac{a^4}{|OM|^2}+\frac{b^4}{|ON|^2}=a^2$;(ⅱ)可证明对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,抛物线 $y^2=2px(p>0)$的类似于上例的结论:

(a)从双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点 P,向以实轴为直径、原点为圆心的圆 O 引两条切线,切点为 A, B,直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于 M, N,则

$$\frac{b^2}{|OM|^2}-\frac{a^2}{|ON|^2}=\frac{b^2}{a^2}.$$

(b)从双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点 P,向以虚轴为直径,原点为圆心的圆 O 引两条切线,切点为 A, B,直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于 M, N,则

$$\frac{b^2}{|OM|^2}-\frac{a^2}{|ON|^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

(c)从抛物线 $y^2=2px(p>0)$上一点 P,向以 $2p$(通径)为直径,原点为圆心的圆引两条切线,切点为 A,B,直线 AB 与 x 轴,y 轴相交于点 M,N,则$\frac{|OM|^2}{|ON|^2}=\frac{2}{p}$.

例 11 设 P 是半径为 R 的圆 O 内任意一点,过点 P 任意引 $n(n\geqslant 2)$条直线 l_1,$l_2,\cdots,l_n$.如果这 n 条直线相邻两条所成的角都为$\frac{\pi}{n}$,且第 i 条直线 l_i 交圆于 M_i,M'_i 两点$(i=1,2,\cdots,n)$,那么$\sum\limits_{i=1}^{n}(|PM_i|^2+|PM'_i|^2)$是与 P 点无关的定值 $2nR^2$.

证明 以圆心 O 为坐标原点,射线 OP 为 x 轴正半轴建立直角坐标系,则圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$.设 $P(r,0)$,不妨设直线 l_1 的倾斜角 α 最小,l_1 的参数方程为

$$\begin{cases}x=r+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha.\end{cases}(t\text{ 为参数})$$

将此方程代入圆的方程 $x^2+y^2=R^2$,整理得

$$t^2+2r\cdot\cos\alpha\cdot t+r^2-R^2=0.$$

设关于 t 的上述二次方程的两根为 t_1,t_2,则知

$$t_1+t_2=-2r\cos\alpha,\quad t_1t_2=-(R^2-r^2).$$

由 t 的几何意义,从而

$$\begin{aligned}|PM_1|+|PM'_1|^2&=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2\\&=2r^2(1+\cos2\alpha)+2(R^2-r^2)=2(r^2\cos2\alpha+R^2)\end{aligned}\qquad(*)$$

设直线 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$对应的倾斜角为 $\alpha+\frac{(i-1)\pi}{n}$,分别以 $\alpha+\frac{\pi}{n},\alpha+\frac{2\pi}{n},\cdots,\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}$代$(*)$式的 α,然后将 n 个式子(连同$(*)$式)相加,并注意三角公式

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left[\theta+\frac{2m(i-1)\pi}{n}\right]=0,(n>m\text{ 均为正整数})$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}(|PM_i|^2+|PM'_i|^2)=2\{r^2\sum\limits_{i=1}^{n}\cos[2\alpha+\frac{2(i-1)\pi}{n}]+nR^2\}=2nR^2$.

注 若注意到$|M_1M'_1|^2=|PM_1-PM'_1|^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2$,可得$\sum\limits_{i=1}^{n}|M_iM'_i|^2=2n\cdot(2R^2-r^2)$;$\frac{1}{|PM_1|^2}+\frac{1}{|PM'_1|^2}=\frac{(t_1+t_2)^2-2t_1t_2}{t_1^2\cdot t_2^2}$,可得$\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{|PM_i|^2}+\frac{1}{|PM'_i|^2})=\frac{2nR^2}{(R^2-r^2)^2}$;$(\frac{1}{|PM_1|}+\frac{1}{|PM'_1|})^2=\frac{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}{t_1^2\cdot t_2^2}$,可得$\sum(\frac{1}{|PM_i|}+\frac{1}{|PM'_i|})^2=\frac{2n(2R^2-r^2)}{(R^2-r^2)^2}$等.

2. 注意点圆方程的巧用

例 12 已知圆 C_0 的方程为 $x^2+y^2=r^2$,求经过圆 C_0 上一点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程.

解 视点 $M(x_0,y_0)$ 为点圆曲线 $\Gamma_0:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$. 于是 $C_0\cap\Gamma_0=\{M\}$,由性质 9,得曲线系 $x^2+y^2-r^2+\lambda[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]=0$.

且由题设知其中 $\lambda=-1$,故有 $2x_0x+2y_0y=x_0^2+y_0^2+r^2=2r^2$. 即得 $x_0x+y_0y=r^2$ 即为所求.

例 13 求与圆 $C:x^2+y^2-6x-8y+17=0$ 切于点 $(1,2)$ 且半径为 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 的圆的方程.

解 视点 $(1,2)$ 为点圆曲线 $\Gamma_0:(x-1)^2+(y-2)^2=0$,由性质 9 得所求圆的方程为 $x^2+y^2-6x-8y-17+\lambda[(x-1)^2+(y-2)^2]=0$.

即 $$\left(x-\frac{3\lambda}{1+\lambda}\right)^2+\left(y-\frac{4+2\lambda}{1+\lambda}\right)^2=\frac{8}{(1+\lambda)^2}.$$

由 $\frac{8}{(1+\lambda)^2}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$,求得 $\lambda_1=-\frac{1}{5}$ 或 $\lambda_2=-\frac{9}{5}$.

于是得 $C_1:\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 及 $C_2:\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

易知点 $(1,2)$ 满足圆 C_1 的方程,且圆 C_1 与圆 C 的圆心距等于两圆半径之差的绝对值,所以圆 C_1 与圆 C 内切于点 $(1,2)$,圆 C_1 为所求.

同理,圆 C_1 与圆 C 外切于点 $(1,2)$,圆 C_2 也为所求.

3. 借助圆的解析性质求解其他代数问题

例 14 若正数 x,y,z 满足 $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}(a>0)$,求证:$0<x\leqslant\frac{2}{3}$, $0<y\leqslant\frac{2}{3}$, $0<z\leqslant\frac{2}{3}$.

证明 由已知有 $x+y=a-z$, $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}-z^2$,此二式同时成立,即知直线 $x+y=a-z$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}-z^2\left(|z|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 有公共点,即原点到直线的距离不大于圆的半径,亦即 $\frac{|z-a|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{2}-z^2}$,得 $3z^2-2az\leqslant0$. 又 $a>0$,则 $0<z\leqslant\frac{2}{3}a$. 同理有 $0<y\leqslant\frac{2}{3}a$, $0<z\leqslant\frac{2}{3}a$.

例 15 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=2m,\sin\alpha+\sin\beta=2n$.求 $\cot\alpha\cot\beta$ 的值.

解 令 $A(\cos\alpha,\sin\alpha),B(\cos\beta,\sin\beta)$,则知 A,B 在圆 $x^2+y^2=1$ 上.设线段 AB 的中点为 $C(m,n)$,则 $m=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta),n=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)$,且 $k_{OC}=\frac{n}{m},k_{AB}=-\frac{m}{n}$.

AB 的方程为 $y=-\frac{m}{n}x+\frac{m^2+n^2}{n}$,并代入圆的方程,得 $(1+\frac{m^2}{n^2})x^2-\frac{2m(m^2+n^2)}{n^2}x+\frac{(n^2+m^2)^2-n^2}{n^2}=0$.又 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为此方程两根,有 $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{(n^2+m^2)^2-n^2}{m^2+n^2}$.

同理 $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{(m^2+n^2)-m^2}{m^2+n^2}$.故 $\cot\alpha\cdot\cot\beta=\frac{(m^2+n^2)^2-n^2}{(m^2+n^2)-m^2}$为所求.

【模拟实战】

习题 A

1. 求过直线 $l:2x+y+4=0$ 与圆 $C:x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的两个交点 P,Q,且面积最小的圆的方程.
2. 已知直线 $y=x-1$ 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$相交于 A,B 两点,若以 AB 为直径的圆过椭圆的左焦点,求 a 的值.
3. 已知圆 $C:x^2+y^2=24$,直线 $l:\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$,$P$ 是 l 上一点,射线 OP 交圆于点 R,又点 Q 在 OP 上且满足:$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.当点 P 在 l 上移动时,求点 Q 的轨迹方程,并说明轨迹是什么曲线.
4. 求与抛物线 $y=4x^2$ 相切于点 $P(1,4)$且过点$(3,0)$的圆的方程.
5. 求函数 $y=f(x)=\frac{3+\cos x}{2-\sin x}$的值的取值范围.
6. 解方程组$\begin{cases}x+y+z=\sqrt{3},\\x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$
7. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b=1$,求证:$(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2\geqslant\frac{25}{2}$.
8. 已知 α,β 是锐角,且$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$.求证:$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.
9. 已知 $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$,$\beta\in[\frac{\pi}{4},\pi]$,求 β 的值.

习题 B

1. 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 l 所在直线方程.
2. 半径等于某个正三角形高的圆在这个正三角形的一边上滚动.证明三角形两边截圆的弧的总长等于 $60°$.
3. **(九点圆定理)**证明:三角形三边的中点，三高的垂足，垂心与顶点连接线段的中心，这九个点共圆.

第二十八章　椭圆的性质及应用

【基础知识】

椭圆具有一般圆锥曲线的性质外，还具有如下有趣性质：

性质1　椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，其上任意一点$P(x_0,y_0)$处的两条焦半径长分别为$|PF_1|=a+ex_0$，$|PF_2|=a-ex_0$(其中$e$为椭圆离心率，$F_1,F_2$分别为左、右焦点.下均同).

性质2　以焦半径为直径的圆必与以椭圆长轴为直径的圆相切.

证明　设P为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点，$O$为中心，$M$为$PF_2$的中点，则$|MO|=\frac{1}{2}|PF_1|=\frac{1}{2}(2a-|PF_2|)=a-\frac{1}{2}|PF_2|$，即圆心距等于两圆半径之差，故$\odot M$与$\odot O(a)$相切.

为叙述方便，定义椭圆上非顶点的某一点P与两焦点F_1,F_2所构成的三角形为焦点三角形，且称顶点P的内、外角平分线(即P点处的法、切线)与长轴的交点分别为内点M、外点N.

性质3　椭圆焦三角形中，内点M到一焦点之距离与该焦点为端点的焦半径之比为常数e.

证明　设内点为M，则$\frac{|MF_1|}{|PF_1|}=\frac{|MF_2|}{|PF_2|}=\frac{|MF_1|+|MF_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{2c}{2a}=e$.

性质4　椭圆焦三角形中，(Ⅰ)其内心I将内点M与P点连线段分成定比e；(Ⅱ)半焦距为内点M、外点N到椭圆中心的距离的比例中项，即$c^2=|OM|\cdot|ON|$；(Ⅲ)椭圆中心到内点之距与内点到同侧焦点之距，半焦距与外点到同侧焦点之距成比例，即$\frac{|OM|}{|MF_2|}=\frac{|OF_2|}{|F_2N|}$；(Ⅳ)半焦距、外点与椭圆中心连线段、内点与同侧焦点连线段、外点与同侧焦点连线段成比例，即$\frac{|OF_1|}{|ON|}=\frac{|MF_2|}{|F_2N|}$；(Ⅴ)过一焦点$F_2$向$P$点处外角平分线(即$P$点处切线)引垂线，则椭圆中与垂足$Q$连线必与另一焦半径$PF_1$所在直线平行

(注意 $F_2Q /\!/ MP$);(Ⅵ)$|OQ|=a$;(Ⅶ)$\dfrac{\cos\angle F_2PN}{\cos\angle F_2NP}=e$(设 F'_2 为 F_2 关于 PN 的对称点,则$\angle F_2PN=90°-\angle E'$,$\angle F_2NP=90°-\angle F'_2F_2N$,注意$\dfrac{|F_1F'_2|}{\sin\angle F'_2F_2F_1}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle F'_2}$,即证).

性质5 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任一点 P,(Ⅰ)$P(x_0,y_0)$点处的两焦半径的乘积,其最大值为 a^2,最小值为 b^2;(Ⅱ)若$\angle F_1PF_2=2\theta$,则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\theta$,且 $\tan\theta=\dfrac{c|y_0|}{b^2}$及两焦半径的乘积为定值$\dfrac{b^2}{\cos^2\theta}$.

证明 (Ⅰ)当 P 点在短轴顶点时,$|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2$;当 P 点在长轴顶点时,$|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2-c^2=b^2$;

(Ⅱ)如图 28－1,设$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r,注意切线长定理则可证明:$r=(a-c)\cdot\tan\theta$.又$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $2a+2c$,则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}(2a+2c)\cdot r=(a^2-c^2)\cdot\tan\theta=b^2\tan\theta$,从而$|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{2S_{\triangle PF_1F_2}}{\sin2\theta}=\dfrac{b^2}{\cos^2\theta}$.

由$\dfrac{1}{2}\cdot2c\cdot|y_0|=b^2\cdot\tan\theta$,得 $\tan\theta=\dfrac{c|y_0|}{b^2}$.

图 28－1

性质6 设 P 为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点,$F_1,F_2$ 为焦点,$\angle PF_1F_2=\alpha$,$\angle PF_2F_1=\beta$,则 $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sec\dfrac{\alpha-\beta}{2}=e$.

证明 由$\dfrac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{|PF_1|}{\sin\beta}=\dfrac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin\alpha+\sin\beta}$,有

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sec\frac{\alpha-\beta}{2}.\text{即证.}$$

性质7 椭圆的焦点弦,(Ⅰ)两端点处的切线相交在焦点对应的准线上;(Ⅱ)两端点处的切线所成的角小于90°;(Ⅲ)两端点处的法线相交于 Q,过 Q 与长轴平行的直线平分焦点弦;(Ⅳ)其中点轨迹也是椭圆;(Ⅴ)垂直于两端点处切线交点与该焦点的连线.

性质8 设 P 是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上异于长轴顶点的一点,$F_1,F_2$ 是其左、右焦点,O 是中心,设$|OP|=d$,则$|PF_1|\cdot|PF_2|+d^2=b^2+a^2$.

证明 在$\triangle PF_1F_2$中，由中线长公式，得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=2d^2+2|OF_2|^2$.

配方，得$(|PF_1|+|PF_2|)^2=2d^2+2c^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|$，

由椭圆定义，得$|PF_1|\cdot|PF_2|+d^2=2a^2-c^2=b^2+a^2$.

性质9 直线$Ax+By+c=0$与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$相交、相切、相离的充要条件是$A^2a^2+B^2b^2\gtreqqless C^2(A,B$不同时为$0,a>0,b>0)$.

证明 仅证相切情形.当$B\neq0$时，有$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，并代入椭圆方程消去$y$，化简得$(A^2a^2+B^2b^2)x^2-2a^2ACx+a^2(C^2-B^2b^2)=0$，由其$\Delta=0$化简得$A^2a^2+B^2b^2=C^2$，这说明直线与椭圆有两个重合交点(即相切)的充要条件为$A^2a^2+B^2b^2=C^2$.

当$B=0$，则直线必切椭圆于左或右顶点，$x=\pm a$，从而有$Aa+C=0$或$-Aa+C=0$，即有$A^2a^2=C^2$，亦有$A^2a^2+B^2b^2=C^2$.反之$A^2a^2=C^2$，推知$x=\pm a$，这表示一条过长轴顶点的切线.

推论 直线$Ax+By+C=0$与椭圆$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1(a>b>0)$相交、相切、相离的充要条件是$A^2a^2+B^2b^2\gtreqqless(Am+Bn+C)^2$.

性质10 设椭圆的一个焦点为F，直线l与过椭圆长轴的端点A',A的切线相交于M',M，则

(1)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}=0\Leftrightarrow$直线$l$与椭圆相切；

(2)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}>0\Leftrightarrow$直线$l$与椭圆相离；

(3)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}<0\Leftrightarrow$直线$l$与椭圆相交.

证明 设椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F(c,0)$，$A'(-a,0)$，$A(a,0)$.直线$l$：$y=kx+m$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}&=(-a-c,m-ka)\cdot(a-c,m+ka)\\&=c^2-a^2+m^2-k^2a^2\\&=m^2-b^2-a^2k^2.\end{aligned}$$

由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\y=kx+m\end{cases}$消去$y$，得

$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$.

$\Delta=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$.

(1)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}=0\Leftrightarrow m^2-b^2-a^2k^2=0\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow$直线$l$与椭圆相切；

(2)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}>0\Leftrightarrow m^2-b^2-a^2k^2>0\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow$直线$l$与椭圆相离；

(3)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}<0\Leftrightarrow m^2-b^2-a^2k^2<0\Leftrightarrow\Delta>0\Leftrightarrow$直线 l 与椭圆相交.

性质 11 设 l 是过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$上异于长轴顶点的一点的切线,(Ⅰ)$l$ 与过长轴顶点 A_1,A_2 的切线分别交于 P_1,P_2,则$|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=b^2$;(Ⅱ)两焦点 F_1、F_2 到直线 l 的距离分别为 d_1,d_2,则 $d_1\cdot d_2=b^2$.

证明 (Ⅰ)设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$,过 P 的切线方程为 $b\cos\theta\cdot x+a\sin\theta\cdot y=ab$,由 $x=a$ 得$|P_2A_2|=b|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}|$.

同理,由 $x=-a$ 得$|P_1A_1|=b|\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}|$.故$|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=b^2$.

(Ⅱ)由$(-c,0)$,$(c,0)$到直线 $b\cos\theta\cdot x+a\sin\theta\cdot y-ab=0$ 的距离分别为 $d_1=\frac{|cb\cos\theta+ab|}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}$,$d_2=\frac{|cb\cos\theta-ab|}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}$,故 $d_1\cdot d_2=b^2$.

性质 12 设 P,Q 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点,(Ⅰ)设 O 为中心,$OP\perp OQ$,则$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$;(Ⅱ)设 PQ 通过焦点 F,弦 CD 也过点 F,且 $PQ\perp CD$,则$\frac{2}{a}(\frac{1}{|PQ|}+\frac{1}{|CD|})=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.(Ⅲ)设 PQ 通过焦点 F,Q 是椭圆上一点,且 $OQ\perp PQ$,则$\frac{2}{a|PQ|}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

证明 (Ⅰ)设 $P(|OP|\cdot\cos\theta,|OP|\cdot\sin\theta)$,则 $Q(-|OQ|\cdot\sin\theta,|OQ|\cdot\cos\theta)$.分别代入椭圆方程,相加即证.

(Ⅱ)设椭圆的极坐标方程为 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$,可求得

$$|PQ|=|PF|+|QF|=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}=\frac{2ab^2}{b^2+c^2\sin^2\alpha}.$$

同理,$|CD|=\frac{2ab^2}{b^2+c^2\cos^2\alpha}$,由此即可证.

(Ⅲ)由(Ⅰ),(Ⅱ),知$\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}$,$\frac{1}{|PQ|}=\frac{b^2+c^2\sin^2\alpha}{2ab^2}$即证.

【典型例题与基本方法】

例 1 试确定 m 的取值范围,使对直线 $y=4x+m$,在椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上有不同两点 A,B 关于该直线对称.

解 设 $P(x_0,y_0)$ 是弦 AB 的中点，由性质 10，知曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 关于点 P 对称的曲线为 $\frac{(2x_0-x)^2}{4}+\frac{(2y_0-y)^2}{3}=1$. 两式相减整理得公共弦方程：

$2x_0x+4y_0y-3x_0^2-4y_0^2=0$.

而公共弦的斜率应为 $-\frac{1}{4}$，故有 $k=-\frac{3x_0}{4y_0}=-\frac{1}{4}$，即 $y_0=3x_0$. 又 $P(x_0,y_0)$ 在 $y=4x+4$ 上，有 $y_0=4x_0+m$，由此两方程求得 $x_0=-m, y_0=-3m$.

因 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆内部，故有 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}<1$，即有 $\frac{(-m)^2}{4}+\frac{(-3m)^2}{3}<1$，故

$-\frac{2\sqrt{13}}{13}<m<\frac{2\sqrt{13}}{13}$ 为所求.

例 2 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的动点，F_1,F_2 是左、右焦点，试求 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值和最小值. （1996 年"希望杯"竞赛题）

解法 1 由性质 5(Ⅰ)，即知 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值为 4，最小值为 1.

解法 2 由性质 8，知 $|PF_1|\cdot|PF_2|=b^2+a^2-d^2=5-d^2$.

又由椭圆的范围知 $b^2\leqslant d^2\leqslant a^2$，即 $1\leqslant d^2\leqslant 4$，故知 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值为 4，最小值为 1.

例 3 已知圆 $x^2+y^2=r^2$ 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，两曲线有四个交点，其中一个交点为 P. 若 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 26，椭圆长轴长为 15，试求 $a+b+c$ 的值. （2000 年"希望杯"竞赛题）

解 由题设，知 $\angle F_1PF_2=90°$. 由性质 5(Ⅱ)，知

$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{b^2}{\cos^2 45°}=2b^2$.

又 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2S_{\triangle F_1PF_2}}{\sin 90°}=52$，则 $b=\sqrt{26}$.

而 $a=\frac{15}{2}$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{11}{2}$.

故 $a+b+c=13+\sqrt{26}$ 为所求.

例 4 求椭圆 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$ 过已知点 $P(5,1)$ 的切线方程.

解 令 $x'=x-2, y'=y+3$，在新坐标系 $x'O'y$ 下，P 点坐标变为 $P'(3,4)$，椭圆方

程变为$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$.

设过点(3,4)的切线方程为 $Ax+By+C=0$. 由性质 9,联立方程 $3A+4B+C=0$ 与 $9A^2+4B^2=C^2$,消去 C 可得 $B^2=-2AB$,于是 $B=0$ 或 $B=-2A$,从而求得 $C=3A$ 或 $C=5A$,故求得切线方程为 $Ax-3A=0$ 或 $Ax-2Ay+5A=0$,即 $x=3$ 与 $x-2y+5$ 即为所求.

例 5 求证:椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$对中心张角的弦恒与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$相切.

证明 设弦 AB 对中心 O 张直角,O 到 AB 的距离为 d. 由三角形面积公式,知 $\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|$. 从而 $d^2=\frac{|OA|^2\cdot|OB|^2}{|AB|^2}=\frac{|OA|^2\cdot|OB|^2}{|OA|^2+|OB|^2}=\frac{1}{\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}}$.

由性质 11(Ⅰ),知$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$,即知

$d^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$,由此即证得弦 AB 恒与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$相切.

例 6 已知直线 l 的斜率为$\frac{1}{2}$,且过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点与椭圆相交于 A,B 两点,椭圆的中心为 O,O 点到直线 AB 的距离 $d=1$,且弦 AB 的长是椭圆长轴的$\frac{4}{5}$.求椭圆方程.

解 由题意可设 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x+c)$,它到原点的距离 $d=\frac{c}{\sqrt{5}}$,即$\frac{c}{\sqrt{5}}=1$,故 $c^2=5$.

又$|AB|=\frac{4}{5}\cdot 2a$,由性质 11(Ⅲ),有$\frac{2}{a}\cdot\frac{8a}{5}+\frac{1}{|OP|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$,于是,得$\frac{1}{|OP|^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{4a^2}$. (*)

又易知 OP 的方程为 $y=-2x$,将其代入椭圆方程,解得 $x^2=\frac{a^2b^2}{4a^2+b^2}$,$y^2=\frac{4a^2b^2}{4a^2+b^2}$. 于是$|OP|^2=x^2+y^2=\frac{5a^2b^2}{4a^2+b^2}$,并代入(*)式化简得 $4a^2=9b^2$. 再注意 $c^2=$

5,求得 $a=3,b=2$.故所求椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

例7 设椭圆方程为$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$,$P(\frac{25}{4},\frac{3\sqrt{39}}{4})$,$F_1$,$F_2$ 是焦点,求$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆方程.

解 显然 P 点在椭圆上.设$\triangle PF_1F_2$ 的内心为 I,PI 交 x 轴于 M,易知 $F_1(-8,0)$,$F_2(8,0)$,可求得$|PF_1|=15$,$|PF_2|=5$.由$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1M|}{|MF_2|}=3$,得 $x_M=4$.

由性质4(Ⅰ),得$|\frac{MI}{PI}|=e=\frac{4}{5}$.

于是 $x_I=\frac{4+\frac{25}{4}\cdot\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}=5$,$y_I=\frac{0+\frac{3}{4}\sqrt{39}\cdot\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$.

又内切圆半径 $r=|y_I|$,故所求圆的方程为

$$(x-5)^2+(y-\frac{\sqrt{39}}{3})^2=\frac{13}{3}.$$

注 由此例,促使我们探求对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任意异于长轴顶点的点 P,焦点$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心的方程为$(a-c)x^2+(a+c)y^2=(a-c)c^2(y\neq 0)$.

事实上,可设$\angle PF_1F_2=\alpha$,$\angle PF_2F_1=\beta$,内心 $I(x,y)$,在$\triangle PF_1F_2$ 中由正弦定理可求得 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{a-c}{a+c}$.

又 $k_{IF_1}=\frac{y}{x+c}$,$k_{IF_2}=\frac{y}{x-c}(y\neq 0)$,从而

$$k_{IF_1}\cdot k_{IF_2}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot(-\tan\frac{\beta}{2})\Rightarrow\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-\frac{a-c}{a+c}.$$

整理得$(a-c)x^2+(a+c)y^2=(a-c)c^2(y\neq 0)$.

例8 已知 $C_0:x^2+y^2=1$ 和 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.试问:当且仅当 a,b 满足什么条件时,对 C_1 上任意一点 P,均存在以 P 为顶点、与 C_0 外切、与 C_1 内接的平行四边形?并证明你的结论.

(2000年全国高中联赛题)

解 所求条件为$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$.

必要性:易知圆外切平行四边形必是菱形,圆心即为菱形中心.假设结论成立,则

对点$(a,0)$,有$(a,0)$为顶点的菱形与 C_1 内接,与 C_0 外切,$(a,0)$的相对顶点为$(-a,0)$.由于菱形的对角线互相垂直平分,另外两个顶点必在 y 轴上且为$(0,b)$和$(0,-b)$,菱形一条边的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即 $bx+ay=ab$.由于菱形与 C_0 外切,故必有$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$,即为$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$.

充分性:设$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$,$P$ 是 C_1 上任意一点,过 P,O 作 C_1 的弦 PR,再过 O 作与 PR 垂直的弦 QS,则 $PQRS$ 为与 C_1 内接的菱形.设$|OP|=r_1$,$|OQ|=r_2$,则 $P(r_1\cos\theta,r_1\sin\theta)$,$Q(r_2\cos(\theta+90°),r_2\sin(\theta+90°))$.代入椭圆方程,得$\frac{r_1^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r_1^2\cdot\sin^2\theta}{b^2}=1$,$\frac{r_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{r_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1$,于是

$$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)+\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.$$

又在 Rt$\triangle POQ$ 中,设点 O 到 PQ 的距离为 h,则$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=1$,故得 $h=1$.同理 O 到 QR,RS,SP 的距离也为 1.故菱形 $PQRS$ 与 C_0 外切,证毕.

【解题思维策略分析】

1.注意平面几何知识的综合运用

例 9 设 P 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上异于长轴顶点 A_1,A_2 的任一点,过 P 点的切线与分别过 A_1,A_2 的切线相交于 B_1,B_2,则以 B_1B_2 为直径的圆必过两焦点 F_1,F_2.

证明 如图 28-2,设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$,则过 P 的切线方程为$\frac{x\cdot\cos\theta}{a}+\frac{y\cdot\sin\theta}{b}=1$,它与 y 轴交于点 $C(0,b\csc\theta)$,C 是线段 B_1B_2 的中点,从而$|CF_1|=|CF_2|=\sqrt{c^2+b^2\cdot\csc^2\theta}$.

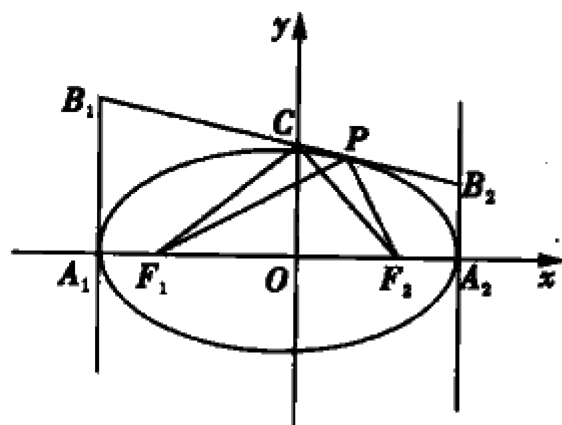


图 28-2

联立 $x=-a$,$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$,得 $B_1\left(-a,\frac{(1+\cos\theta)b}{\sin\theta}\right)$,于是

$\frac{1}{2}|B_1B_2|=|B_1C|=\sqrt{(-a)^2+[\frac{(1+\cos\theta)b}{\sin\theta}-\frac{b}{\sin\theta}]^2}=\sqrt{c^2+b^2\csc^2\theta}$.

从而 $|CF_1|=|CF_2|=\frac{1}{2}|B_1B_2|$,故 F_1,F_2 在以 B_1B_2 为直径的圆上.

2. 注意三角知识的综合应用

例 10 在面积为 1 的 $\triangle PMN$ 中,$\tan M=\frac{1}{2}$,$\tan N=-2$,建立适当的坐标系,求出以 M,N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.

解 以 MN 所在直线为 x 轴,线段 MN 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系.

一方面,$\tan P=-\tan(M+N)=\frac{\tan M+\tan N}{\tan M\cdot\tan N-1}=\frac{3}{4}$.

另一方面,$\tan P=\frac{2\tan\frac{P}{2}}{1-\tan^2\frac{P}{2}}$,从而

$$\frac{2\tan\frac{P}{2}}{1-\tan^2\frac{P}{2}}=\frac{3}{4},即 3\tan^2\frac{P}{2}+8\tan\frac{P}{2}-3=0.$$

解得 $\tan\frac{P}{2}=\frac{1}{3}$ 或 $\tan\frac{P}{2}=-3$(舍去).

由性质 5(Ⅱ),知 $b^2=S_{\triangle PMN}\cdot\cot\frac{P}{2}=1\cdot3=3$.

作 $PQ\perp MN$,垂足为 Q,设 $|PQ|=h$,$|NQ|=m$,由 $\tan M=\frac{h}{2c+m}=\frac{1}{2}$ 及 $\tan\angle PNQ=\frac{h}{m}=2$,易得 $h=\frac{4}{3}c$.又 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\cdot2c\cdot\frac{4c}{3}=1$,得 $c^2=\frac{3}{4}$,即有

$a^2=b^2+c^2=\frac{15}{4}$.故所求椭圆方程为 $\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$.

3. 注意代数知识的综合运用

例 11 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点为 F_1,F_2,则椭圆上存在点 P,使得 $\angle F_1PF_2=\theta(0<\theta<\pi)$ 的充要条件是 $\sin\frac{\theta}{2}\leqslant e$($e$ 为椭圆的离心率).

证明 设 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,点 P 的坐标为 (x,y),则 $k_{PF_1}=\frac{y}{x+c}$,$k_{PF_2}=\frac{y}{x-c}$.

由对称性,仅考虑点 P 在上半椭圆,则

$\tan\theta=\dfrac{k_{PF_2}-k_{PF_1}}{1+k_{PF_2}\cdot k_{PF_1}}=\dfrac{2yc}{x^2+y^2-c^2}$，即 $x^2+y^2-c^2=2yc\cdot\cot\theta$.（上述前式不适合斜率不存在或 $\theta=90°$ 的直线，而后式则适合于这些直线.）

椭圆上存在点 P，使 $\angle F_1PF_2=\theta$ 的充要条件是方程组 $\begin{cases}0<y\leqslant b,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x^2+y^2-c^2=2yc\cdot\cot\theta\end{cases}$ 有解，这又等价于方程 $(c^2+2yc\cdot\cot\theta-y^2)b^2+a^2y^2=a^2b^2$，即 $c^2y^2+2yb^2c\cdot\cot\theta-b^4=0$ 在区间 $(0,b]$ 上有解.

设 $f(y)=c^2y^2+2yb^2c\cdot\cot\theta-b^4$，则 $f(0)=-b^4<0$，因此上述问题等价于

$f(b)\geqslant 0\Leftrightarrow c^2b^2+2cb^2\cdot\cot\theta-b^4\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{b^2}{c^2}-2\dfrac{b}{c}\cdot\cot\theta-1\leqslant 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\leqslant\dfrac{b}{c}\leqslant\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}(0<\theta<\pi)\Leftrightarrow 0<\dfrac{b}{c}\leqslant\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$\Leftrightarrow 0<\dfrac{a^2-c^2}{c^2}\leqslant\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\Leftrightarrow 1<\dfrac{a^2}{c^2}\leqslant\dfrac{2(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}\Leftrightarrow\sin\dfrac{\theta}{2}\leqslant\dfrac{c}{a}=e.$

注 类似地，可以证明：椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 长轴上两顶点为 A_1,A_2，则椭圆上存在异于 A_1,A_2 的点 P，使得 $\angle A_1PA_2=\theta\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ 的充要条件是 $\sqrt{-2\cot\theta(\cot\theta+\csc\theta)}\leqslant e$.

4. 注意解析几何知识的综合应用

例 12 如图 28-3，经过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$ 的长轴左顶点 A 的弦 AB 交 y 轴于 C，MN 是过左焦点 F_1 的弦.若 $MN/\!/AB$，则 $a|MN|=|AB|\cdot|AC|$.

证明 设平行弦 AB、MN 的倾斜角为 α，则 AB 的参数方程为 $\begin{cases}x=-a+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha.\end{cases}$（$t$ 为参数）

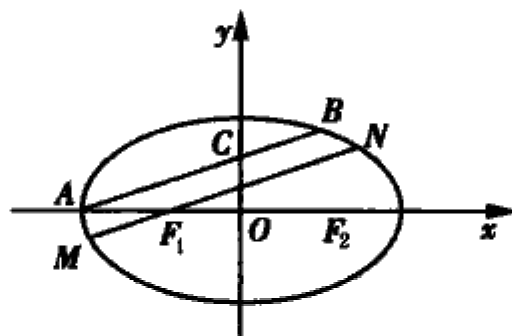


图 28-3

代入椭圆方程并整理，得

$(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)t^2-2ab^2\cos\alpha\cdot t=0$，

于是 $|AB|=|t_B|=\dfrac{2ab^2|\cos\alpha|}{b^2\cdot\cos^2\alpha+a^2\cdot\sin^2\alpha}$.

又在 AB 的参数方程中，令 $x=0$，得 $|AC|=|t_c|=a|\sec\alpha|$.

上述两式相乘，得 $|AB|\cdot|AC|=\dfrac{2a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\cdot\sin^2\alpha}$.

以 F_1 为极点，F_1x 为极轴建立极坐标系，则椭圆方程为 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$. 从而

$$|MN|=|NF_1|+|MF_1|=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\alpha}=\frac{2ab^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}.$$

故 $\quad a|MN|=|AB|\cdot|AC|$.

【模拟实战】

习题 A

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上存在一点 P，使得 $\angle F_1PF_2=60^\circ$（F_1，F_2 为椭圆焦点）. 求离心率 e 的取值范围.
2. 试问椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 e 在什么范围内，椭圆上恒存在一点 P，使得点 P 到两焦点的距离之积等于焦距的平方？
3. 已知椭圆的长轴长为 4，焦距为 2，过左焦点的两条互相垂直的弦的长度之和为 $\frac{48}{7}$. 试求这两条弦的长度之积.
4. 已知椭圆中心在原点，焦点在坐标轴上，直线 $y=x+1$ 与该椭圆相交于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$，$|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 求椭圆方程. （1991 年全国高考题）
5. 试证：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的内接三角形的面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.
6. 试证：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内接矩形的面积的最大值为 $2ab$.
7. 设 AB 是过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中心的弦，F 是焦点，则 $\triangle ABF$ 面积的最大值是 $bc(c^2=a^2-b^2)$.
8. 设 P 是椭圆的准线 l 与对称轴的交点，F 是对应焦点，AB 是过 F 的弦，则 $\angle APB$ 的最大值为 $2\arctan e$（e 为离心率）.
9. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，两焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，点 Q 为椭圆上异于长轴顶点的点，过焦点 F_1（或 F_2）作 $\angle F_1QF_2$ 的外角平分线的垂线，垂足为 P，则 P 点的轨迹是以原点为圆心，a 为半径的圆（除点 $(-a,0)$，$(a,0)$）.

10. 解方程$\sqrt{x^2+6x+13}+\sqrt{x^2-2x+4}=8$.

11. 已知 A,B 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的两点,线段 AB 的中垂线与 x 轴相交于点 $P(x_0,y_0)$.求证:$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$. (1992 年全国高考题)

12. 求函数 $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-2x}$的值域.

13. 求函数 $f(x)=2x+3+\sqrt{-2x^2+12x-14}$的值域.

习题 B

1. 试证:从椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$上的点 P 看焦点的视角的最大值为 $\arccos(\frac{2b^2}{a^2}-1)$.

2. 设 P 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任一点,$P_1P_2$ 是椭圆的任意一条弦,直线 PP_1,PP_2 的斜率分别为 k_1,k_2.若 P_1P_2 过中心 O,则 $k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}$.

3. 设 A,B 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$长轴上分别位于椭圆内(异于原点)、外部的两点,且 A,B 的横坐标 x_A,x_B 满足 $x_A\cdot x_B=a^2$.(1)若过 A 点引直线与椭圆相交于 P,Q 两点,则$\angle PBA=\angle QBA$;(2)若过 B 点引直线交椭圆于 P,Q,则$\angle PAB+\angle QAB=180°$.

4. 设椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$的两条准线和 x 轴相交于 E_1,E_2,点 P 在椭圆上,$\angle E_1PE_2=\alpha$,e 为离心率,c 为半焦距.则 α 为钝角,且当 $e^2>\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$时有 $\cot\alpha\leqslant -e$,等号当且仅当$|y_P|=\frac{ab^2}{c^2}$时取得.

5. 已知定点 $A(1,1)$,F 为椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点,动点 P 在椭圆上.试求$|PF|+|PA|$的最大值和最小值,并求取得最值时 P 点的坐标.

6. 设 $AB,A'B'$分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和圆 $x^2+y^2=a^2$ 的弦,端点 A 与A',B 与B'的横坐标相同,纵坐标同号.试证:当 AB 经过椭圆内的定点 $M(p,q)$时,$A'B'$必经过定点 $M'(p,\frac{a}{b}q)$.

7. 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的中心 O 任作两条互相垂直的射线交椭圆于A,B两点.求证:$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant|AB|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

8. 椭圆 Γ 中心为O,直线 l 不与Γ 相交.P 为l 上任一点,射线 OP 交Γ 于R,而点 Q 在射线OP 上,且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.以 Q 为中点的中点弦记为l_P.求证:l_P经过一定点.

9. 已知直线 $l:Ax+By+C=0$ 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于 P,Q 两点,O 为椭圆中心.试证:当且仅当 $a^2A^2+b^2B^2=2C^2$ 时,$\triangle OPQ$ 有最大面积$\frac{1}{2}ab$.

10. 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任取两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$,点 $P(x,y)$是以线段 P_1P_2 为直径的圆上任一点.求证:$x^2+y^2\leqslant\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$.

(《数学通报》问题 1374 题)

11. 设椭圆 Γ 的离心率为e,F_1,F_2 为其两焦点,P 为椭圆上任一点(除长轴两顶点外),r,R 分别为$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆、外接圆半径.求证:$\frac{r}{R}\leqslant2e(1-e)$.

12. 试找出离心率为 m 的椭圆的特征量应满足的一些关系.

第二十九章　双曲线的性质及应用

【基础知识】

双曲线具有一般圆锥曲线的性质外，还具有下述有趣性质：

性质 1　双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点为 F_1,F_2，其上任意一点 $P(x_0,y_0)$处的两条焦半径长，当 $x_0\geqslant a$ 时，$|PF_1|=ex_0+a$，$|PF_2|=ex_0-a$；当 $x_0\leqslant a$ 时，$|PF_1|=-(ex_0+a)$，$|PF_2|=-(ex_0-a)=a-ex_0$.

性质 2　以焦半径为直径的圆与以实轴为直径的圆外切.

证明　设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，其上任一点 $P(x_0,y_0)$，设两焦点为 F_1,F_2，PF_2 的中点为 M，中心 O 为 F_1F_2 的中点，则 $|OM|=\frac{1}{2}|PF_1|=\frac{1}{2}(ex_0+a)$，但以实轴为直径的圆 $x^2+y^2=a^2$ 与以 PF_2 为直径的圆的半径之和为 $a+\frac{1}{2}|PF_2|=a+\frac{1}{2}(ex_0-a)=\frac{1}{2}(ex_0+a)$，即证.

性质 3　设 F_1,F_2 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点 P 是双曲线上异于顶点的任意一点，(Ⅰ)$|PF_1|\cdot|PF_2|$的最小值为 b^2；(Ⅱ)设$\angle F_1PF_2=2\theta$，则$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{b^2}{\sin^2\theta}$，且 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\cot^2\theta$；(Ⅲ)设$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，则当点 P 在双曲线右支上时，$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}=\frac{e-1}{e+1}$；当点 P 在双曲线左支上时，$\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{e-1}{e+1}$.

证明　(Ⅰ)当 P 为双曲线顶点时，即取最小值.

(Ⅱ)在$\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理，有$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos2\theta=4c^2$，由$\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a$，有$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2$，两式相减，化简即得$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1-\cos2\theta}=\frac{b^2}{\sin^2\theta}$.

$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin2\theta=b^2\cdot\cot\theta$.

(Ⅲ)P 在右支上时,由 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ 及正弦定理,有 $\frac{|PF_1|}{\sin\beta}=\frac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\frac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}$. 由等比定理,有 $\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a}{\sin\beta-\sin\alpha}$. 故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}}$,故 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}=\frac{e-1}{e+1}$.

P 点在左支上时,同理可证.

性质4 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上异于顶点的一点,O 是中心,F_1,F_2 为其左、右焦点,令 $|OP|=d$,则 $|PF_1|\cdot|PF_2|-d^2=b^2-a^2$.

其证明与椭圆性质8的证明类似.

性质5 直线 $Ax+By+C=0$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1(a>0,b>0)$ 相交、相切、相离的充要条件是 $A^2a^2-B^2b^2\gtreqless\pm C^2$ 且 $A^2a^2-B^2b^2\neq0$.

其证明与椭圆性质9的证明类似.

推论 直线 $Ax+By+C=0$ 与双曲线 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 相交、相切、相离的充要条件是 $A^2a^2-B^2b^2\gtreqless(Am+Bn+C)^2$.

性质6 设双曲线的一个焦点为 F,直线 l 与过顶点 A',A 的切线相交于 M',M,则

(1) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}=0\Leftrightarrow$ 直线 l 与双曲线相切或 l 为双曲线的一渐近线;

(2) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}<0\Leftrightarrow$ 直线 l 与双曲线相离;

(3) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}>0\Leftrightarrow$ 直线 l 与双曲线相交(或相交于一点).

证明 设双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,$F(c,0)$,$A'(-a,0)$,$A(a,0)$,直线 $l:y=kx+m$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}&=(-a-c,m-ka)\cdot(a-c,m+ka)\\&=(c^2-a^2)+m^2-k^2a^2\\&=m^2+b^2-k^2a^2.\end{aligned}$$

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$ 消去 y,得

$(a^2k^2-b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2+b^2)=0$.

$\Delta=4a^2b^2(m^2+b^2-a^2k^2)$.

(1)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}=0\Leftrightarrow m^2+b^2-k^2a^2=0\Leftrightarrow m^2=a^2k^2-b^2\neq0$ 或 $m^2=a^2k^2-b^2=0\Leftrightarrow$ $\Delta=0$ 或 $m=0,k=\pm\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow$直线 l 与双曲线相切或 l 为双曲线的一渐近线；

(2)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}<0\Leftrightarrow m^2<a^2k^2-b^2\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow$直线 l 与双曲线相离；

(3)$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}>0\Leftrightarrow m^2>a^2k^2-b^2\Leftrightarrow m^2>a^2k^2-b^2\neq0$ 或 $m^2>a^2k^2-b^2=0\Leftrightarrow\Delta>0$ 或 l 平行于双曲线的一渐近线$\Leftrightarrow$直线 l 与双曲线相交(或相交于一点).

性质 7 设 P,Q 是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$上的两点，$O$ 为中心，若 $OP\perp OQ$，则$\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$.

证明 设 OP 的倾斜角为 α，将其参数方程$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数)代入双曲线方程，得

$$t^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha},\text{故}\frac{1}{|OP|^2}=\frac{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}.$$

同理，$\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{b^2\sin^2\alpha-a^2\cos^2\alpha}{a^2b^2}$.两式相加即证.

注 类似地可证明如下结论：

(Ⅰ)AB,CD 是过双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$焦点 F 的弦，若 $AB\perp CD$，则(ⅰ)当弦 AB,CD 的端点均在双曲线的同一支或均在两支上时，有$\dfrac{2}{a}\left(\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}\right)=\left|\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right|$；(ⅱ)当弦 AB 与 CD 的端点一组在双曲线的同一支上，另一组在两支上时，有$\dfrac{2}{a}\left|\dfrac{1}{|AB|}-\dfrac{1}{|CD|}\right|=\left|\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right|$.

(Ⅱ)AB 是过双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$焦点 F 的弦，O 为中心，Q 为双曲线上一点，若 $OQ\perp AB$，则(ⅰ)当 A,B 在双曲线的两支上时，有$\dfrac{2}{a|AB|}+\dfrac{2}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$；(ⅱ)当 A,B 在双曲线的同一支时，有$\dfrac{2}{a|AB|}-\dfrac{2}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}$.

性质 8 过双曲线的一个焦点，(Ⅰ)且与双曲线交于同支的弦，以通径为最短，对于大于通径长的任何一个长度 L，在同一支上过焦点可作两条不同的弦；(Ⅱ)且与双曲线交于异支的弦，以其实轴长为最短，对于大于实轴长的一个长度 L，过一个焦点可作两条交于异支的弦.

证明 设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$. 由双曲线的对称性,不妨设弦过双曲线的右焦点,弦的端点分别为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$|AB|=L$.

当焦点弦为通径时,容易求得$L=\frac{2b^2}{a}$,且该弦是唯一的.

当焦点弦不是通径时,设弦所在直线方程为$y=k(x-c)$,并代入双曲线方程得

$(b^2-a^2k^2)x^2+2a^2ck^2x-a^2c^2k^2-a^2b^2=0$.

由此,得$x_1+x_2=\frac{2a^2ck^2}{a^2k^2-b^2}$.

(Ⅰ)当焦点弦与双曲线交于右支上两点时,

易知$L=|AB|=(x_1+x_2-\frac{2a^2}{c})\cdot\frac{c}{a}=\frac{2ab^2k^2+2ab^2}{a^2k^2-b^2}$.

于是 $k^2=\frac{b^2(2a+L)}{a(La-2b^2)}$. ①

若$L<\frac{2b^2}{a}$,则$La-2b^2<0$,①式右边为负数,k无实数解,即不存在小于通径的同支焦点弦;若$L>\frac{2b^2}{a}$,则①中k的两解为$k=\pm\sqrt{\frac{b^2(2a+L)}{a(La-2b^2)}}$,易知此时$|k|>\frac{b}{a}$,所以交于右支的弦有两条.

(Ⅱ)当焦点弦的端点A,B在双曲线异支上时,

易知$L=|AB|=(\frac{2a^2}{c}-x_1-x_2)\cdot\frac{c}{a}=\frac{2ab^2k^2+2ab^2}{b^2-a^2k^2}$.

于是 $k^2=\frac{b^2(L-2a)}{a(La+2b^2)}$. ②

若$L<2a$,则②式右边为负,k无实数解,即不存在小于实数的交于异支的焦点弦;若$L=2a$,则$k=0$,即交于异支的焦点弦以实轴为最短;若$L>2a$,则②中k的两解为$k=\pm\sqrt{\frac{b^2(L-2a)}{a(La+2b^2)}}$,且易知$0<|k|<\frac{b}{a}$,即交于异支的焦点弦有两条.

注 由上述性质,可得如下易于操作的结论:

(1)若$L<\min\{2a,\frac{2b^2}{a}\}$,则这样的焦点弦不存在;

(2)若$L=\min\{2a,\frac{2b^2}{a}\}$,且双曲线非等轴,则弦唯一;

(3)若双曲线等轴,且$L=2a$,则焦点弦有两条,分别为实轴和通径;

(4)若$a<b$(或$b<a$)且当$2a<L<\frac{2b^2}{a}$(或$\frac{2b^2}{a}<L<2a$)时,焦点弦有两条,它们

都交于异支(或同支)上;

(5)若 $L=2a>\frac{2b^2}{a}$(或 $L=\frac{2b^2}{a}>2a$),焦点弦有三条,一条为实轴,另两条交于同支(或一条为通径,另两条交于异支)上;

(6)若 $L>\max\{2a,\frac{2b^2}{a}\}$,焦点弦有四条,两条交于同支上,另两条交于异支上.

性质9 等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 对弦 AB 的张角为直角的充要条件是 $k_{AB}=-\frac{y_0}{x_0}$.

【典型例题与基本方法】

例1 过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点作直线 l 交双曲线于 A,B 两点,若实数 λ 使得 $|AB|=\lambda$ 的直线 l 恰有3条,则 $\lambda=$______.(1997年全国高中联赛题)

解 填4.理由是:首先注意到,过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点且与右支交于两点的弦,当且仅当该弦与 x 轴垂直时,取得最小长度 $\frac{2b^2}{a}=4$.(事实上,在极坐标系中,可设双曲线的方程为 $\rho=\frac{2}{1-\sqrt{3}\cos\theta}$,设 $A(\rho_1,\theta)$, $B=(\rho_2,\pi+\theta)(\rho_1>0,\rho_2>0)$,则 $|AB|=\frac{2}{1-\sqrt{3}\cos\theta}+\frac{2}{1+\sqrt{3}\cos\theta}=\frac{4}{1-3\cos^2\theta}\geqslant 4$,当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,等号成立.

其次,满足题设条件的直线恰有三条时,只有两种可能:(ⅰ)与双曲线左、右两支都相交的只有一条,而仅与右支相交的有两条.此时,与双曲线左、右两支都相交的必是 x 轴,而其两交点间的距离为 $2a=2$.但仅与右支相交的两条的弦长 $\lambda>4$,这不满足题设条件.(ⅱ)与双曲线左、右两支都相交的有两条,而仅与右支相交的只有一条,且这条弦必与 x 轴垂直(否则,由对称性知仅与右支相交的有两条弦),此时,$|AB|=\lambda=4$,且与双曲线左、右两支都相交的弦长也可满足这个条件.所以 $\lambda=4$.

例2 F_1,F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{45}=1$ 的两个焦点,P 是双曲线上一点,已知 $|PF_2|$,$|PF_1|$,$|F_1F_2|$ 成等差数列(或 $2|PF_1|=|PF_2|+|F_1F_2|$),且公差大于0.试求 $\angle F_1PF_2$.

解 由题设,知 $a^2=4,b^2=45$,则 $c=7$.

又 $2|PF_1|=|PF_2|+2c$,则 $2|PF_1|-|PF_2|=14$.

而 $|PF_1|-|PF_2|=2a=4$,从而求得 $|PF_1|=10$,$|PF_2|=6$.于是由性质3(Ⅱ),知

$60=|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{b^2}{\sin^2\theta}=\frac{2b^2}{1-\cos2\theta}$,即得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$.

从而 $\theta=120°$,即$\angle F_1PF_2=120°$.

例3 F_1,F_2 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点,$ab=\sqrt{3}$,直线 l 与 F_2 与 x 轴的夹角为θ,$\tan\theta=\frac{\sqrt{21}}{2}$,且 $QP:PF_2=2$.求双曲线方程. (1991年全国高考题)

解 设 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$,在 $\text{Rt}\triangle OQF_2$ 中,由 $\tan\theta=\frac{\sqrt{21}}{2}$可得 $Q(0,-\frac{\sqrt{21}}{2}c)$.于是$|PF_1|=\frac{11}{6}c$,$|PF_2|=\frac{5c}{6}$,$|OP|^2=\frac{37}{36}c^2$.由性质4,有$\frac{55}{36}c^2-\frac{37}{36}c^2=b^2-a^2$,即$b^2=3a^2$,与已知 $a^2b^2=3$ 联立求得 $a^2=1,b^2=3$.故所求双曲线方程为 $3x^2-y^2=3$.

例4 求过点 $P(6,7)$,且与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 相切的方程.

解 运用性质5,联立方程 $6A+7B+C=0$ 与 $9A^2-16B^2=C^2$ 消去 C,可得

$(3A+5B)(9A+13B)=0$.

求得 $A=-\frac{5}{3}B$ 或$A=-\frac{13}{9}B$,因此求得 $C=3B$ 或 $C=\frac{5}{3}B$,即所求切线方程为 $-\frac{5}{3}Bx+By+3B=0$ 与$-\frac{13}{9}Bx+By+\frac{5}{3}B=0$,即 $5x-3y-9=0$ 与 $13x-9y-15=0$ 为所求.

例5 设点 P 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右支异于顶点的一点,$F_1,F_2$ 分别为其左、右焦点.试证:$\triangle PF_1F_2$ 的$\angle F_1$ 的内角平分线上的旁心的轨迹方程为:

$(c-a)x^2-(c+a)y^2=(c-a)c^2(x>c)$.

证明 设$\angle PF_1F_2=\alpha$,$\angle PF_2F_1=\beta$,由性质3(Ⅱ),在$\triangle PF_1F_2$ 中,有$\frac{|PF_1|}{\sin\beta}=\frac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\frac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}$,即$\frac{2a}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$,从而亦即 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}=\frac{c-a}{c+a}$.

设$\angle F_1$ 的内角平分线上的旁心 $Q(x,y)$,则 $k_{QF_1}=\frac{y}{x+c}$,$k_{QF_2}=\frac{y}{x-c}$.由 $MF_2\perp QF_2$,有 $k_{QF_1}\cdot k_{QF_2}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}$,即$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=\frac{c-a}{c+a}$,故

$(c-a)x^2-(c+a)y^2=(c-a)c^2(x>c)$.

例6 设点 P 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上任意一点,过点 P 的直线与两

渐近线 $l_1:y=\frac{b}{a}x$，$l_2:y=-\frac{b}{a}x$ 分别交于点 P_1,P_2，设 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$.求证：

$$S_{\triangle OP_1P_2}=\frac{(1+\lambda)^2}{4|\lambda|}ab.$$

证明 依题意，设 $P_1(x_1,\frac{b}{a}x_1)$，$P_2(x_2,-\frac{b}{a}x_2)$，$P(x,y)$，则有 $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，且

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{\frac{b}{a}x_1-\lambda\frac{b}{a}x_2}{1+\lambda}.\text{即}\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},①\qquad \text{且}\frac{a}{b}y=\frac{x_1-\lambda x_2}{1+\lambda}.②$$

由 $①^2-②^2$ 得 $x^2-\frac{a^2}{b^2}y^2=\frac{4\lambda x_1x_2}{(1+\lambda)^2}$.

即 $x_1x_2=\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda b^2}(b^2x^2-a^2y^2)=\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda b^2}a^2b^2\cdot(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})=\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}a^2$.

从而 $|OP_1|\cdot|OP_2|=\sqrt{x_1^2+(\frac{b}{a}x_1)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+(-\frac{b}{a}x_2)^2}=(1+\frac{b^2}{a^2})\cdot|x_1x_2|$

$$=(1+\frac{b^2}{a^2})\cdot\frac{(1+\lambda)^2}{4|\lambda|}\cdot a^2=\frac{(1+\lambda)^2}{4|\lambda|}(a^2+b^2).$$

故 $S_{\triangle OP_1P_2}=\frac{1}{2}|OP_1|\cdot|OP_2|\cdot\sin\angle P_1OP_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\lambda)^2}{4|\lambda|}\cdot(a^2+b^2)\cdot\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2}$

$$=\frac{(1+\lambda)^2}{4|\lambda|}ab.$$

【解题思维策略分析】

1. 注意曲线方程形式的巧设

例7 过双曲线上任一点 P 作倾斜角为 α（定值）的直线 l 与双曲线两渐近线交于 Q,R，则 $|PQ|\cdot|PR|$ 为定值.

证明 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则其渐近线方程为 $bx\pm ay=0$.

设 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线上的点，则过 P 的直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases}(t\text{ 为参数})$$

由 $b(x_0+t\cos\alpha)\pm a(y_0+t\sin\alpha)=0$，可得

$$t_1=-\frac{bx_0+ay_0}{a\sin\alpha+b\cos\alpha},t_2=\frac{bx_0-ay_0}{a\sin\alpha-b\cos\alpha}.$$

于是 $|PQ|\cdot|PR|=|t_1|\cdot|t_2|=\dfrac{a^2b^2}{|a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha|}$(定值).

例 8 过双曲线上任一点 P 的切线与双曲线两渐近线交于 A,B 两点.求证:点 P 是线段 AB 的中点.

证明 设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,两渐近线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$.过双曲线上任意一点 $P(x_1,y_1)$的切线方程为$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$,切线方程与渐近线方程联立消去 y,整理得$(b^2x_1^2-a^2y_1^2)x^2-2a^2b^2\cdot x_1x+a^4b^2=0$,即 $x^2-2x_1x+a^2=0$.由韦达定理,知 AB 的中点的横坐标 $x=x_1$,代入切线方程得 $y=y_1$,从而 AB 的中点坐标为(x_1,y_1)和点 P 坐标相同.由此即证.

2. 关注以坐标轴为渐近线的等轴双曲线问题

例 9 求双曲线 $xy=1$ 在第一象限内一支上的一定点 $Q(a,b)$与它在第三象限内一支上的一动点 $P(x,y)$之间的最短距离(以 a 的解析式表示).

解 当以点 Q 为中心,$|QP|$为半径的圆与双曲线 $xy=1(x<0,y<0)$相切时,$|QP|$达到最小值.此时过点 P 的双曲线 $xy=1(x<0,y<0)$的切线与 QP 垂直.设切点 P 的坐标为(x_1,y_1),过 $P(x_1,y_1)$的双曲线的切线方程为 $y_1x+x_1y=2$(即用$\dfrac{y_1x+x_1y}{2}$代 xy),故$\dfrac{y_1-b}{x_1-a}\cdot(-\dfrac{y_1}{x_1})=-1$,且 $x_1y_1=1$,$a\cdot b=1$.

于是$\dfrac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{a}}{x_1-a}\cdot\dfrac{\frac{1}{x_1}}{x_1}=1$,即 $ax_1^2=-1$,从而 $x_1=-a^{-\frac{1}{3}}$,$y_1=-a^{-\frac{1}{3}}$.

所以$|QP|^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$

$$=(-a^{-\frac{1}{3}}-a)^2+(-a^{-\frac{1}{3}}-a^{-1})^2=(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^3$$

故 $|QP|_{\min}=(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

例 10 设双曲线 $xy=1$ 的两支 C_1,C_2 如图 29-1,正三角形 PQR 的三顶点位于此双曲线上.(Ⅰ)求证:P,Q,R 不能都在双曲线的同一支上;(Ⅱ)设 $P(-1,1)$在 C_2 上,Q,R 在 C_1 上,求顶点 Q,R 的坐标. (1997 年全国高中联赛题)

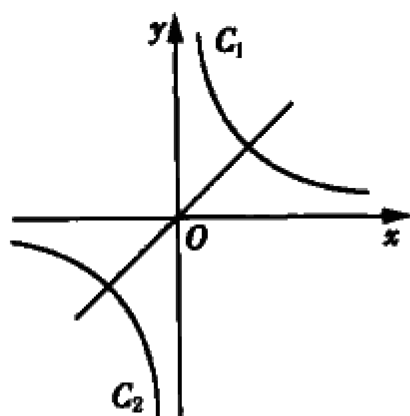


图 29-1

(Ⅰ)证法 1 假设 P,Q,R 在双曲线 $xy=1$ 的同一支如 C_1 上,其坐标分别为$(x_1,\frac{1}{x_1})$,$(x_2,\frac{1}{x_2})$,$(x_3,\frac{1}{x_3})$.设 $0<x_1<x_2<$

x_3,则直线 PQ 的斜率 $k_1=-\frac{1}{x_1x_2}$,直线 QR 的斜率 $k_2=-\frac{1}{x_2x_3}$,$\tan\angle PQR=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{x_2(x_1-x_2)}{1+x_1x_2x_3}<0$.

因此,$\angle PQR$ 是钝角,这与$\triangle PQR$ 是正三角形相矛盾.故 P,Q,R 不能都在双曲线 $xy=1$ 的同一支上.

注 由 $0<x_1<x_2<x_3$,有 $y_1>y_2>y_3$,于是 $PQ^2+QR^2-PR^2=[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2-(x_1-x_3)^2]+[(y_1-y_2)^2+(y_2-y_3)^2-(y_1-y_3)^2]=(2x_2^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3)+(2y_2^2-2y_1y_2-2y_2y_3+2y_1y_3)=2(x_2-x_1)(x_2-x_3)+2(y_2-y_1)(y_2-y_3)<0$.即$\triangle PQR$ 为钝角三角形.

证法2 设 $P(x_1,\frac{1}{x_1})$,$Q(x_2,\frac{1}{x_2})$,$R(x_3,\frac{1}{x_3})$是双曲线 $xy=1$ 上的三点,易得直线 PR 的斜率 $k_1=\frac{-1}{x_1x_3}$,PR 边上的高线方程为 $y-\frac{1}{x_2}=x_1x_3(x-x_2)$.

同理,QR 边上的高线方程为 $y-\frac{1}{x_1}=x_2x_3(x-x_1)$.

联立上述两方程得$\triangle PQR$ 的垂心 $H(-\frac{1}{x_1x_2x_3},-x_1x_2x_3)$,它显然在双曲线 $xy=1$ 上.

当 P,Q,R 在双曲线的同一支如 C_1 上,则 $-x_1x_2x_3<0$,而 H 在另一支 C_2 上,即 H 在$\triangle PQR$ 的外部,即$\triangle PQR$ 为钝角三角形,故 P,Q,R 不能都在双曲线的同一支上.

(Ⅱ)设 Q,R 的坐标分别为$(x_1,\frac{1}{x_1})$,$(x_2,\frac{1}{x_2})$,这时 QR 边上的高线方程为 $y+1=x_1x_2(x+1)$,它必过线段 QR 的中点,因此 QR 的中点的坐标满足上述方程,于是有 $\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}+1=x_1x_2(\frac{x_1+x_2}{2}+1)$,即$(1-x_1x_2)[(x_1+x_2)(1+x_1x_2)+2x_1x_2]=0$.

因 $x_1>0,x_2>0$,上式中括号的式子显然大于0,则 $1-x_1x_2=0$,即 $x_1x_2=1$.于是 Q 点的坐标为$(\frac{1}{x_2},x_2)$,而 R 点的坐标为$(x_2,\frac{1}{x_2})$,这说明 Q,R 关于直线 $y=x$ 对称.

PQ,PR 所在的直线分别为过 P 点与直线 $y=x$ 交成 30°角的相互对称的两条直线,易见其倾斜角分别为 75°和 15°.不妨设 PQ 的倾斜角为 75°,这时它的方程为 $y+1=\tan75°\cdot(x+1)$,即 $y+1=(2+\sqrt{3})(x+1)$.将其与双曲线方程 $xy=1$ 联立,解得 Q 点坐标为$(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$,由对称性知 R 点的坐标为$(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3})$.

注 由(Ⅰ)的证法2,使我们获得如下结论:

三个顶点都在同一等轴双曲线上的三角形的垂心也在此双曲线上.

由此也启发我们:在处理某些等轴双曲线问题时,可考虑以坐标轴为渐近线的等轴双曲线来讨论.

例11 一直角三角形的三顶点在等轴双曲线上.求证:直角顶点处的切线垂直于斜边.

证明 如图29-2,设等轴双曲线方程为 $xy=c^2$,直角三角形 ABC 的三顶点在等轴双曲线上,直角顶点 $A(ct,\frac{c}{t})$,其余两顶点 $B(ct_1,\frac{c}{t_1})$,$C(ct_2,\frac{c}{t_2})$,直线 AB,AC,BC 的斜率分别为

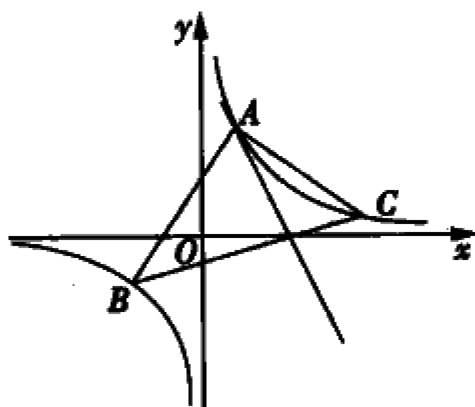


图29-2

$$k_{AB}=-\frac{1}{tt_1},k_{AC}=-\frac{1}{tt_2},k_{BC}=-\frac{1}{t_1t_2}.$$

由 $AB\perp AC$,有 $\frac{1}{t^2t_1t_2}=-1$.

过点 A 的切线为 $x+t^2y=2ct$,此切线斜率为 $k=-\frac{1}{t^2}$,于是 $k\cdot k_{BC}=\frac{1}{t^2t_1t_2}=-1$,故直角顶点处的切线垂直于斜边.

3.借用双曲线知识,求解函数等其他问题

例12 求函数 $y=3x+2\sqrt{x^2-2}$ 的值域.

解 令 $u=3x$,$v=2\sqrt{x^2-2}$($v\geqslant0$,$|u|\geqslant3\sqrt{2}$),则 $y=u+v$ 且 $\frac{u^2}{18}-\frac{v^2}{8}=1$.

视 y 为参数,在 uOv 坐标系中,作出直线系 $v=-u+y$ 及双曲线部分 $\frac{u^2}{18}-\frac{v^2}{8}=1$ $(v>0)$,如图29-3.

当直线过点 $(3\sqrt{2},0)$ 时,直线在 v 轴上的截距 $y=3\sqrt{2}$;当直线与双曲线的左支相切时,由切线公式 $y=kx\pm\sqrt{k^2a^2-b^2}$ 得截距 $y=-\sqrt{10}$.

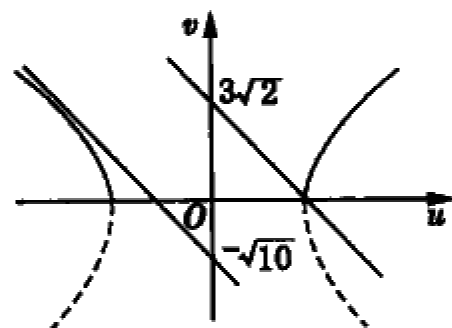


图29-3

故函数 y 的值域是 $(-\infty,-\sqrt{10})\cup[3\sqrt{2},+\infty)$.

例13 求二元函数 $f(x,y)=(x-y)^2+(x+\frac{1}{y}+1)^2$ 的最小值. (1998年"希望杯"竞赛题)

解 因$f(x,y)=(x-y)^2+(-x-1-\frac{1}{y})^2$可看作直线$x+y+1=0$上的点$(x,-x-1)$和双曲线$xy=1$上的点$(y,\frac{1}{y})$的距离的平方式.由作图可知,所求最小值为$\frac{1}{2}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,两焦点为$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,点$Q$是双曲线右(或左)支上除顶点外任一点,从焦点$F_1$(或$F_2$)作$\angle F_1QF_2$的角平分线的垂线,垂足为$P$,则$P$点的轨迹是以原点为圆心,$a$为半径的圆(除点$(-a,0)$,$(a,0)$).
2. 求曲线$9x^2+16y^2=144$与$7x^2-32y^2=224$的公切线方程.
3. 一直线截双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$于$P,Q$两点,与渐近线交于$P',Q'$两点.求证:$|PP'|=|QQ'|$.
4. 已知双曲线中心为原点,焦点在x轴上,离心率$e=\frac{5}{3}$,且与直线$8x+2\sqrt{7}y-16=0$相切.求双曲线方程.

习题 B

1. 已知双曲线$C:(1-a^2)x^2+a^2y^2=a^2(a>1)$,设该双曲线上支的顶点为$A$,且上支与直线$y=-x$交于$P$点,一条以$A$为焦点,$M(0,m)$为顶点,开口方向向下的抛物线通过$P$点,且$PM$的斜率为$k$满足$\frac{1}{4}\leqslant k\leqslant\frac{1}{3}$.求实数$a$的取值范围.
2. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,a\neq b)$上有一定点$A$,点$P,Q$为满足$PA\perp QA$的异于点$A$的任意两点.求证:$PQ$过定点.

第三十章 抛物线的性质及应用

【基础知识】

抛物线具有一般圆锥曲线的性质外,还具有如下有趣的性质:

性质1 $P(x_0,y_0)$为抛物线 $y^2=2px(p>0)$上任一点,F 为其焦点,则焦半径 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$.

性质2 抛物线的所有焦半径,(Ⅰ)以过顶点的焦半径为最短;(Ⅱ)两条共线焦半径(焦点弦)以通径为最短.

证明 设抛物线的极坐标方程为 $\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$,则(Ⅰ)$\rho\geqslant\frac{p}{2}$;(Ⅲ)$\rho_1+\rho_2=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1-\cos(\theta+\pi)}=\frac{2p}{1-\cos^2\theta}\geqslant 2p$.

性质3 $P(x_0,y_0)$是抛物线 $y^2=2px(p>0)$上任一点,F 为焦点,以 PF 为直径的圆必与 y 轴相切,切点是 $Q(0,\frac{y_0}{2})$,并且直线 PQ 是抛物线的切线.

证明 易求以 PF 为直径的圆的方程为

$$x^2+y^2-(x_0+\frac{p}{2})x-y_0y+\frac{1}{2}px_0=0.$$

令 $x=0$,有 $y^2-y_0\cdot y+\frac{1}{2}px_0=0$. (*)

注意 $P(x_0,y_0)$在 $y^2=2px$ 上,由(*)式的$\triangle=y_0^2-2px_0=0$ 知以 PF 为直径的圆与 y 轴相切,且切点 $Q(0,\frac{y_0}{2})$.

又由两点式可求得直线 PQ 的方程为$y_0y=p(x+x_0)$,此即为过 $P(x_0,y_0)$的抛物线的切线方程.结论获证.

性质4 点 $P(x_0,y_0)$是抛物线 $y^2=2px$ 上任一点,过 P 作准线$l:x=-\frac{p}{2}$的垂线,垂足为 N,抛物线过 P 点的切线交 y 轴于 Q,交对称轴于 K,F 为其焦点,则(Ⅰ)四边形 $FPNK$ 是菱形;(Ⅱ)F,Q,N 三点共线.

证明 （Ⅰ）易知 N 点坐标为$(-\frac{p}{2},y_0)$，K 点坐标为$(-x_0,0)$，则$|KF|=x_0+\frac{p}{2}=|NP|$且 $KF\parallel NP$.

又由抛物线定义有$|PF|=|PN|$，故 $FPNK$ 为菱形.

（Ⅱ）由过 P 点的切线方程 $y_0y=p(x+x_0)$，令 $x=0$ 得 Q 点坐标为$(0,\frac{px_0}{y_0})=(0,\frac{y_0}{2})$. 又由两点式求得 FN 的方程 $y=-\frac{y_0}{p}(x-\frac{p}{2})$，而 Q 点坐标满足 FN 的方程，故 F,Q,N 三点共线.

性质 5 直线 $Ax+By+C=0$ 与抛物线 $y^2=\pm 2px(p>0)$ 相交、相切、相离的充要条件是 $PB^2 \gtreqqless \pm 2AC(p>0)$.

推论 直线 $Ax+B+C=0$ 与抛物线$(y-n)^2=\pm 2p(x-m)(p>0)$相交、相切、相离的充要条件是 $PB^2 \gtreqqless \pm 2A(Am+Bn+C)$.

性质 6 设抛物线的焦点为 F，过 F 的直线 l' 与直线 l 平行（或重合），直线 l'、l 与过顶点 O 的切线分别相交于 M'、M，则

(1) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}=0\Leftrightarrow$直线 l 与抛物线相切；

(2) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}<0\Leftrightarrow$直线 l 与抛物线相离；

(3) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}>0\Leftrightarrow$直线 l 与抛物线相交（或相交于一点）.

证明 设抛物线方程 $y^2=2px(p>0)$，焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，直线 $l:y=kx+m$，直线 l'：$y=k(x-\frac{p}{2})$. 则

$$\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}=(-\frac{p}{2},-\frac{pk}{2})\cdot(-\frac{p}{2},m)=\frac{p^2}{4}-\frac{pkm}{2}=\frac{1}{4}(p^2-2pkm).$$

由$\begin{cases}y^2=2px\\ y=kx+m\end{cases}$消去 x，得 $ky^2-2py+2pm=0$，其中 $\Delta=4p^2-8pkm$.

(1) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}=0\Leftrightarrow p^2-2pmk=0\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow$直线 l 与抛物线相切；

(2) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}<0\Leftrightarrow p^2-2pmk<0\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow$直线 l 与抛物线相离；

(3) $\overrightarrow{FM'}\cdot\overrightarrow{FM}>0\Leftrightarrow p^2-2pmk>0\Leftrightarrow\Delta>0\Leftrightarrow$直线 l 与抛物线相交（或相交于一点）.

性质 7 过抛物线准线上任一点 M 作抛物线的两条切线 l_1 与 l_2，则（Ⅰ）这两条切线互相垂直；（Ⅱ）两切点 A 与 B 的连线过焦点，且这点 M 与焦点的连线垂直于过两切点的弦；（Ⅲ）设 l_1,l_2 与 y 轴交于 E,F，则 A,E,F,B 四点共圆.

证明 如图 30－1，设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，F 为其焦点，l 为其准线，l_1，l_2 为过点 M 的切线，A,B 为切点. 过 A,B 分别作 $AC\perp l$ 于 C，作 $BD\perp l$ 于 D.

(Ⅰ)过 MF,AF,BF,则由光学性质知$\angle CAM=\angle MAF$.又$|AC|=|AF|$,则$\triangle AMF\cong\triangle AMC$,故$\angle CMA=\angle AMF$.

同理,$\angle FMB=\angle MMD$.故$\angle AMB=90^\circ$,即 $l_1\perp l_2$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)中证明知$\angle AFM=\angle ACM=90^\circ$,$\angle BFM=\angle BDM=90^\circ$,故 A,F,B 三点共线,且亦有 $MF\perp AB$.

(Ⅲ)由$\angle EAB=\angle EAC=\angle BMD=\angle BFL$($L$ 在 EF 的延长线上),故 A,E,F,B 四点共圆.

图 30-1

性质 8 从抛物线的焦点向它的任意切线作垂线,则其垂足一定在过抛物线顶点的切线上.

证明 设抛物线方程为 $x^2=2px(p>0)$,其上任意一点为 $P(x_0,y_0)$,过 P 的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$.

过焦点$(\frac{p}{2},0)$向切线引垂线的方程为 $y=-\frac{y_0}{p}x+\frac{y_0}{2}$,它们的交点满足
$\begin{cases}y_0y=p(x+x_0),\\ y=-\frac{y_0}{p}x+\frac{y_0}{2}.\end{cases}$ 消去 y,得 $px+px_0+\frac{y_0^2}{p}x-\frac{y_0^2}{2}=0$.将 $y_0^2=2px_0$ 代入,有$(p+2x_0)x=0$.而 $p+2x_0\neq0$,故 $x=0$,即证.

性质 9 过以 F 为焦点的抛物线上任意两点 P,Q 的切线相交于 T,则$\angle TPF=\angle QTF$,$\angle PTF=\angle TQF$.

证明 如图 30-2,设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$.过顶点的切线(即 y 轴)分别交 TP,TQ 于点 M,N,连 FM,FN,则由性质 8,知 $FM\perp PT$,$FN\perp TQ$.故 T,M,F,N 四点共圆,有$\angle NTF=\angle NMF$.

又过点 P 作 $PK\perp MN$ 于 K,则 $KP/\!/OF$.由抛物线光学性质,有$\angle MPK=\angle TPF$,$\angle NMF$ 和$\angle MPK$ 均与$\angle PMK$ 互余,则$\angle NMF=\angle MPK$,推得$\angle NTF=\angle TPF$,即$\angle QTF=\angle TPF$.同理,$\angle PTF=\angle TQF$.

图 30-2

注 由此例结论即可推得(ⅰ)TP,TQ 在焦点 F 所张的角相等;(ⅱ)由$\triangle FPT\backsim\triangle FTQ$,有$|FT|^2=|FP|\cdot|FQ|$.

性质 10 抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点弦长等于 $2p(1+\frac{1}{k^2})$或$\frac{2p}{\sin^2\alpha}$(其中 k 为焦点弦的斜率,α 为倾斜角,$0<\alpha<180^\circ$).

性质 11 抛物线焦点弦的两个端点的同名坐标之积分别为常数$\frac{p^2}{4}$和 $-p^2$(即

$x_1x_2=\frac{p^2}{4}, y_1y_2=-p^2$).

性质 12 以抛物线焦点弦为直径的圆必过此抛物线的准线.

性质 13 抛物线的过焦点弦的两个端点的切线互相垂直,并且交点在准线上.

人们称抛物线上任意一段曲线弧 ACB 为弓,其弧两端所张线段 AB 为弓的底,弓和底所围成的图形称为抛物线弓形.

性质 14 抛物线弓形的中线平行于它所在抛物线的对称轴或在对称轴上.

性质 15 过抛物线弓形顶点的切线平行于底边.

性质 16 底边过焦点的抛物线弓形,过底边一端点的切线平行于底边另一端点在准线上的射影和焦点的连线.

性质 17 平行于抛物线弓形 AQB 中线 MQ 的直线交弓形的底于 D,交弓于 E,交过 B 的切线于 F,则 $\frac{DE}{DF}=\frac{AD}{AB}$.

【典型例题与基本方法】

例 1 已知点 $A(0,2)$ 和抛物线 $y^2=x+4$ 上两点 B,C,使得 $AB\perp BC$.求点 C 的纵坐标取值范围.

(2002 年全国高中联赛题)

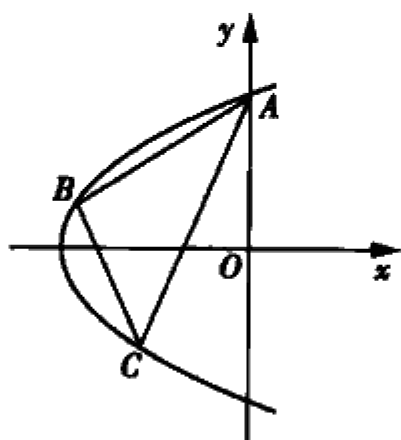


图 30-3

解 如图 30-3,设点 B 的坐标为 (y_1^2-4, y_1),点 $C(y^2-4, y)$.显然 $y_1^2-4\neq 0$,故 $k_{AB}=\frac{y_1-2}{y_1^2-4}=\frac{1}{y_1+2}$.

由于 $AB\perp BC$,所以 $k_{BC}=-(y_1+2)$,从而

$$\begin{cases} y-y_1=-(y_1+2)[x-(y_1^2-4)], \\ y^2=x+4. \end{cases}$$

消去 x,注意到 $y\neq y_1$,得到 $(2+y_1)(y+y_1)+1=0$,即

$$y_1^2+(2+y)y_1+(2y+1)=0.$$

由 $\Delta\geqslant 0$,解得 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 4$.

当 $y=0$ 时,点 B 的坐标为 $(-3,-1)$;当 $y=4$ 时,点 B 的坐标为 $(5,-3)$ 均满足题意.故点 C 的纵坐标 y 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

例 2 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 P 作抛物线的切线交 x 轴于点 Q,点 F 为其焦点.求证:$|PF|=|QF|$.

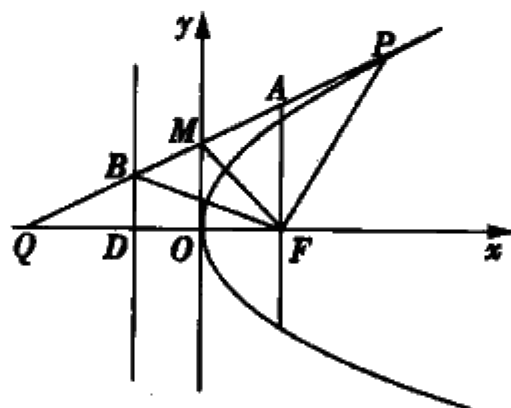


图 30-4

证明 如图 30-4,设 $P(x_0, y_0)$,则过 P 的切线方程

为 $y_0y=p(x+x_0)$，切线和 x 轴的交点 Q 的坐标为 $(-x_0,0)$.

于是 $|QF|=\frac{p}{2}+x_0$.

而 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$，故 $|PF|=|QF|$.

例 3 抛物线上任意一点的切线与通径的延长线及准线各相交于点 A,B. 求证：这两点到焦点 F 的距离相等.

证明 设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的切线 PA 与过顶点的切线（即 y 轴）交于点 M，则 $FM\perp PA$.

设准线与对称轴交于点 D，则有 $|OD|=|OF|$，从而 $|MB|=|MA|$. 于是在 $\triangle FAB$ 中，由 $FM\perp AB$，知 $|FA|=|FB|$.

例 4 求证：经过抛物线 $y^2=2px$ 上任意两点的弦的中点 M 的直径所在直线必过两切线交点.

证明 设抛物线 $y^2=2px$ 上任意两点分别为 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则 P_1P_2 的中点 M 的直径所在直线的方程为 $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$.

又过 P_1,P_2 的切线方程分别为 $y_1y=p(x+x_1)$，$y_2y=p(x+x_2)$，两切线交点 T 的纵坐标 $y_0=\frac{p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}$，而 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，$y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$，从而 $y_0=\frac{p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$，由此即说明结论成立.

注 可求得比例中的 T 点的坐标为 $\left(\frac{y_1y_2}{2p},\frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$，且有 P_1,T,P_2 三点的横坐标成等比数列，纵坐标成等差数列，线段 TF 被抛物线平分.

例 5 求抛物线 $y^2=5x$ 与圆 $9x^2+9y^2=16$ 的公切线方程.

解 设公切线方程为 $Ax+By+C=0$，以 $p=5$，$r=\frac{4}{3}$ 分别为直线与抛物线，与圆相切的充要条件，有方程组 $\begin{cases}\frac{5}{2}B^2=2AC,\\ \left(\frac{4}{3}\right)^2(A^2+B^2)=C^2.\end{cases}$ 解得 $A=-\frac{5}{4}C$（不合）或 $A=\frac{9}{20}C$，$B=\pm\frac{3}{5}C$. 于是所求公切线方程为 $9x\pm12y+20=0$.

例 6 设 AB 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点弦，O 为坐标原点，则（Ⅰ）三角形 OAB 面积的最小值为 $\frac{p^2}{2}$；（Ⅱ）过 A,B 的切线交于点 M，三角形 MAB 的最小值为 p^2.

证明 当 $AB\perp x$ 轴时，显然 $S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2}$，$S_{\triangle AMB}=p^2$.

当 AB 不垂直 x 轴时，设 AB 的方程为 $y=k(x-\frac{p}{2})$，代入 $y^2=2px$，整理得

$k^2x^2-(pk^2+2p)x+\frac{1}{4}k^2p^2=0$.

又设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\frac{2p(1+k^2)}{k^2}$.

(Ⅰ)原点 O 到弦 AB 的距离为 $d=\frac{|k|\cdot p}{2\sqrt{k^2+1}}$.

于是 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{p^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{k^2+1}}{|k|}>\frac{p^2}{2}$.

(Ⅱ)由性质 6(Ⅱ)，有 $MF\perp AB$，且 $|MF|\geqslant p$，故 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|MF|=\frac{1}{2}\cdot 2p(\frac{1}{k^2}+1)\cdot|MF|\geqslant p\cdot p=p^2$.

例 7 抛物线 $C_1:y=x^2+2ax+b$ 与 x 轴相交于 A，B.若 C_1 的顶点总在以线段 AB 为直径的圆 C_2 内.试求 a，b 应满足的关系.

解 设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$.由 C_1，令 $y=0$ 有 $x^2+2ax+b=0$.在 $\Delta>0$ 即 $a^2>b$ 的条件下，有 $x_1+x_2=-2a$，$x_1\cdot x_2=b$.

圆 C_2 的方程可设为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-0)(y-0)=0$，化简整理得 $x^2+y^2+2ax+b=0$.

又 C_1 配方得 $(x+a)^2=y-(b-a^2)$，且 C_1 的顶点 $(-a,b-a^2)$ 在圆 C_2 内，有 $(-a)^2+(b-a^2)^2+2a(-a)+b<0$，即有 $(b-a^2)(b-a^2+1)<0$，解得 $a^2-1<b<a^2$.

故当 a，b 满足 $a^2-1<b<a^2$ 时，C_1 的顶点总在以线段 AB 为直径的圆 C_2 内.

例 8 过抛物线 $y=x^2$ 上的一点 $A(1,1)$ 作抛物线的切线分别交 x 轴于 D，交 y 轴于 B.点 C 在抛物线上，点 E 在线段 AC 上，满足 $\frac{AE}{EC}=\lambda_1$；点 F 在线段 BC 上，满足 $\frac{BF}{FC}=\lambda_2$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，线段 CD 与 EF 交于点 P.当点 C 在抛物线上移动时，求点 P 的轨迹方程.

(2005 年全国高中联赛题)

解 过抛物线上点 A 的切线斜率为：$y'=2x|_{x=1}=2$，则切线 AB 的方程为 $y=2x-1$.于是 B，D 的坐标方程为 $B(0,-1)$，$D(\frac{1}{2},0)$，所以 D 是线段 AB 的中点，设 $P(x$，

$y)$，$C(x_0,x_0^2)$，$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，由 $\frac{AE}{EC}=\lambda_1$，知 $x_1=\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}$，$y_1=\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}$；由 $\frac{BF}{FC}=\lambda_2$，得 $x_2=\frac{\lambda_2x_0}{1+\lambda_2}$，$y_2=\frac{-1+\lambda_2x_0^2}{1+\lambda_2}$.

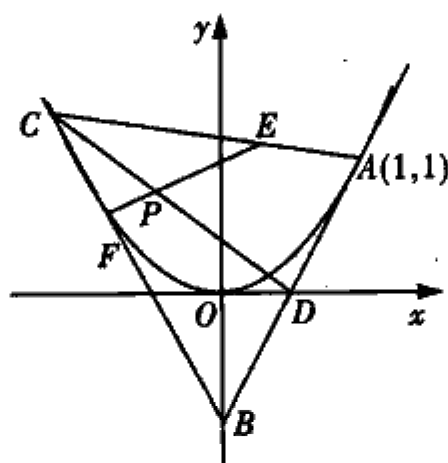


图 30－5

由两点式得 EF 所在的方程为

$$[(\lambda_2-\lambda_1)x_0-(1+\lambda_2)]y=[(\lambda_2-\lambda_1)x_0^2-3]x+1+x_0-\lambda_2x_0^2. \quad ①$$

当 $x_0\neq\frac{1}{2}$时，直线 CD 的方程为

$$y=\frac{2x_0^2x-x_0^2}{2x_0-1}. \quad ②$$

联立①、②，解得 $x=\frac{x_0+1}{3}$，$y=\frac{x_0^2}{3}$，两式消去 x_0 得 P 点的轨迹方程为

$$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2.$$

当 $x_0=\frac{1}{2}$时，EF 的方程为 $-\frac{3}{2}y=(\frac{1}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_1-3)x+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\lambda_2$，$CD$ 的方程为 $x=\frac{1}{2}$，联立解得$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{12})$也在点 P 的轨迹上.

因 C 与 A 不重合，$x_0\neq1$，$x\neq\frac{2}{3}$.所以所求轨迹方程为

$$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2,x\neq\frac{2}{3}.$$

【解题思维策略分析】

1. 注意抛物线的点的参数表示法

例 9 已知抛物线 $y^2=2px$ 及定点 $A(a,b)$，$B(-a,0)$（$ab\neq0$，$b^2\neq2pa$）. M 是抛物线上的点，设 AM，BM 与抛物线的另一交点分别是 M_1，M_2. 求证：当 M 点在抛物线上变动时（只要 M_1，M_2 存在且 $M_1\neq M_2$），直线 M_1M_2 恒过一个定点；并求出这个定点的坐标.　　　　（1998 年全国高中联赛题）

证明　设 M，M_1，M_2 的坐标分别为$(\frac{y_0^2}{2p},y_0)$，$(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$，$(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$.

由 A，M_1，M_2 共线，得$\frac{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p}}{y_1-y_0}=\frac{\frac{y_0^2}{2p}-a}{y_0-b}$，化简得 $y_1y_0=b(y_1+y_0)-2pa$.

所以 $y_1=\dfrac{by_0-2pa}{y_0-b}$. ①

同理,由 B,M,M_2 共线,得 $y_2=\dfrac{2pa}{y_0}$. ②

设(x,y)是直线 M_1M_2 上的点,则 $y_1y_2=y(y_1+y_2)-2px$. ③

由①,②和③消去 y_1,y_2,得$\dfrac{(by_0-2pa)\cdot 2pa}{(y_0-b)y_0}=y\left(\dfrac{by_0-2pa}{y_0-b}+\dfrac{2pa}{y_0}\right)-2px$,

经整理,得 $y_0^2(2px-by)+2pb(a-x)+2pa(by-2pa)=0$.

由于方程组$\begin{cases}2px-by=0\\a-x=0\\by-2pa=0\end{cases}$有解$\begin{cases}x=a,\\y=\dfrac{2pa}{b}.\end{cases}$

所以动直线 M_1M_2 恒过定点$\left(a,\dfrac{2pa}{b}\right)$.

例 10 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$上的定点 $A(a,b)$,引抛物线的两条弦 AP,AQ. 则 $AP\perp AQ$ 的充要条件是直线 PQ 过定点 $M(2p+a,-b)$.

证明 必要性:设 $P\left(\dfrac{y_1^2}{2p},y_1\right),Q\left(\dfrac{y_2^2}{2p},y_2\right)(y_1\neq y_2)$,则直线 PQ 的方程为

$(y-y_1)\left(\dfrac{y_2^2}{2p}-\dfrac{y_1^2}{2p}\right)=\left(x-\dfrac{y_1^2}{2p}\right)(y_2-y_1)$,

即 $2px-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$. (*)

由 $AP\perp AQ$,有 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-1$,即$\dfrac{y_1-b}{\dfrac{y_1^2}{2p}-a}\cdot\dfrac{y_2-b}{\dfrac{y_2^2}{2p}-a}=-1$.

即 $4p^2(y_1-b)(y_2-b)+(y_1^2-2pa)(y_2^2-2pa)=0$.

将 $b^2=2pa$ 代入,得$(y_1-b)(y_2-b)[4p^2+(y_1+b)(y_2+b)]=0$.

而 $y_1-b\neq0,y_2-b\neq c$,则 $4p^2+(y_1+b)(y_2+b)=0$.

即 $y_1y_2=-[b(y_1+y_2)+b^2+4p^2]$,并将其代入(*)式,得

$2p[x-(2p+a)]-(y_1+y_2)(y+b)=0$.

由此即知直线 PQ 恒过定点 $M(2p+a,-b)$.

充分性:可设直线 PQ 的方程为 $x=m(y+b)+2p+a$,并代入 $y^2=2px$,得

$y^2-2pmy-2p(bm+2p+a)=0$.

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=2pm,y_1y_2=-2p(bm+2p+a)$,于是

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2(bm+2p+a)=2pm^2+2(bm+2p+a)$,

$$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=(bm+2p+a)^2.$$

又 $b^2=2pa$，则 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{y_1-b}{x_1-a}\cdot\frac{y_2-b}{x_2-a}=\frac{y_1y_2-b(y_1+y_2)+b^2}{x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2}$

$$=\frac{-4p(p+bm)}{4p(p+bm)}=-1.$$

由此即知 $AP\perp AQ$.

2. 注意平面几何、代数等知识的综合应用

例 8 另解：

易知 AB 的方程为 $y=2x-1$，$B(0,-1)$，$D(\frac{1}{2},0)$，即知 D 是 AB 的中点.

令 $\frac{CD}{CP}=r$，$\frac{CA}{CE}=1+\lambda_1=t_1$，$\frac{CB}{CF}=1+\lambda_2=t_2$，

则 $t_1+t_2=3$. 由于 CD 为 $\triangle ABC$ 的中线，所以

$S_{\triangle CAB}=2S_{\triangle CAD}=2S_{\triangle CBD}$，

而 $\frac{1}{t_1t_2}=\frac{CE\cdot CF}{CA\cdot CB}=\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}}=\frac{S_{\triangle CEP}}{2S_{\triangle CAD}}+\frac{S_{\triangle CEP}}{2S_{\triangle CBD}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{t_1r}+\frac{1}{t_2r})=\frac{t_1+t_2}{2t_1t_2r}=\frac{3}{2t_1t_2r}$，

所以 $r=\frac{3}{2}$. 故 P 是 $\triangle ABC$ 的重心.

设 $P(x,y)$，$C(x_0,x_0^2)$，因点 C 异于 A，则 $x_0\neq1$. 故重心 P 的坐标为

$$x=\frac{0+1+x_0}{3}=\frac{1+x_0}{3}(x\neq\frac{2}{3}),\ y=\frac{-1+1+x_0^2}{3}=\frac{x_0^2}{3},$$

消去 x_0，得 $y=\frac{1}{3}(3x-1)^2$.

故所求轨迹方程为 $y=\frac{1}{3}(3x-1)^2$，$x\neq\frac{2}{3}$.

例 11 设 A 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的对称轴上一点（位于抛物线内部），B 是 A 关于 y 轴的对称点.（Ⅰ）若过 A 的直线与这抛物线在对称轴两侧相交于 P,Q 两点，则 $\angle PBA=\angle QBA$；（Ⅱ）若过 B 的直线与这抛物线在对称轴一侧相交于 P,Q 两点，则 $\angle PAB+\angle QAB=180°$.

证明 如图 30-6，设 $A(a,0)$，则 $B(-a,0)$，其中 $a>0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ $(x_1>0,x_2>0)$.

（Ⅰ）此时 $y_1y_2<0$，且求得 $x_1x_2=a^2$，即 $\sqrt{x_1x_2}=a$.

由 P,Q 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 M,N. 则 $\frac{|PM|}{|QN|}=\frac{|y_1|}{|y_2|}=\frac{\sqrt{2px_1}}{\sqrt{2px_2}}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$，

$\frac{|BM|}{|BN|}=\frac{a+x_1}{a+x_2}=\frac{\sqrt{x_1x_2}+x_1}{\sqrt{x_1x_2}+x_2}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$，于是$\frac{|PM|}{|QN|}=\frac{|BM|}{|BN|}$. 又$\angle PMB=\angle QNB=90°$，从而$\triangle PBM\backsim\triangle QBN$，

故$\angle PBM=\angle QBN$，即$\angle PBA=\angle QBA$.

（Ⅱ）此时$x_1\cdot x_2=(-a)^2=a^2$，$y_1y_2=-2p(-a)=2pa$.

如图 30－7，连结 QA 并延长交抛物线于 R，设 $R(x_3,y_3)$，则可求得 $x_3x_2=a^2$，$y_3y_2=-2pa$. 由此可推证得 $x_3=x_1$，$y_3=-y_1$.

由此可知，R 点与 P 点关于 x 轴对称，故 RA 与 PA 关于 x 轴对称，从而$\angle RAB=\angle PAB$. 于是

$\angle PAB+\angle QAB=\angle RAB+\angle QAB=180°$.

注 此例（Ⅰ）、（Ⅱ）的逆命题也成立.

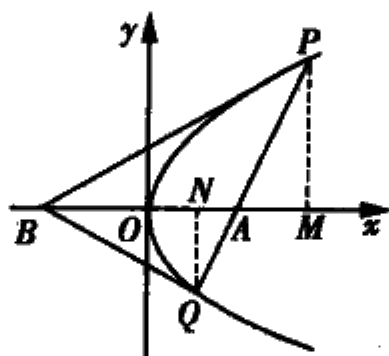


图 30－6

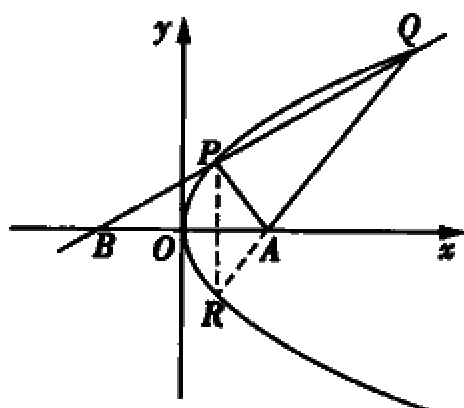


图 30－7

例 12 设 AB 是抛物线$y=ax^2(a>0)$的长为 m 的动弦，则（Ⅰ）当 $m\geqslant\frac{1}{a}$（通径长）时，AB 的中点 M 到 x 轴的距离的最小值为$\frac{2ma-1}{4a}$；（Ⅱ）当 $m<\frac{1}{a}$（通径长）时，AB 的中点 M 到 x 轴的距离的最小值为$\frac{am^2}{4}$.

证明 设 $M(x_0,y_0)$，直线 AB 的参数方程$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$（其中 t 为参数倾斜角 $\alpha\neq90°$），代入 $y=ax^2$ 并整理，得 $a(\cos\alpha)^2\cdot t^2+(2ax_0\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot t+(ax_0^2-y_0)=0$，于是 $t_1+t_2=\frac{-(2ax_0\cos\alpha-\sin\alpha)}{a\cos^2\alpha}=0$，$t_1t_2=\frac{ax_0^2-y_0}{a\cos^2\alpha}$.

注意到$|AB|=m$，得 $t_1t_2=-\frac{m^2}{4}$.

可从 $t_1+t_2=0$ 中求出 $y_0=\frac{1}{4a}\sec^2\alpha+\frac{am^2}{4}\cdot\cos^2\alpha-\frac{1}{4a}$，则 $y_0\geqslant2\cdot\frac{m}{4}-\frac{1}{4a}=\frac{2ma-1}{4a}$，其中等号成立的条件为$\frac{1}{4a}\sec^2\alpha=\frac{am^2}{4}\cdot\cos^2\alpha$，即 $\cos^2\alpha=\frac{1}{am}$. 故当 $am\geqslant1$ 时，$(y_0)_{\min}=\frac{2ma-1}{4a}$.

当$0<am<1$时，记 $\cos^2\alpha=x$，则 $y_0=f(x)=\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{x}+\frac{am^2}{4}\cdot x-\frac{1}{4a}(0<x\leqslant1)$，易证 $f(x)$是减函数，故此时$(y_0)_{\min}=f(1)=\frac{am^2}{4}$.

3. 关注抛物线弓形中的有关数量关系

例 13 试证:抛物线弓形的面积,等于它的底和过底边两端点的切线所围成三角形面积的$\frac{2}{3}$.

证明 如图 30-8,设抛物线弓形的底边为 AB,在 A,B 处的切线交于 P,过顶点 Q 的切线交 PA 于 P_1,交 PB 于 P_2.设抛物线弓形的面积为 S,$S_{\triangle PAB}=S'$,下证$\frac{S}{S'}=\frac{2}{3}$.

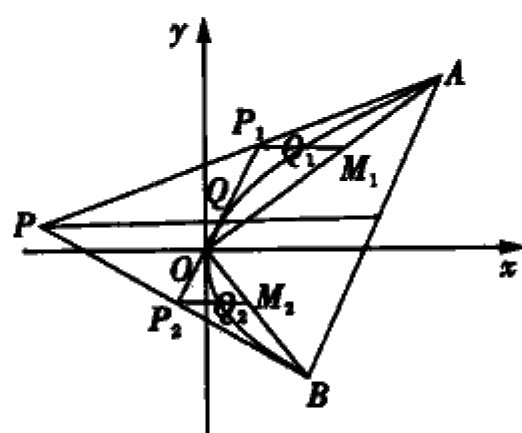


图 30-8

由性质 13,14,知 Q 为 P_1P_2 的中点,则推知 $S_{\triangle AQB}=\frac{1}{2}S'$.又设 Q_1,Q_2 分别为抛物线弓形 AQ_1Q,QQ_2B 的顶点,也由性质 13,14 推知

$$S_{\triangle AQ_1Q}+S_{\triangle QQ_2B}=\frac{1}{2}(S_{\triangle AP_1Q}+S_{\triangle QP_2B})=\frac{1}{8}S'.$$

用上面的方法,依次类推下去可得各组(第一组一个三角形即$\triangle AQB$,第二组两个三角形即$\triangle AQ_1Q$,$\triangle QQ_2B$;第三组 4 个三角形,…,第 n 组 2^{n-1}个三角形,…)三角形面积和为$\frac{1}{2}S'$,$\frac{1}{8}S'$,$\frac{1}{32}S'$,….

故
$$S=\frac{1}{2}S'+\frac{1}{8}S'+\frac{1}{32}S'+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}S'+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}S'(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}+\cdots)=\frac{2}{3}S'.$$

注 由此例可推证:抛物线弓形的面积等于同底同顶三角形面积的$\frac{4}{3}$.

4. 注意和其他曲线关系的综合问题

例 14 设曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$($a$ 为正常数)与 $C_2:y^2=2(x+m)$在 x 轴上方仅有一个公共点 P.(Ⅰ)求实数 m 的取值范围(用 a 表示);(Ⅱ)O 为原点,若 C_1 与 x 轴的负半轴交于点 A,当 $0<a<\frac{1}{2}$时,试求$\triangle OAP$ 面积的最大值(用 a 表示).

(2001 年全国高中联赛题)

解 (Ⅰ)由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\\ y^2=2(x+m)\end{cases}$消去 y,得 $x^2+2a^2x+2a^2m-a^2=0$. (*)

设 $f(x)=x^2+2a^2x+2a^2m-a^2$,原问题转化为方程(*)在 $x\in(-a,a)$上有唯一解或等根的情况.只须讨论如下:

(ⅰ)由$\triangle=0$得$m=\frac{a^2+1}{2}$,此时等根为$-a^2$,当且仅当$-a<a^2<a$,即$0<a<1$时适合;

(ⅱ)$f(a)\cdot f(-a)<0$,当且仅当$-a<m<a$;

(ⅲ)由$f(-a)=0$得$m=a$,此时,另一解$x'=a-2a^2$,当且仅当$-a<a-2a^2<a$,即$0<a<1$时适合;又由$f(a)=0$得$m=-a$,此时另一解为$x'=-a-2a^2$,因为$-a-2a^2<-a$,因此$m\neq-a$.

综上,当$0<a<1$时,$m=\frac{a^2+1}{2}$或$-a<m\leqslant a$;当$a\geqslant1$时,$-a<m<a$.

(Ⅱ)$S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}ay_P$.若$0<a<\frac{1}{2}$,则$-a<m\leqslant a$或$m=\frac{a^2+1}{2}$.

(ⅰ)当$-a<m\leqslant a$时,因$0<-a^2+a\sqrt{a^2-2m+1}<a$,则唯一的$x_p=-a^2+a\sqrt{a^2-2m+1}$.显然,当$m=a$时,$x_p$取最小值.因$x_p>0$,则$x_p=\sqrt{1-\frac{x_p^2}{a^2}}$取最大值.此时$y_p=2\sqrt{a-a^2}$,$S=a\sqrt{a-a^2}$.

(ⅱ)当$m=\frac{a^2+1}{2}$时,$x_p=-a^2$,$y_p=\sqrt{1-a^2}$,此时$S=\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2}$.

下面比较$a\sqrt{a-a^2}$与$\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2}$的大小,令$a\sqrt{a-a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2}$,得$a=\frac{1}{3}$.

易证当$0<a\leqslant\frac{1}{3}$时,$a\sqrt{a-a^2}\leqslant\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2}$,此时$S_{\max}=\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2}$;当$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$时,$a\sqrt{a-a^2}>\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2}$,此时,$S_{\max}=a\sqrt{a-a^2}$.

例15 已知抛物线$\begin{cases}x=\frac{3}{2}+t^2\\ y=\sqrt{6}t\end{cases}$($t$为参数)和椭圆$\begin{cases}x=m+2\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数),问是否存在实数$m$,使得抛物线与椭圆有四个交点?

解 消去参数t,抛物线方程为$y^2=6(x-\frac{3}{2})(x\geqslant\frac{3}{2})$.

消去参数θ,椭圆方程为$\frac{(x-m)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

由上述两方程联立消去y,整理得$x^2+(8-2m)x+m^2-16=0$.

令$f(x)=x^2+(8-2m)x+m^2-16(x>\frac{3}{2})$,则抛物线与椭圆有四个不同交点的充要条件是

$$\begin{cases}\triangle=(8-2m)^2-4m+64>0\\ f(\frac{3}{2})\geqslant 0\\ -\frac{1}{2}(8-2m)>\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<4,\\ m>\frac{7}{2}\text{或 }m\leqslant-\frac{1}{2},\\ m>\frac{11}{2}.\end{cases}$$

此不等式组无解，故这样的实数 m 不存在.

5. 借助抛物线知识，求解函数等其他问题

例 16 求函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$的最大值.

（1992 年全国高中联赛题）

解 由 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$

$$=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-2)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}.$$

如图 30－9，则可将上式看作为：在抛物线 $y=x^2$ 上的点 $P(x,x^2)$到点 $A(3,2)$和点 $B(0,1)$的距离之差，因点 A 在抛物线下方（外），点 B 在抛物线上方（内），故直线 AC 和抛物线相交，交点由方程 $y=x^2$ 与$\frac{y-1}{x-0}=\frac{2-1}{3-0}$联立确定．消去 y 得 $3x^2-x-1=0$，由于该方程常数项为负，则必有负根．因三角形两边之差小于第三边，当点 P 位于负根所对应的交点 C 时，$f(x)$有最大值$|AB|=\sqrt{10}$.

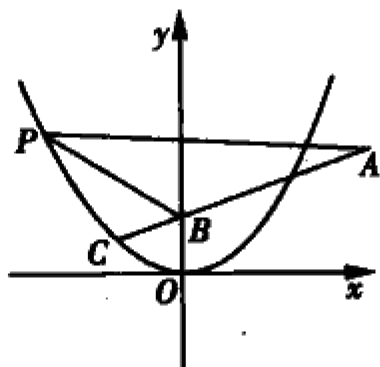


图 30－9

例 17 求函数 $f(x)=x^2-x+1+\sqrt{2x^4-18x^2+12x+68}$的最小值.

解 由于 x^2-x+1 恒为正值（因 $\Delta<0$），又注意到 $f(x)=\sqrt{2}[\frac{x^2-x+1}{\sqrt{2}}+\sqrt{(x+3)^2+(x^2-5)^2}]$，如图 30－10，上式可看作为：在抛物线 $y=x^2$ 上一动点 $P(x,x^2)$到定直线 $y=x-1$ 和到点 $M(-3,5)$的距离$|PQ|+|PM|$的和.

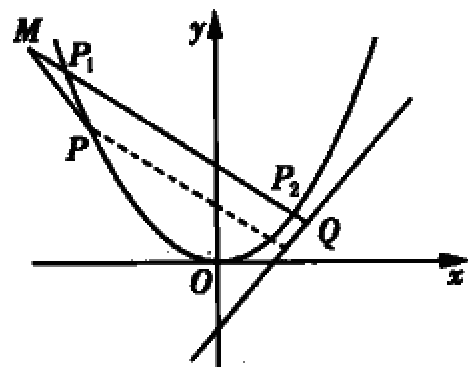


图 30－10

当 M,P,Q 三点共直线 l 时，$|PQ|+|PM|$的和最小．而直线 l 就是过点 M 且垂直于直线 $y=x-1$的直线 $y=-x+2$，联立 $y=x^2$ 与 $y=-x+2$，求得 $P_1(-2,4)$，$P_2(1,1)$．又点 M 到直线 $y=x-1$ 的距离为$|\frac{-3-5-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}|=\frac{9}{2}\sqrt{2}$，故当 $x=-2$ 或 $x=1$ 时，函数 $f(x)$取最小值$\frac{9}{2}\sqrt{2}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 试证：抛物线 $y^2=2px$ 焦点 F 分焦点弦所成的两条焦半径的倒数和为定值 $\frac{2}{p}$.
2. A 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的一点，BC 是垂直于 x 轴的一条弦，直线 AC 交抛物线的轴于 E，直线 AB 交对称轴于 D.求证：抛物线顶点平分线段 DE.
3. 已知 PQ 是过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点弦，N 是准线 l 与 x 轴的交点，且 $PQ\perp NQ$，$PM\perp x$轴于点 M.求证：$|PM|=|MQ|$.
4. 若抛物线 $y=ax^2-1$ 上存在关于 $x+y=0$ 成轴对称的两个点，试求 a 的取值范围.
5. 一条直线 l 经过抛物线 $y^2=4px(p>0)$ 的焦点 F 与抛物线交于 P,Q 两点，过 P,Q 点分别向准线引垂线 PR,QS，垂足为 R,S.记 $|PF|=a$，$|QF|=b$，M 为 RS 中点.求 $|MF|$ 的长度.
6. 定长为 3 的线段 AB 的两端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动，M 是线段 AB 中点.求 M 到 y 轴的最短距离.（1987 年全国高考题）
7. 求函数 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^4-2x^2-4x+13}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 的最小值.

习题 B

1. 以抛物线 $y=x^2$ 上异于原点的点 $(a,a^2)(a>0)$ 为圆心，与 x 轴相切的圆用 $C(a)$ 表示.设 $C(a_1),C(a_2),\cdots,C(a_n)$ 为两两外切的圆列，$a_1=\frac{1}{2}$ 且 $a_1>a_2>\cdots>a_n$，这几个圆周长之和记为 S_n.试证：$S_n=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.
2. 设 $0<a<b$，过两定点 $A(a,0)$ 和 $B(b,0)$ 分别引直线 l 和 m，使与抛物线 $y^2=x$ 有四个不同的交点.当这四点共圆时，求这种直线 l 与 m 交点 P 的轨迹.
3. 抛物线 $y^2=4ax(a>0)$ 的焦点为 A，以 $B(a+4,0)$ 为圆心，$|AB|$ 为半径在 x 轴上方作半圆，设半圆与抛物线相交于不同的两点 M,N，P 为线段 MN 的中点.（Ⅰ）求 $|AM|+|AN|$ 的值；（Ⅱ）是否存在这样的 a，使 $|AM|,|AP|,|AN|$ 成等差数列？
4. 经过点 $M(2,-1)$ 作抛物线 $y^2=x$ 的四条弦 $P_1Q_1,P_2Q_2,P_3Q_3,P_4Q_4$，且 P_1,P_2,P_3,P_4 点纵坐标成等差数列.试比较 $\frac{P_1M}{MQ_1}-\frac{P_2M}{MQ_2}$ 与 $\frac{P_3M}{MQ_3}-\frac{P_4M}{MQ_4}$ 的大小.

5. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$是抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$上任意两点.求证:直线 AB 交 x 轴于定点的充要条件是 y_1y_2 为定值.

6. 不垂直于 x 轴的直线与抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$交于 A, B 两点(A, B 不在同一象限),抛物线的准线与 x 轴相交于点 N,已知$\angle ANB$ 被 x 轴平分.求证:线段 AB 过抛物线的焦点.

7. 抛物线 $y = ax^2 - bx + b$ 与直线 $y = a^2x(a > 0)$相交于 P, Q 两点,P, Q 的横坐标之差的绝对值为 1.设抛物线弧 PQ 上的点与直线的距离最大值为 d.(Ⅰ)用 a 表示 d;(Ⅱ)a, b 取何值时,d 值最大? (1991 年日本高考题)

参考解答

第一章 梅涅劳斯定理及应用

习题 A

1. 延长 CB,FE 交于 H,对$\triangle ADB$ 与截线 GEH,有$\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DH}{HB}\cdot\frac{BE}{EA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{DH}{HB}\cdot\frac{3}{2}=1$,有$\frac{DH}{HB}=\frac{4}{3}$,即$\frac{CH}{HD}=\frac{7}{4}$.对$\triangle ACD$ 及截线 FCH,有$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CH}{HD}\cdot\frac{DG}{GA}=\frac{AF}{FC}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$,求得$\frac{AF}{FC}=\frac{2}{7}$.

2. 设 CB,DE 的延长线交于 P,又 $BP=BC$,$\frac{FP}{PB}=\frac{3}{2}$,对$\triangle AFB$ 与截线 HEP,CGE,有$\frac{AH}{HF}\cdot\frac{FP}{PB}\cdot\frac{BE}{EA}=\frac{AH}{HF}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=1$,即$\frac{AH}{HF}=\frac{2}{3}$;$\frac{AG}{GF}\cdot\frac{FC}{CB}\cdot\frac{BE}{EA}=\frac{AG}{GF}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=1$,即$\frac{AG}{GF}=\frac{2}{1}$.由此求得 $AH:HG:GF=6:4:5$.

3. 对$\triangle BDP$ 与截线 CEA,有$\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DA}{AP}\cdot\frac{PE}{EA}=\frac{BC}{CD}\cdot\frac{12}{6}\cdot\frac{3}{12}=1$,知 $BD=DC$.对$\triangle CDP$ 与截线 BFA,有$\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DA}{AP}\cdot\frac{PF}{FC}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{PF}{FC}=1$,知$\frac{PF}{FC}=\frac{1}{4}$.而 $CF=20$,故 $CP=15$.

在$\triangle PBC$ 中,由中线长公式 $PD^2=\frac{1}{2}\sqrt{2(PB^2+PC^2)-BC^2}$,得 $BC=2\sqrt{117}$,即 $BD=\sqrt{117}$.又 $BP^2+PD^2=6^2+9^2=(\sqrt{117})^2=BD^2$,即$\angle BPD=90°$,$S_{\triangle PBD}=27$,$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle PBD}=108$.

4. 直线 OCB 分别与$\triangle DMF$ 和$\triangle AEM$ 的三边延长线都相交,有$\frac{DB}{MB}\cdot\frac{MO}{FO}\cdot\frac{FC}{DC}=1$,$\frac{AB}{EB}\cdot\frac{EO}{MO}\cdot\frac{MC}{AC}=1$,即$\frac{OF}{OM}\cdot\frac{OE}{OM}=\frac{DB\cdot FC}{MB\cdot DC}\cdot\frac{EB\cdot AC}{AB\cdot MC}$.由 $EF/\!/AD$,有$\frac{DB}{MB}=\frac{AB}{EB}$,$\frac{FC}{DC}=\frac{MC}{AC}$,从而$\frac{OF\cdot OE}{OM^2}=1$,即 $OF\cdot OE=OM^2=OP^2$,有$\triangle OFP\backsim\triangle OPE$,故$\angle OPF=\angle OEP$.

5. 直线截$\triangle ABC$,有$\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{BE}{EC}=1$,即$\frac{BE}{EC}=\frac{9}{4}$,故$\frac{BC}{CE}=\frac{5}{4}$.直线截$\triangle DBE$,有$\frac{EF}{FD}\cdot\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BC}{CE}=\frac{EF}{FD}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}=1$,所以 $EF:FD=2:1$.

6. 设 $AC=BC=x$,则 $AB=\sqrt{2}x$,$AE=\frac{2}{3}\sqrt{2}x$,由$\triangle AEC$ 求得 $CE=\frac{\sqrt{5}}{3}x$.直线 AKD 截$\triangle CEB$,有$\frac{CK}{KE}\cdot\frac{EA}{AB}\cdot\frac{BD}{DC}=1$,即$\frac{CK}{KE}=\frac{3}{2}$,$CK=\frac{\sqrt{5}}{5}x$.直线 EKC 截$\triangle ABD$,有$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DK}{KA}=1$,可得 $AK=\frac{4}{5}AD$,$KD=\frac{1}{5}AD$.又 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}x$,$AK=\frac{2}{5}\sqrt{5}x$,$KD=\frac{\sqrt{5}}{10}x$,即 $AK\cdot KD=\frac{1}{5}x^2=CK^2$,而$\angle ACD=90°$,故 $CE\perp AD$.

7. 直线 ASY 截$\triangle BMC$，有$\frac{BS}{SM}\cdot\frac{MA}{AC}\cdot\frac{CY}{YB}=\frac{BS}{SM}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$，即$\frac{BS}{SM}=6$，亦即$\frac{BS}{BM}=\frac{6}{7}$. 直线 ARY 截$\triangle BNC$，有$\frac{BR}{RN}\cdot\frac{NA}{AC}\cdot\frac{CY}{YB}=\frac{BR}{RN}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$，即$\frac{BR}{RN}=3$，亦即$\frac{BR}{BN}=\frac{3}{4}$.

又$\frac{S_{\triangle BSR}}{S_{\triangle BMN}}=\frac{BS\cdot BR}{BM\cdot BN}=\frac{9}{14}$，故$\frac{S_{SRNM}}{S_{\triangle BMN}}=\frac{5}{14}$. 而$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}$，故$\frac{S_{SRNM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{5}{42}$.

8. 显然，若 $EF/\!/AC$ 时，有 $GH/\!/AC$. 设 EH,BD,FG 三直线共点于 P，设 EF,AC 相交于 Q. 由直线 EHP 截$\triangle ABC$，直线 PGF 截$\triangle DBC$，直线 FQE 截$\triangle CBA$，有$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$，$\frac{DP}{PB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}=1$，$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1$. 三式相乘，得$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$. 对$\triangle ACD$ 应用梅涅劳斯定理之逆，知 Q,G,H 共线，由此知 EF,AC,HG 共点于 Q.

9. 由$\angle XAB=\angle XCA$，$\angle X$ 公用，知$\triangle AXB\backsim\triangle CXA$，有$\frac{BX}{XC}=\frac{S_{\triangle AXB}}{S_{\triangle CXA}}=(\frac{AB}{AC})^2$. 同理，$\frac{CY}{YA}=(\frac{BC}{BA})^2$，$\frac{AZ}{ZB}=(\frac{CA}{CB})^2$. 故$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=(\frac{AB}{AC})^2\cdot(\frac{BC}{BA})^2\cdot(\frac{CA}{CB})^2=1$. 由梅涅劳斯定理之逆，知 X,Y,Z 三点共线.

10. 设 D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 的$\angle A,\angle B$ 的内角平分线和$\angle C$ 的外角平分线与边 BC,CA,AB 或其延长线的交点，则由内分和外分性质有$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{AB}{CA}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{CA}{BC}=1$. 由梅涅劳斯定理之逆，知 D,E,F 共线.

11. 设 t_X 与 t_A,t_B,AB 分别交于 U,V,W，由切线长定理知 $AU=UX$，$BV=VX$. 由题设 $AY/\!/BZ$，有$\frac{AZ}{ZX}=\frac{YB}{BX}$，$\frac{BW}{WA}=\frac{BV}{AU}=\frac{VX}{XU}=\frac{BX}{XY}$，从而对$\triangle AXB$ 有$\frac{AZ}{ZX}\cdot\frac{XY}{YB}\cdot\frac{BW}{WA}=\frac{YB}{BX}\cdot\frac{XY}{YB}\cdot\frac{BX}{XY}=1$. 由梅涅劳斯定理之逆，知 X,Y,W 共线，即 YX,t_X,AB 共点.

12. 设 AH 与 CE 交于 Q，CE 与 GH 交于 K，由题设得$\frac{AQ}{QH}=\frac{AE}{KH}=\frac{GP}{KH}$，且$\frac{GD}{AG}=\frac{HC}{EP}=\frac{HK}{KP}$，即$\frac{GD}{AD}=\frac{HK}{HP}$. 在$\triangle AHG$ 中，$\frac{AQ}{QH}\cdot\frac{HP}{PG}\cdot\frac{GD}{DA}=\frac{GP}{KH}\cdot\frac{HP}{PG}\cdot\frac{HK}{HP}=1$. 由梅涅劳斯定理之逆，知 Q,P,D 共线，即 AH,CE,DP 三线共点.

13. 延长 CK 交 AB 于 D，只需证 $AD=AC$. 对$\triangle ABB_1$ 及直线 CD，应用梅涅劳斯定理，有$\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BC}{A_1C}\cdot\frac{A_1K}{AK}=1$.

又由 $KA_2/\!/AC$，有$\frac{A_1K}{AK}=\frac{A_1A_2}{CA_2}$，而 $BC=2A_1C$，故$\frac{BD}{AD}=\frac{2A_1A_2}{CA_2}$，即$\frac{AD+BD}{AD}=\frac{2A_1A_2+CA_2}{CA_2}=\frac{A_1A_2+A_1C}{CA_2}=\frac{A_1A_2+A_1B}{CA_2}$，也就是 $\frac{AB}{AD}=\frac{BA_2}{CA_2}$.（*）由 AA_2 平分$\angle BAC$，有$\frac{AB}{AC}=\frac{BA^2}{CA^2}$，由此式及 * 式，知 $AC=AD$，故 $AA_2\perp KC$.

14. 由梅涅劳斯定理，有$\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BL}{LO}\cdot\frac{OK}{KA}=1$，① $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BL}{LO}\cdot\frac{OM}{MA}=1$，② $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BN}{NO}\cdot\frac{OM}{MA}=1$，③ $\frac{AF}{FB}\cdot$

$\frac{BN}{NO}\cdot\frac{OK}{KA}=1$.④ 由①÷②,③÷④,得$\frac{AC}{CB}\cdot\frac{OK}{KA}\cdot\frac{EB}{AE}\cdot\frac{MA}{OM}=1$,$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{OM}{MA}\cdot\frac{FB}{AF}\cdot\frac{DA}{OK}=1$.此两式相乘,并注意由$AC=DB$,有$AD=CB$,即有$\frac{EB}{AE}\cdot\frac{FB}{AF}=1$,亦即$\frac{EB}{AE}=\frac{AF}{FB}$,亦即$\frac{AE+AB}{AE}=\frac{AB+BF}{BF}\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{BF}$,故$AE=BF$.

15. 直线HEM截$\triangle ABD$,应用梅涅劳斯定理,有$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$.由切线长相等,有$AE=HA$,$EB=BF$,$CF=CG$,$DH=DG$.于是,$\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DG}{GC}\cdot\frac{CF}{FB}=\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DH}{CF}\cdot\frac{CF}{BE}=\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DH}{EB}=\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$.由梅涅劳斯定理之逆,知$M,F,G$三点共线.

16. 由$\frac{AS}{SB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{PS\cdot AP\cdot\sin\angle APS}{PB\cdot PS\cdot\sin\angle BPS}\cdot\frac{PQ\cdot BP\cdot\sin\angle QPB}{PQ\cdot PC\cdot\sin\angle QPC}\cdot\frac{CP\cdot PR\cdot\sin\angle CPR}{AP\cdot PR\cdot\sin\angle APR}=\frac{\sin\angle APS}{\sin\angle BPS}\cdot\frac{\sin\angle QPB}{\sin\angle QPC}\cdot\frac{\sin\angle CPR}{\sin\angle APR}=\frac{\sin(90^\circ+\angle QPS)}{\sin\angle BPS}\cdot\frac{\sin\angle QPB}{\sin(90^\circ+\angle QPS)}\cdot\frac{\sin(180^\circ-\angle BPS)}{\sin\angle APR}=\frac{\sin\angle QPB}{\sin\angle APB}=\frac{\sin(90^\circ-\angle RPQ)}{\sin(90^\circ-\angle RPQ)}=1$,应用梅涅劳斯定理之逆,知$Q,R,S$三点共线.

17. 设AO交BC于点G,设$AB=c$,$BC=a$,$CA=b$.不妨设$b<c$,由AO平分$\angle A$,有$\frac{BG}{GC}=\frac{AB}{AC}$,即$\frac{BG}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}$,即$BG=\frac{ac}{b+c}$.由切线长定理有$BF=\frac{a+c-b}{2}$,$FM=BF-BM=\frac{a+c-b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{c-b}{2}$,$MG=BG-BM=\frac{ac}{b+c}-\frac{a}{2}=\frac{a(c-b)}{2(b+c)}$.注意到$\frac{GO}{OA}=\frac{BG}{AB}$,则$\frac{AN}{NF}\cdot\frac{FM}{MG}\cdot\frac{GO}{OA}=\frac{FM}{MG}\cdot\frac{GO}{OA}=\frac{FM}{MG}\cdot\frac{BG}{AB}=\frac{\frac{c-b}{2}}{\frac{a(c-b)}{2(b+c)}}\cdot\frac{\frac{ac}{b+c}}{c}=1$,由梅涅劳斯定理之逆,知$M,O,N$三点共线.

18. 设EH与BD相交时,交点为P.对$\triangle ABD$及截线EHP应用梅涅劳斯定理,有$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$.令$\angle BAC=\angle BDC=\theta$,$\angle DBC=\angle CAD=\beta$,$\angle ABD=\angle DCA=\gamma$,$\angle ADB=\angle ACB=\alpha$,有$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{DH}{HA}=\frac{\tan\gamma}{\tan\theta}\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$,$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{DG}{GC}=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\gamma}{\tan\theta}$,则$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DG}{GC}=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\gamma}{\tan\theta}\cdot\frac{BP}{PD}=\frac{AE}{EP}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{BP}{PD}=1$,由梅涅劳斯定理之逆,知$E,G,P$三点共线,即$EH,BD,FG$三线共点.

若$EH/\!/BD$,则假设FG与BD相交,由上面证明,知EH与BD相交于同一点,矛盾,故$FG/\!/BD$.

19. 设DA与CB相交于P,HF交BD于M,EG交BD于M'.直线HMF截$\triangle PBD$,应用梅涅劳斯定理,有$\frac{PH}{HD}\cdot\frac{DM}{MB}\cdot\frac{BF}{PF}=1$,从而$\frac{BM}{DM}=\frac{PH}{PF}\cdot\frac{BF}{HD}=\frac{BF}{HD}$.同理,$\frac{BM'}{DM'}=\frac{BE}{DG}=\frac{BF}{HD}=\frac{BM}{DM}$.于是$M$与$M'$重合,即$BD$过$EG,HF$的交点.

AC和BD位置是对称的(相对于HF和EG而言),因而AC亦过EG,HF的交点,即AC,BD,EG,HF四线共点.

习题 B

1. 设 ME,FN 分别与 BD 交于 K,K',分别对△DAB 与截线 KEM,对△BCD 与截线 $K'EM$,由梅涅劳斯定理,有 $\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KD}=1$,$\frac{DN}{NC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{KB'}{K'D}=1$.又 $\frac{DE}{EA}=\frac{CF}{FB}$,$\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}$,故 $\frac{BK}{KD}=\frac{BK'}{K'D}$,由合比定理得 $\frac{BD}{KD}=\frac{BD}{K'D}$,从而 $KD=K'D$,K 与 K' 重合,即 ME,FN,BD 共点.

2. 设 $AC\perp OB$ 于 C,$BD\perp OA$ 于 D,$PK\perp OB$ 于 K,PK 交 CD 于 S,QS 交 OA 于 T,下面证明:$QT\perp OA$,从而 S 是△OPQ 的垂心 H.对△DCD 与截线 PSK,由梅涅劳斯定理,得 $\frac{DS}{SC}\cdot\frac{CK}{KO}\cdot\frac{OP}{PD}=1$,但 $\frac{CK}{KO}=\frac{AP}{PO}$,故 $\frac{DS}{SC}=\frac{PD}{PA}$.又 $\frac{PD}{PA}=\frac{MB}{AM}=\frac{BQ}{QC}$,所以 $\frac{DS}{SC}=\frac{BQ}{QC}$,从而 $QS\parallel BD$,即 $QT\parallel BD$,也即 $QT\perp OA$,S 与 H 重合,因此由线段 AB 任一点所得到的△OPQ 的垂心 H 都在线段 CD 上.反之,由不在线段 AB 上的任一点所得到的△OPQ 的垂心都不在 CD 上.故点 H 的轨迹为线段 CD.

3. 由题设 $BD:DC=CE:EA=AF:FB=3:(n-3)$,对△$ADC$ 及截线 BPE 应用梅涅劳斯定理,有 $\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AP}{PD}\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n-3}=1$,因此 $\frac{AP}{PD}=\frac{n(n-3)}{9}$,$\frac{AP}{AD}=\frac{n(n-3)}{n(n-3)+9}$,于是 $S_{\triangle ABP}=\frac{n(n-3)}{n(n-3)+9}\cdot S_{\triangle ABD}=\frac{3(n-3)}{n(n-3)+9}\cdot S_{\triangle ABC}$.同理,可得 $S_{\triangle BCQ}$,$S_{\triangle CAR}$,因而 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCQ}+S_{\triangle CAR}=\frac{9(n-3)}{n(n-3)+9}\cdot S_{\triangle ABC}$.由题意得 $\frac{9(n-3)}{n(n-3)+9}=\frac{45}{49}$,即 $5n^2-64n+192=0$,注意 $n>6$,求得 $n=8$.

4. 取 BC 中点 M,连 AM 交 BD 于 G.对△BCD 及截线 AEF 应用梅涅劳斯定理,有 $\frac{BF}{FC}\cdot\frac{AC}{AD}\cdot\frac{ED}{BE}=1$,而 $\frac{BE}{ED}=\frac{2AC}{DC}$,所以 $\frac{BF}{FC}=\frac{2AD}{DC}$,即 $\frac{BC}{FC}=\frac{2AD+DC}{DC}$.(*)同理对△$ACM$ 及截线 DGB,有 $\frac{AD}{DC}\cdot\frac{BC}{BM}\cdot\frac{GM}{AG}=1$ 及 $BM=\frac{1}{2}BC$,得 $\frac{AG}{GM}=\frac{2AD}{DC}$,即 $\frac{AG}{AM}=\frac{2AD}{2AD+DC}$.注意 $AM=\frac{1}{2}BC$,有 $\frac{AG}{BC}=\frac{AD}{2AD+DC}$,由此式及(*)式有 $\frac{AG}{FC}=\frac{AD}{DC}$,又 $\angle MAC=\angle ACM$,故△$AGD\backsim$△CFD,因此 $\angle ADB=\angle FDC$.

5. 由 $EG_1\parallel AD_1$,知 $\angle AF_1G_1=\angle BAD_1$.由 $EG_2\parallel AD_2$ 知 $\angle AG_2F_2=\angle CAD_2$,而 $\angle BAD_1=CAD_2$,则 $\angle AF_1G_1=\angle AG_2F_2$.又 $\angle G_2AF_2$ 公用,知△$F_1AG_1\backsim$△G_2AF_2,有 $AF_1\cdot AF_2=AG_1\cdot AG_2$.

对△ABC 及截线 EG_1,对△ABC 及截线 EG_2 分别应用梅涅劳斯定理,有 $\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CG_1}{G_1A}\cdot\frac{AF_1}{F_1B}=1$,$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CG_2}{G_2A}\cdot\frac{AF_2}{F_2B}=1$.此两式相乘,$\frac{BE^2}{CE^2}\cdot\frac{CG_1\cdot CG_2}{BF_1\cdot BF_2}\cdot\frac{AF_1\cdot AF_2}{AG_1\cdot AG_2}=1$,即 $\frac{BE^2}{CE^2}\cdot\frac{CG_1\cdot CG_2}{BF_1\cdot BF_2}=1$,亦即 $\frac{BE^2}{CE^2}=\frac{BF_1\cdot BF_2}{CG_1\cdot CG_2}$.(注:①点 E 为直线 BC 上除 C 点以外任意一点结论都成立;② AD_1 和 AD_2 为 $\angle BAC$ 的外角平分线时,结论仍成立.)

6.(Ⅰ)设 PR 交 BD 于点 U,QS 交 BD 于点 V,对△BDE 与直线 PUR 应用梅涅劳斯定理,有 $\frac{BP}{PE}\cdot\frac{ER}{RD}\cdot\frac{DU}{UB}=1$.又由于 P,Q,R 为切点,$PE=ER$,$BP=BQ$,故 $\frac{DU}{UB}=\frac{PE}{BP}\cdot\frac{RD}{ER}=\frac{RD}{BP}=\frac{RD}{BQ}$.

对△DBF 与直线 QVS,应用梅涅劳斯定理,得 $\frac{BV}{VD}=\frac{BQ}{RD}$.从而 $\frac{BV}{VD}=\frac{BU}{UD}$,因此 U,V 重合,故 PR,

QS, BD 三线共点.

再证 PR, QS, AC 三线共点. 设 PR 交 AC 于 X, QS 交 AC 于 Y, 对△ACE 与直线 PXR 应用梅涅劳斯定理, 有 $\frac{AP}{PE}\cdot\frac{ER}{RC}\cdot\frac{CX}{XA}=1$. 又由于 P,Q,R 为切点, $PE=ER$, $AP=AS$, $RC=QC$, 故 $\frac{CX}{XA}=\frac{PE}{AP}\cdot\frac{RC}{ER}=\frac{RC}{AP}=\frac{QC}{AS}$. 对△$ACF$ 与直线 QYS 应用梅涅劳斯定理, 得 $\frac{CY}{YA}=\frac{QC}{AS}$.

因此 $\frac{CX}{XA}=\frac{CY}{YA}$, 故 X,Y 重合, 即 PR,QS,AC 共点, 即证.

(Ⅱ)将(Ⅰ)中 A,B,C,D,E,F,P,Q,R,S 分别重新标作 A,E,C,F,B,D,P,R,Q,S, 使用(Ⅰ)的证明即可.

(Ⅲ)将(Ⅰ)中的 A,B,C,D,E,F,P,Q,R,S 分别重新标作 F,B,E,D,C,A,Q,P,R,S, 重新使用(Ⅰ)的证明即可.

7. 由已知条件知 E,P,B,Q 四点共圆, 有 $\angle BQP=\angle BEP$. ① 在 Rt△AEB 中, 由 $AE\perp BE$, $EP\perp AB$, 有 $\angle BEP=\angle PAE$. ② 由①, ②得 $\angle BAC=\angle BQP$. ③ 延长 QQ' 交直线 BA 于 O_1, PP' 交直线 BC 于 O_2, 由 O_1,P,Q,O_2 四点共圆, 有 $\angle BQP=\angle BO_1O_2$, ④ 由③④有 $\angle BAC=\angle BO_1O_2$, 则 $O_1O_2/\!/AC$, 故 $BO_1:O_1A=BO_2:O_2C$. ⑤

在△ABD 及截线 $EQ'O_1$ 和△BCD 及截线 EPO_2 中分别应用梅涅劳斯定理, 有 $\frac{AQ'}{Q'D}\cdot\frac{DE}{EB}\cdot\frac{BO_1}{O_1A}=1$, $\frac{CP'}{P'D}\cdot\frac{DE}{EB}\cdot\frac{BO_2}{O_2C}=1$. 又由⑤式, 有 $AQ':Q'D=CP':P'D$, 故 $Q'P'/\!/AC$.

同理, $R'S'/\!/AC$. 从而 $R'S'/\!/P'S'/\!/BD$. 同理, $R'S'/\!/P'Q'/\!/AC$.

注: 若 $AB\perp BC$ 时, 由 $EP'/\!/BC'$, 有 $\frac{DP'}{DC}=\frac{DE}{DB}$. 又 $EQ'/\!/AB$, 有 $\frac{DE}{DB}=\frac{DQ'}{DA}$, 由此得 $Q'P'/\!/AC$.

同理, $R'S'/\!/AC$, 故 $R'Q'/\!/P'S'/\!/BD$.

8. 设 $\frac{AD}{DB}=\frac{s}{1-s}$, $\frac{AE}{EC}=\frac{t}{1-t}(0<s<1,0<t<1)$.

对△CDA 及直线 BPE 应用梅涅劳斯定理, 有 $\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DB}{BA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$, 即 $\frac{CP}{PD}=\frac{1-t}{t(1-s)}$.

对△BEA 及直线 CPB 应用梅涅劳斯定理, 有 $\frac{BP}{PE}\cdot\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AD}{DB}=1$, 即 $\frac{BP}{PE}=\frac{1-s}{s(1-t)}$.

而 $S_{BCED}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A-\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin A=(1-st)\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=(1-st)\cdot S_{\triangle ABC}=1-st$, $S_{\triangle PBC}=\frac{1-t}{(1-t)+t(1-s)}\cdot S_{\triangle BDC}=\frac{1-t}{1-st}\cdot(1-s)\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{(1-s)(1-t)}{1-st}$, 由题设 $S_{BCED}=2S_{\triangle PBC}$, 得 $1-st=2\cdot\frac{(1-s)(1-t)}{1-st}$, 从而 $(1-st)^2=2(1-s)(1-t)=2[1-(s+t)+st]$. ①

又 $S_{\triangle PDE}=\frac{t\cdot(1-s)\cdot s\cdot(1-t)}{(1-s)(1-t)}\cdot S_{\triangle PBC}=st\cdot S_{\triangle PBC}=st\cdot\frac{1}{2}S_{BCED}=\frac{1}{2}st(1-st)$. ②

本题即在条件①下求②的最大值.

利用均值不等式 $s+t\geqslant2\sqrt{st}$ 于①式, 有

$(1-st)^2=2[1-(s+t)+st]\leqslant 2(1-2\sqrt{st}+st)=2(1-\sqrt{st})^2$,

$\therefore\ 1-st\leqslant\sqrt{2}(1-\sqrt{st})$,由此得$(\sqrt{st}-1)\cdot[\sqrt{st}-(\sqrt{2}-1)]\geqslant 0$.

$\because\ 0<s,t<1$,则$\sqrt{st}-1<0$,因此$0<\sqrt{st}\leqslant\sqrt{2}-1$.当且仅当$s=t=\sqrt{2}-1$时,等号成立.

$S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2}st(1-st)=-\frac{1}{2}(st-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{8}$.

当$st=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$时,$S_{\triangle PDE}$取得最大值,最大值是$-\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{8}=5\sqrt{2}-7$.

9. 由直线AHF截$\triangle BOC$,有$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CA}{AO}\cdot\frac{OH}{HB}=1$,求得$HD=2BH$.直线$HIA$截$\triangle EBD$,有$\frac{EI}{ID}\cdot\frac{DH}{HB}\cdot\frac{BA}{AE}=1$,求得$4EI=ID$.$S_{BEIH}=S_{\triangle ABF}-S_{\triangle AEI}-S_{\triangle BFH}=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{7}{15}$.

10.(Ⅰ)设P是AC,BD的中垂线交点即可;(Ⅱ)由4条角平分线性质有$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=\frac{PA}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{PD}{PA}=1$.假设$KN$与$BD$交于$D$,由直线$QNK$截$\triangle ABD$,有$\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BQ}{QD}=1$,即$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DQ}{QB}=1$.对$\triangle BCD$应用梅涅劳斯之逆,知$Q,M,L$共线,得$KN$与$LM$交于$Q$,这显然不可能.故$KN/\!/BD/\!/LM$,由此有$\frac{PA}{PB}=\frac{AK}{KB}=\frac{AN}{ND}=\frac{PA}{PD}$,即$PB=PD$.同理$PA=PC$,即$P$点轨迹是$AC,BD$中垂线的交点.

11. 设直线AE交BC于M,直线CE交AB于F,直线DE交AB于G.由直线GED截$\triangle FBC$,直线AEM截$\triangle FBC$,有$\frac{CE}{EF}\cdot\frac{FG}{GB}\cdot\frac{BD}{DC}=1$,$\frac{CE}{EF}\cdot\frac{FA}{AB}\cdot\frac{BM}{MC}=1$,有$\frac{BM}{MC}=\frac{FG}{GB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{AB}{FA}$.令$BC=a,CA=b,AB=c$,则$AF=b$,$\frac{AG}{GB}=\frac{CD}{DB}=\frac{b}{c}$,$GB=\frac{c^2}{b+c}$,$FG=GB-FB=\frac{b^2}{b+c}$,故$\frac{BM}{MC}=\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{b}=1$.

12. 对$i=1,2,3$,记O_i为$\odot C_i$的圆心,T_i为$\triangle A_{i+1}IA_{i+2}$的外心,显然$O_i$在$\angle A_i$的内角平分线上.可证$T_i$也在$\angle A_i$的内角平分线上.由直线$T_1T_2Q_3$截$\triangle IO_2O_2$,直线$T_2T_3Q_1$截$\triangle IO_2O_3$,直线$T_3T_1Q_2$截$\triangle IO_3O_1$,有$\frac{O_1T_1}{IT_1}\cdot\frac{IT_2}{O_2T_2}\cdot\frac{O_2Q_3}{O_1Q_3}=1$,$\frac{IT_3}{O_3T_3}\cdot\frac{O_2T_2}{IT_2}\cdot\frac{O_3Q_1}{O_2Q_1}=1$,$\frac{IT_1}{O_1T_1}\cdot\frac{O_3T_3}{IT_3}\cdot\frac{O_1Q_2}{O_3Q_2}=1$.三式相乘,有$\frac{O_2Q_3}{O_1Q_3}\cdot\frac{O_3Q_1}{O_2Q_1}\cdot\frac{O_1Q_2}{O_3Q_2}=1$.对$\triangle O_1O_2O_3$应用梅涅劳斯定理之逆,知$Q_1,Q_2,Q_3$共线.

由于$T_{i+1}T_{i+2}$是A_iI的中垂线,而$O_{i+1}O_{i+2}$是B_iI的中垂线,因此,Q_1,Q_2,Q_3恰好分别为$\triangle A_1B_1I,\triangle A_2B_2I,\triangle A_3B_3I$的外心.

第二章 塞瓦定理及应用

习题 A

1. 对$\triangle ABC$及点O,由塞瓦定理可得$\frac{AF}{FB}=3,\frac{AF}{AB}=\frac{3}{4}$.又对$\triangle ADC$与截线$FOC$,由梅涅劳斯定理得$\frac{AO}{OD}=4,\frac{AO}{AD}=\frac{4}{5}$,故$\frac{S_{\triangle AFO}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$,由此可知$\frac{S_{BDOF}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{2}{5}$.又$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$,所以$\frac{S_{BDOF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$.

2. 在△ABC中由题设及塞瓦定理有$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$. 又有 $BD=CD'$, $DC=D'B$, $CE=AE'$, $EA=E'C$, $AF=BF'$, $FB=F'A$, 故$\frac{CD'}{D'B}\cdot\frac{BF'}{F'A}\cdot\frac{AE'}{E'C}=1$. 由塞瓦定理之逆知 AD', BE', CF'三线共点.

3. 由割线定理有 $AF\cdot AF'=AE\cdot AE'$, 即$\frac{AF}{EA}=\frac{E'A}{AF'}$. 同理, $\frac{BD}{FB}=\frac{F'B}{BD'}$, $\frac{CE}{DC}=\frac{D'C}{CE'}$. 三式相乘并适当交换位置, 有$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{D'C}{BD'}\cdot\frac{E'A}{CE'}\cdot\frac{F'B}{AF'}$. 由塞瓦定理知 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$, 再由塞瓦定理之逆知 AD', BE', CF'三线共点.

4. 设△ABC的边$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 周长为$2s$, 过顶点A, B, C且平分△ABC周长的直线分别交BC, CA, AB于点D, E, F, 则由$BD+CD=a$, $c+BD=b+CD$, 求得$BD=\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c$, $CD=\frac{1}{2}(c+a-b)=s-b$. 同理 $CE=s-a$, $AE=s-c=BD$, $AF=s-b=CD$, $BF=s-a=CE$. 故有$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$. 由塞瓦定理之逆, 知$AD$, BE, CF共点.

5. 令$\angle BAC=3\alpha$, $\angle ABC=3\beta$, $\angle ACB=3\gamma$, 由角平分线性质有$\frac{QX}{XR}=\frac{AQ}{AR}$, $\frac{BY}{YP}=\frac{BR}{BP}$, $\frac{PZ}{ZQ}=\frac{CP}{CQ}$. 由正弦定理, 有$\frac{BR}{AR}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\frac{CP}{BP}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, $\frac{AQ}{CQ}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, 于是$\frac{QX}{XR}\cdot\frac{BY}{YP}\cdot\frac{PZ}{ZQ}=\frac{BR}{AR}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{AQ}{CQ}=1$. 由塞瓦定理之逆, 知$PX$, QY, RZ三线共点.

6. 令$\angle BAC=3\alpha$, $\angle ABC=3\beta$, $\angle ACB=3\gamma$, 由角平分线性质有$\frac{EX}{FX}=\frac{AE}{AF}$, $\frac{FY}{YD}=\frac{BF}{BD}$, $\frac{DZ}{ZE}=\frac{CD}{CE}$. 设△$ABC$的外接圆半径为$R$, 由正弦定理有 $AF=\frac{2R\cdot\sin3\gamma\cdot\sin(60^\circ-\beta)}{\sin(60^\circ+\gamma)}=8R\cdot\sin\gamma\cdot\sin(60-\gamma)\cdot\sin(60^\circ-\beta)$, $AE=8R\cdot\sin\beta\cdot\sin(60^\circ-\gamma)\cdot\sin(60^\circ-\beta)$.

在△AEF中, 由余弦定理及公式$\sin^2(x+y)=\sin^2x+\sin^2y+\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x+y)$, 求得$EF=8R\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\beta)\cdot\sin(60^\circ-\gamma)$.

由 $\frac{AE}{\sin\angle AFE}=\frac{AF}{\sin\angle AEF}=\frac{EF}{\sin(60^\circ-\alpha)}$, 知$\sin\angle AFE=\sin\beta$, $\sin\angle AEF=\sin\gamma$, 故$\frac{AE}{AF}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. 同理, $\frac{BF}{BD}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $\frac{CD}{CE}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. 于是$\frac{EX}{XF}\cdot\frac{FY}{YD}\cdot\frac{DZ}{ZE}=1$, 由塞瓦定理之逆, 知$DX$, EY, FZ三线共点.

7. 由正弦定理, 有$\sin\angle EAA'=\frac{EA'}{AE}\cdot\sin\angle AA'E$, $\sin\angle A'AF=\frac{A'F}{AF}\cdot\sin\angle AA'F$. 两式相除并注意$AE=AF$, 有$\sin\angle AA'E=\sin\angle AA'F$, 则$\frac{\sin\angle EAA'}{\sin\angle A'AF}=\frac{EA'}{A'F}$, 即$\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}=\frac{EA'}{A'F}$. 同理$\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}=\frac{FB'}{B'D}$, $\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}=\frac{DC'}{C'E}$. 三式相乘, 得$\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}=\frac{EA'}{A'F}\cdot\frac{FB'}{B'D}\cdot\frac{DC'}{C'E}$. 由于$DA'$, EB', FC'共点于O, 则上式右边等于1, 从而左边亦等于1. 由塞瓦定理之逆, 知AA', BB', CC'共点.

8. 设AD, BE, CF分别与$B'C'$, $C'A'$, $A'B'$垂直于D, E, F, 且AD, BE, CF共点于P. $A'G$, $B'H$, $C'L$分别与BC, CA, AB垂直于G, H, L. 又锐角$\angle HB'A'$与$\angle ACP$的两边分别垂直, 故$\angle HB'A'=\angle ACP$,

同理，$\angle B'A'G=\angle PCB$，从而$\frac{\sin\angle HB'A'}{\sin\angle B'A'G}=\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PCB}$.类似地有$\frac{\sin\angle GA'C'}{\sin\angle A'C'L}=\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA}$，$\frac{\sin\angle LC'B'}{\sin\angle PBA'}=\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}$.三式相乘并适当整理，有$\frac{\sin\angle GA'C'}{\sin\angle B'A'G}\cdot\frac{\sin\angle LC'B'}{\sin\angle A'C'L}\cdot\frac{\sin\angle HB'A'}{\sin\angle C'B'H}=\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PCB}\cdot\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}$.由$\triangle ABC$中$AP,BP,CP$共点及角元形式的塞瓦定理，知上式右边等于1，从而左边也等于1.由塞瓦定理之逆，知$A'G,B'H,C'L$三线共点.

9. 设$\angle PBC=x$，则$\angle ABP=40^\circ-x$，由 $\frac{\sin80^\circ}{\sin20^\circ}\cdot\frac{\sin x}{\sin(40^\circ-x)}\cdot\frac{\sin10^\circ}{\sin30^\circ}=1$，求得 $x=20^\circ$.

10. 设$\angle ACD=x$，则$\angle BCD=50^\circ-x$，由 $\frac{\sin10^\circ}{\sin70^\circ}\cdot\frac{\sin40^\circ}{\sin10^\circ}\cdot\frac{\sin x}{\sin(50^\circ-x)}=1$，求得 $x=30^\circ$.

11. 设$\angle MBA=x$，则$\angle MAC=70^\circ$，由 $\frac{\sin20^\circ}{\sin60^\circ}\cdot\frac{\sin20^\circ}{\sin10^\circ}\cdot\frac{\sin(70^\circ-x)}{\sin x}=1$，及

$\sin60^\circ\cdot\sin x=\frac{4\sin20^\circ\cdot\sin40^\circ\cdot\sin80^\circ\cdot\sin(70^\circ-x)}{2\sin40^\circ}=\frac{\sin60^\circ\cdot\sin(70^\circ-x)}{2\sin40^\circ}$，求得 $x=30^\circ$.

12. 连AP，设$\angle PAC=x$，则$\angle BAP=110^\circ-x$.对$\triangle ABC$及点P，有$\frac{\sin(110^\circ-x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin20^\circ}{\sin20^\circ}\cdot\frac{\sin20^\circ}{\sin10^\circ}=1$，求得 $x=80^\circ$.此时$\angle APC=80^\circ$.过M作$EM/\!/AP$交PC于E，则梯形$APEM$为等腰梯形，有$PM=AE$.又$\angle ANE=\angle NBC+\angle BCN=50^\circ$，$\angle AEP=\angle AMP=180^\circ-\angle MAB-\angle ABM=50^\circ$，则$AN=AE$，故$PM=AN$.

13. 设$\angle NCB=x$，则$\angle ACN=20^\circ-x$，由 $\frac{\sin20^\circ}{\sin100^\circ}\cdot\frac{\sin30^\circ}{\sin10^\circ}\cdot\frac{\sin(20^\circ-x)}{\sin x}=1$，求得 $x=10^\circ$.

14. 设$\angle ACD=x$，则$\angle BCD=40^\circ-x$，由 $\frac{\sin10^\circ}{\sin70^\circ}\cdot\frac{\sin40^\circ}{\sin20^\circ}\cdot\frac{\sin x}{\sin(40^\circ-x)}=1$，求得 $x=30^\circ$.

15. 设$\angle MBC=x$，则$\angle ABM=50^\circ-x$，由 $\frac{\sin60^\circ}{\sin40^\circ}\cdot\frac{\sin x}{\sin(50^\circ-x)}\cdot\frac{\sin10^\circ}{\sin20^\circ}=1$ 及

$\sin60^\circ\cdot\sin x=\frac{1}{2\sin20^\circ}\cdot4\sin20^\circ\cdot\sin40^\circ\cdot\sin80^\circ\cdot\sin(50^\circ-x)=\frac{\sin60^\circ\cdot\sin(50^\circ-x)}{2\sin20^\circ}$，求得 $x=30^\circ$.

16. 设$\angle PAC=x$，则$\angle PAB=80^\circ-x$，由 $\frac{\sin(80^\circ-x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin40^\circ}{\sin30^\circ}\cdot\frac{\sin10^\circ}{\sin20^\circ}=1$ 及

$\sin x=\frac{4\sin10^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ\cdot\sin(80^\circ-x)}{\sin50^\circ}=\frac{\sin30^\circ\cdot\sin(80^\circ-x)}{\sin50^\circ}$，求得 $x=30^\circ$.分别在$\triangle APC$，$\triangle BPC$，$\triangle ABC$中由正弦定理，有$\frac{CA}{AP}=\frac{\sin140^\circ}{\sin10^\circ}=\frac{\sin40^\circ}{\sin10^\circ}$，$\frac{BP}{PC}=\frac{\sin20^\circ}{\sin40^\circ}$，$\frac{AB}{CB}=\frac{\sin30^\circ}{\sin80^\circ}=\frac{1}{2\cos10^\circ}$.故$\frac{CA}{AP}\cdot\frac{AB}{PC}\cdot\frac{BP}{CB}=\frac{CA}{AP}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{AB}{CB}=1$.

17. 连BP，设$\angle ABP=x$，则$\angle PBC=40^\circ-x$.对$\triangle ABC$及点P有$\frac{\sin20^\circ}{\sin80^\circ}\cdot\frac{\sin(40^\circ-x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin30^\circ}{\sin10^\circ}=1$，求得 $x=20^\circ$.

连PQ，设$\angle APQ=y$，则$\angle QPC=70^\circ-y$.对$\triangle APC$及点Q有$\frac{\sin60^\circ}{\sin20^\circ}\cdot\frac{\sin(70^\circ-y)}{\sin y}\cdot\frac{\sin10^\circ}{\sin20^\circ}=1$，求得$y=40^\circ$.此时，$\angle APQ=40^\circ=\angle PAB+\angle BAP$，故$B,P,Q$共线.

18. 设$\angle ABP=x$，则$\angle PBC=50°-x$. 对$\triangle ABC$及点P有 $\frac{\sin 60°}{\sin 20°}\cdot\frac{\sin(50°-x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin 10°}{\sin 40°}=1$，求得$x=20°$，即有$\angle PBQ=20°$.

连PQ，设$\angle QPC=y$，则$\angle BPQ=110°-y$. 对$\triangle BCP$及点Q有$\frac{\sin(110°-y)}{\sin y}\cdot\frac{\sin 10°}{\sin 20°}\cdot\frac{\sin 20°}{\sin 20°}=1$，求得$y=30°$，即有$\angle BPQ=80°$. 又$\angle BQP=180°-\angle PBQ-\angle BPQ=80°$，故$BP=BQ$.

19. 连DI，IC，由$AB=AC$及I为内心，知$\angle BCI=\angle IBC=\angle IBD=20°$. 又由$BD=BI$，知$\angle BDI=80°$. 设$\angle DCI=x$，则$\angle IDC=40°-x$，对$\triangle BCD$及点$I$有 $\frac{\sin 80°}{\sin(40°-x)}\cdot\frac{\sin 20°}{\sin 20°}\cdot\frac{\sin x}{\sin 20°}=1$，求得$x=10°$. 故$\angle BCD=30°$为所求.

20. 设过A,B,C分别与BC,CA,AB平行的直线交成$\triangle A'B'C'$，则A,B,C分别为$B'C',C'A',A'B'$的中点. 又设过A_2,B_2,C_2与AA_1,BB_1,CC_1平行的直线l_a,l_b,l_c分别与$B'C',C'A',A'B'$交于A'_2,B'_2,C'_2，则有$\angle A'_2A_2B+\angle CA_1A=180°$；而由$BA'=CA$，$BA_2=CA'$，$\angle A'BA_2=\angle ACA_1$，知$\triangle BA_2A'\cong\triangle CA_1A$，有$\angle BA_2A'=\angle CA_1A$. 从而$\angle A'_2A_2B+\angle BA_2A'=180°$，即$A'_2,A_2,A'$三点共线. 故有$\lambda'=\frac{B'A'_2}{A'_2C'}=\frac{CA_2}{A_2B}=\frac{A_2C}{BA_2}=\frac{BA_1}{A_1C}$(因$BA_1=A_2C,A_1C=BA_2$)$=\lambda$. 同理，$u'=\frac{C'B'_2}{B'_2A'}=\frac{CB_1}{B_1A}=u$，$v'=\frac{A'C'}{C'_2B'}=\frac{AC_1}{C_1B}=v$. 于是由塞瓦定理知$l_a,l_b,l_c$共点$\Leftrightarrow\lambda'u'v'=1\Leftrightarrow\lambda uv=1\Leftrightarrow AA_1,BB_1,CC_1$共点.

21. 因$GH/\!/BC$，有$\frac{GA}{BD}=\frac{GE}{ED},\frac{HA}{CD}=\frac{HF}{FD}$. 即$BD=\frac{ED}{GE}\cdot GA$，$CD=\frac{FD}{HF}\cdot HA$. 又$AB=AC$，$AD\perp BC$，则$BD=CD$. 于是$\frac{ED}{GE}\cdot GA=\frac{FD}{HF}\cdot HA$. 即$\frac{DE}{EG}\cdot\frac{GA}{AH}\cdot\frac{HF}{FD}=1$. 由塞瓦定理，即得结论.

22. 令$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则$SL=\frac{b}{2}$，$MN=\frac{c}{2}$. 由$\triangle SLD\backsim\triangle MND$，得$\frac{LD}{ND}=\frac{LS}{MN}=\frac{b}{c}$. 同理，$\frac{NF}{MF}=\frac{a}{b},\frac{ME}{LE}=\frac{c}{a}$. 在$\triangle MNL$中，有$\frac{LD}{ND}\cdot\frac{NF}{MF}\cdot\frac{ME}{LE}=1$. 由塞瓦定理之逆，知$MD,NE,LF$共点，故$MS$，$NT$，$LU$共点.

23. 设$\angle AEX=\angle XFE=\alpha$，$\angle AFX=\angle XEF=\beta$，$\angle XAE=\alpha'$，$\angle XAF=\beta'$. 在$\triangle AEF$中，$AX$，$EX$，$FX$交于一点，由角元形式的塞瓦定理，有$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=1$，即$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=(\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'})^{\frac{1}{2}}$.

令$\angle YEF=\gamma$，$\angle YED=\delta$，$\angle FBY=\gamma'$，$\angle YBD=\delta'$，$\angle EFZ=\varphi$，$\angle DFZ=\theta$，$\angle ECZ=\varphi'$，$\angle DCZ=\theta'$. 同理，有$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}=\left(\frac{\sin\gamma'}{\sin\delta'}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=(\frac{\sin\theta'}{\sin\varphi'})^{\frac{1}{2}}$. 注意到$AP$，$BP$，$CP$交于一点，由角元形式的塞瓦定理，有$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\left(\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}\cdot\frac{\sin\gamma'}{\sin\delta'}\cdot\frac{\sin\theta'}{\sin\varphi'}\right)^{\frac{1}{2}}=1$，由此即证.

24. 令$\angle CC'P_2=\angle 1$，$\angle CC'P_4=\angle 2$，$\angle BB'P_1=\angle 3$，$\angle BB'P_6=\angle 4$，$\angle AA'P_3=\angle 5$，$\angle AA'P_5=\angle 6$. AA'，BB'，CC'共线$\Leftrightarrow\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}\cdot\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}\cdot\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 6}=1\Leftrightarrow\frac{CP_2\cdot\sin\angle CP_2C'}{CP_4\cdot\sin\angle CP_4C'}\cdot\frac{BP_1\cdot\sin\angle BP_1B'}{BP_6\cdot\sin\angle BP_6B'}\cdot\frac{AP_3\cdot\sin\angle AP_3A'}{AP_5\cdot\sin\angle AP_5A'}=1$. 而$AP_1=AP_4=BP_2=BP_5=CP_3=CP_6$，则$\angle CP_2C'=\angle AP_5A'$，$\angle AP_3A'=$

$\angle BP_6B'$，$\angle CP_4C'=\angle BP_1B'\Leftrightarrow\frac{CP_2}{CP_4}\cdot\frac{BP_1}{BP_6}\cdot\frac{AP_3}{AP_5}=1$.

又由条件易知，$BP_1=AP_5$，$CP_2=BP_6$，$AP_3=CP_4$．由此即证．

注：此题也可以应用梅涅劳斯定理证．分别延长 AB 和 $A'B'$，CB 和 $C'B'$，AC 和 $A'C'$ 得交点 M，N，G（交点可在无穷远处）．由 $AP_1=BP_5$，有 $BP_1=AP_5$．同理，$AP_3=CP_4$，$BP_6=CP_2$．直线 $B'A'M$ 截 $\triangle ABC$，由梅涅劳斯定理，有 $\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AP_3}{P_3C}\cdot\frac{CP_6}{P_6B}=-1$．同理，$\frac{AC}{GC}\cdot\frac{CP_2}{P_2B}\cdot\frac{BP_5}{P_5A}=-1$，$\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BP_1}{P_1A}\cdot\frac{AP_4}{P_4C}=-1$．三式相乘并注意 $BP_1=AP_5$，$AP_3=CP_4$，$BP_6=CP_2$，得 $\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CN}{NB}=-1$．由梅涅劳斯定理之逆，知 M，N，G 共线．又点 M，N，G 分别是 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 对应边所在直线的交点，利用笛沙格逆定理可得 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 对应顶点的连线 $A'A$，$B'B$，$C'C$ 共点．

25．设 PA 与 BC 相交于 D'，对 $\triangle ABC$ 应用塞瓦定理，有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE}{EA}=1$．又由梅涅劳斯定理，点 F，E，D 共线的充要条件是 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$．从而转证 $\frac{BD'}{D'C}=\frac{DB}{DC}$ 即可．因 $AC=CD$，$\angle DPA=180°-2\angle DPC$，这表明 $\angle DPC=\angle CPD'$，即 PC 是 $\angle DPD'$ 的平分线，且 $PC\perp PB$，PB 是 $\angle DPD'$ 的外角平分线，由此即证得结论．

26．设 AA_1，BB_1，CC_1 交边 BC，CA，AB 于 A_2，B_2，C_2．由 $\frac{BA_2}{A_2C}=\frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle ACA_1}}=\frac{AB\cdot\sin(B+\alpha)}{CA\cdot\sin(C+\alpha)}$，$\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{BC\cdot\sin(C+\alpha)}{AB\cdot\sin(A+\alpha)}$，$\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC\cdot\sin(A+\alpha)}{BC\cdot\sin(B+\alpha)}$，三式相乘即证．

习题 B

1．设直线 AD'，BE'，CF' 交 BC，CA，AB 于 A'，B'，C'，过 D' 作 $\odot O$ 的切线交 AB，AC 于 M，N．由 $MN\parallel BC$，知 $\triangle AMD'\backsim\triangle ABA'$，$\triangle AD'N\backsim\triangle AA'C$，则 $\frac{MD'}{BA'}=\frac{AD'}{AA'}=\frac{D'N}{A'C}$，即 $\frac{BA'}{A'C}=\frac{MD'}{D'N}$．连 OM，ON，设 $\odot O$ 的半径为 r，则 B，D，O，F；C，D，O，E 分别四点共圆．由 $\angle FOD'=\angle B$，$\angle EOD'=\angle C$，则 $\angle MOD'=\frac{1}{2}\angle FOD'=\frac{1}{2}\angle B$，$\angle NOD'=\frac{1}{2}\angle EOD'=\frac{1}{2}\angle C$．而 $\frac{MD'}{r}=\tan\angle MOD'=\tan\frac{\angle B}{2}$，$\frac{D'N}{r}=\tan\angle NOD'=\tan\frac{\angle C}{2}$，则 $MD':D'N=\tan\frac{1}{2}\angle B:\tan\frac{1}{2}\angle C$，即 $BA':A'C=\tan\frac{1}{2}\angle B:\tan\frac{1}{2}\angle C$.

同理，$CB':B'A=\tan\frac{1}{2}\angle C:\tan\frac{1}{2}\angle A$，$AC':C'B=\tan\frac{1}{2}\angle A:\tan\frac{1}{2}\angle B$，则 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$．由塞瓦定理之逆，有 AA'，BB'，CC' 三线共点．即 AD'，BE'，CF' 三线共点．

2．设 BD 交圆于 M，N，连 ME，MH，MG，MF，NH，NE，NF，NG，EH，FG．由 $\triangle BME\backsim\triangle BEN$，$\triangle BMF\backsim\triangle BFN$，有 $\frac{EM}{EN}=\frac{BE}{BN}$，$\frac{MF}{FN}=\frac{BF}{BN}$．而 $BE=BF$，则 $\frac{EM}{EN}=\frac{MF}{FN}$，即 $\frac{EM}{MF}=\frac{EN}{FN}$.

同理，$\frac{NH}{GN}=\frac{HM}{GM}$．于是 $\frac{NH\cdot EM}{MF\cdot GN}=\frac{HM\cdot EN}{GM\cdot FN}$.

对圆内接四边形 $HEMN$ 和 $GFMN$ 分别应用托勒迷定理，有 $HM\cdot EN=NH\cdot EM+HE\cdot MN$，$GM\cdot FN=MF\cdot GN+FG\cdot MN$，所以 $\frac{MH\cdot EM}{MF\cdot GN}=\frac{NH\cdot EM+HE\cdot MN}{MF\cdot GN+FG\cdot MN}$，由此得 $NH\cdot EM\cdot FG=HE\cdot MF\cdot GN$，即 $\frac{NH}{HE}\cdot\frac{EM}{MF}\cdot\frac{FG}{GN}=1$. 由塞瓦定理的推论，知 BD,GE,HF 三线共点. 同理，AC,GE,HF 三线共点. 因 GE 与 HF 交点唯一，故 AC,BD,HF,GE 四线共点.

3. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，则 I 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心. 令 $\angle BAC=2\alpha$，$\angle ABC=2\beta$，$\angle BCA=2\gamma$.

(Ⅰ) 由 $\angle BIA_1=\alpha+\beta=\angle IBA_1$，有 $\angle A_1BA_0=90^\circ-(\alpha+\beta)=\angle A_1A_0B$，即 $IA_1=I_1B=I_1A_0$，有 $S_{\triangle A_0BI}=2S_{\triangle A_1BI}$. 同理，$S_{\triangle A_0CI}=2S_{\triangle A_1CI}$，故 $S_{A_0BIC}=2S_{A_1BIC}$. 同理，$S_{B_0CIA}=2S_{B_1CIA}$，$S_{C_0AIB}=2S_{C_1AIB}$. 三式相加即证.

(Ⅱ) 令 $\frac{C_0B}{C_0A_0}=\lambda_1$，$\frac{A_0C}{A_0B_0}=\lambda_2$，$\frac{B_0A}{B_0C_0}=\lambda_3$，则 $\frac{C_0B}{BA_0}=\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}$，$\frac{A_0C}{BA_0}=\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}$，$\frac{B_0A}{AC_0}=\frac{\lambda_3}{1-\lambda_3}$. 对 $\triangle A_0B_0C_0$ 应用塞瓦定理，有 $\frac{C_0B}{BA_0}\cdot\frac{A_0C}{CB_0}\cdot\frac{B_0A}{AC_0}=1$，即 $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_3}{1-\lambda_3}=1$，从而 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)$，$2\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_0B_0C_0}}$. (*)

又由平均值不等式，有 $\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=\sqrt[3]{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}\leqslant\frac{1}{3}[3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)]\leqslant1-\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$，故 $\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\leqslant\frac{1}{2}$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\leqslant\frac{1}{8}$. 即 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_0B_0C_0}}=2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\leqslant\frac{1}{4}$，亦即 $S_{\triangle A_0B_0C_0}\geqslant4S_{\triangle ABC}$，等号当且仅当 $\triangle A_0B_0C_0$ 为正三角形 ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2}$) 时成立.

注：其中 (*) 是三角形与其内接三角形的关系公式.

4. 延长 AP 交 BC 于 Q，由塞瓦定理有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. 由 $\angle BPA=\angle CPA$，知 $\angle BPQ=\angle CPQ$. 又 $\frac{PB}{PC}=\frac{BQ}{QC}$，过 A 作 $AM/\!/PB$ 交直线 PF 于 M，作 $AN/\!/PC$ 交直线 PE 于 N，有 $\frac{AM}{PB}=\frac{AF}{FB}$，$\frac{PC}{AN}=\frac{CE}{EA}$，于是得 $AM=AN$. 由 $\angle PAM=180^\circ-\angle BPA=180^\circ-\angle CPA=\angle PAN$，有 $\triangle PAM\cong\triangle PAN$，得 $\angle BPF=\angle CPE$.

5. 连 EF 交直线 AC 于 K. 令 $\angle BAF=\alpha$，$\angle DAE=\beta$，$\angle BAC=\angle DAC=\theta$，由 $\frac{FB}{\sin\alpha}=\frac{AF}{\sin\angle ABF}$，$\frac{BC}{\sin\theta}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，有 $\frac{FB}{BC}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}=\frac{AF}{AC}$. 同理，$\frac{DE}{DC}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\beta}=\frac{AE}{AC}$. 又 $\frac{KF}{KE}=\frac{S_{\triangle AFK}}{S_{\triangle AEK}}=\frac{AF\cdot\sin(\alpha+\theta)}{AE\cdot\sin(\beta+\theta)}$. 对 $\triangle EFC$ 及点 G 应用塞瓦定理，有 $\frac{FB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{KE}{KF}=1$，得 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\beta+\theta)}$，即 $\sin\theta\cdot\sin(\alpha-\beta)=0$. 由此可得 $\alpha=\beta$，即证.

6. 连 DI,IC，设 $\angle DCI=x$，则 $\angle IDC=40^\circ-x$，对 $\triangle BCD$ 及点 I 应用角元形式的塞瓦定理，有 $\frac{\sin80^\circ}{\sin(40^\circ-x)}\cdot\frac{\sin20^\circ}{\sin20^\circ}\cdot\frac{\sin x}{\sin20^\circ}=1$，求得 $x=10^\circ$，故 $\angle BCD=30^\circ$ 为所求.

7. 由 $A_1B_1^2=A_1C^2+B_1C^2-A_1C\cdot B_1C$，$A_1C\cdot B_1C-A_1C\cdot B_1C=A_1C\cdot B_1C$，及 $B_1C_1^2\geqslant B_1A\cdot$

C_1A，$C_1A_1^2 \geqslant C_1B \cdot A_1B$，注意应用塞瓦定理，$\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = 1$，从而 $A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geqslant \sqrt{A_1C \cdot B_1C \cdot B_1A \cdot C_1A \cdot C_1B \cdot A_1B} = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A \cdot \sqrt{\frac{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}} = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A$.

8. 设直线 AD 与 BC 交于 P.过 P 作 l 的垂线交 l 于 H.设圆 Γ 的圆心为 O，由 $\triangle OAD \backsim \triangle PAH$，有 $\frac{AH}{AD} = \frac{HP}{DO}$.由 $\triangle OCB \backsim \triangle PHB$ 有 $\frac{BH}{BC} = \frac{HP}{CO}$，即 $\frac{AH}{AD} = \frac{BH}{BC}$.注意 $PD = PC$，有 $\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BC}{CP} \cdot \frac{PD}{DA} = 1$.由塞瓦定理之逆，知 AC，BD，PH 共点，直线 PH 重合于 EF，点 H 与 F 重合.又 O，D，P，C 共圆，且直径为 OP，又 $\angle PHO = 90°$，知 H 也在此圆上.故 $\angle DFP = \angle DOP = \angle COP = \angle CFP$.

9. 设直线 AA_1 交 BC 于 X，直线 BB_1 交 CA 于 Y，CC_1 交 AB 于 Z，由塞瓦定理的逆定理，只要证明 $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.设中心为 A_1 的正方形边长为 a，顶点 P，Q 分别在边 AB 和 AC 上，顶点 S，T 在 BC 上，且 S 在 B，T 之间.因 AX 过正方形 $QPST$ 的中心，若 AX 截 PQ 边两段为 u，v，则它截 ST 边两段为 v，u，则 $\frac{BX}{XC} = \frac{u}{v} = \frac{BX+u}{XC+v} = \frac{BT}{SC} = \frac{BS+a}{TC+a} = \frac{a \cdot \cot B + a}{a \cdot \cot C + a} = \frac{\cot B + 1}{\cot C + 1}$.同理，$\frac{CY}{YA} = \frac{\cot C + 1}{\cot A + 1}$，$\frac{AZ}{ZB} = \frac{\cot A + 1}{\cot B + 1}$.故有 $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.

10. 作高 AH，连 BE，CD，则 AH，BE，CD 交于一点，即 $\triangle ABC$ 的垂心.对 $\triangle ABC$ 应用塞瓦定理，有 $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.由 $\triangle MDF \backsim \triangle MGE$，有 $\frac{GM}{MD} = \frac{GE}{DF} = \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{BE \cdot CE}{BD \cdot CD}$.

由 $AH /\!/ EG$，有 $\frac{HG}{AE} = \frac{CH}{AC}$，即 $AC \cdot HG = HC \cdot AE$.由 $AB \cdot CD = 2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BE$，有 $AB \cdot CD \cdot HG = AC \cdot BE \cdot HG = HC \cdot AE \cdot BE$.对 $\triangle DBG$，考察点 A，M，H，有 $\frac{DA}{AB} \cdot \frac{BH}{HG} \cdot \frac{GM}{MD} = \frac{DA}{AB} \cdot \frac{BH}{HG} \cdot \frac{BE \cdot CE}{BD \cdot CD} = \frac{DA \cdot BH \cdot CE \cdot BE}{BD \cdot (HC \cdot AE \cdot BE)} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$，由梅涅劳斯定理之逆即证.

11. 设 H 关于边 BC，CA，AB 的对称点分别为 A'，B'，C'，则 A'，B'，C' 均在外接圆 $\odot O$ 上.下证 D，E，F 满足要求.设直线 AO，BO，CO 与 BC，CA，AB 的交点为 D'，E'，F'.由于 $DA = DH$，有 $OD + DH = OD + DA = R$（R 为 $\odot O$ 半径）.同理，$OE + EH = OF + FH = R$.

由 $\angle BAO = \frac{\pi}{2} - \angle ACB = \angle CAA'$，有 $\angle BOD' = \angle COD$.又 $OB = OC$，$\angle OBD' = \angle OCD$，则 $\triangle OBD' \cong \triangle OCD$，有 $BD' = CD$.同理，$CE' = AE$，$AF' = BF$.对 $\triangle ABC$ 及点 H 应用塞瓦定理，有 $1 = \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B}$，即 $\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B} = \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1$.再由塞瓦定理之逆，知 AD，BE，CF 共点.D，E，F 满足要求.

12. 连 AD 交 BF 于 G，连 BD 交 AE 于 H，连 GN，HM.由 $\angle DAB = \angle CDB = \angle CFB$，知 A，F，G，N 四点共圆，有 $\angle AFB + \angle ANG = 180°$.又 $\angle AFB = 90°$，则 $\angle ANG = 90°$，即 $GN \perp AB$ 且 $GN /\!/ DL$，有 $\frac{LN}{NA} = \frac{DG}{GA}$.同理，$\frac{BH}{HD} = \frac{BM}{ML}$.在 $\triangle ABD$ 中，$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BH}{HD} \cdot \frac{DG}{GA} = \frac{AO}{AO} \cdot \frac{BM}{ML} \cdot \frac{LN}{NA} = 1$.由塞瓦定理之逆，知 AE，BF，OD

三线共点.

13. 显然,有 $A_1A_3=A_3A_2=B_1B_3=B_3B_2=C_1C_3=C_3C_2$,且 $C_3B_4=A_3B_4$, $A_3C_4=B_3C_4$, $B_3A_4=C_3A_4$. 由正弦定理,有 $\frac{\sin\angle C_3B_3B_4}{\sin\angle A_3B_3B_4}=\frac{C_3B_4\cdot\sin\angle B_3C_3B_4}{B_3B_4}\Big/\frac{A_3B_4\cdot\sin\angle B_3A_3B_4}{B_3B_4}=\frac{\sin\angle B_3C_3B_4}{\sin\angle B_3A_3B_4}$.

同理, $\frac{\sin\angle B_3A_3A_4}{\sin\angle C_3A_3A_4}=\frac{\sin\angle A_3B_3A_4}{\sin\angle A_3C_3A_4}$, $\frac{\sin\angle A_3C_3C_4}{\sin\angle B_3C_3C_4}=\frac{\sin\angle C_3A_3C_4}{\sin\angle C_3B_3C_4}$.

又由于 $\angle C_3B_3C_4=\angle B_3C_4B_4$, $\angle A_3B_3A_4=\angle B_3A_3B_4$, $\angle C_3A_3C_4=\angle A_3C_3A_4$,故 $\frac{\sin\angle C_3B_3B_4}{\sin\angle A_3B_3B_4}\cdot\frac{\sin\angle B_3A_3A_4}{\sin\angle C_3A_3A_4}\cdot\frac{\sin\angle A_3C_3C_4}{\sin\angle B_3C_3C_4}=1$. 应用角元形式的塞瓦定理,知 A_3A_4, B_3B_4, C_3C_4 三线共点.

14. 设 AB 与 CE 交于点 D, AC 与 BF 交于点 G. 由 $\frac{AD}{DB}=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BEC}}$, $\frac{CG}{GA}=\frac{S_{\triangle CFB}}{S_{\triangle AFB}}$,有 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CG}{GA}=\frac{BH}{HC}\cdot\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BEC}}\cdot\frac{S_{\triangle CFB}}{S_{\triangle AFB}}$. 又由 $\triangle ABE\backsim\triangle ACF$,有 $\angle EAB=\angle FAC$, $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CF}$,则 $\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle ABF}}=\frac{AE\cdot AC\cdot\sin\angle EAC}{AF\cdot AB\cdot\sin\angle BAF}=1$,注意 $\angle ABE=\angle ACF=90°$,有 $\frac{S_{\triangle CFB}}{S_{\triangle BEC}}=\frac{BC\cdot CF\cdot\sin\angle BCF}{BC\cdot BE\cdot\sin\angle CBF}=\frac{AC\cdot\cos\angle BCA}{AB\cdot\cos\angle ABC}=\frac{HC}{HB}$. 于是 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$,由塞瓦定理之逆即证.

15. 设非等边 $\triangle ABC$ 各顶点处的外接圆切线 $AB'C'$, $BA'C'$, $A'CB'$ 组成 $\triangle A'B'C'$,直线 AB 与 $A'B'$ 交于 P, BC 与 $B'C'$ 交于 Q, CA 与 $C'A'$ 交于 R,连 $A'A$, $B'B$, $C'C$. 因 C, A, B 分别在 $\triangle A'B'C'$ 三边所在直线 $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ 上, $A'C=BA'$, $CB'=B'A$, $AC'=C'B$,从而 $\frac{A'C}{CB'}\cdot\frac{B'A}{AC'}\cdot\frac{C'B}{BA'}=1$. 由塞瓦定理的逆定理,知 $A'A$, $B'B$, $C'C$ 共点. 再运用戴沙格定理,知 P, Q, R 三点共线.

16. 必要性:设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$, $\angle ABD=\angle CBF=\beta$, $\angle ACD=x$, $\angle BCE=y$. 又设 M, N, K 分别为 AD, BE, CF 与 $\triangle ABC$ 各边的交点. 因 AD, BE, CF 共点,则由塞瓦定理,得

$$1=\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}\cdot\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}\cdot\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABE}}=\frac{AC\cdot AF\cdot\sin\alpha}{BC\cdot BF\cdot\sin\beta}\cdot\frac{AB\cdot BD\cdot\sin\beta}{AC\cdot CD\cdot\sin x}\cdot\frac{BC\cdot CE\cdot\sin y}{AB\cdot AE\cdot\sin\alpha}$$

$$=\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{\sin y}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin(B-\beta)}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin(C-x)}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(C-y)}\cdot\frac{\sin y}{\sin x}=\frac{\sin(C-x)}{\sin(C-y)}\cdot\frac{\sin y}{\sin x}.$$

即 $\frac{\sin(C-x)}{\sin x}=\frac{\sin(C-y)}{\sin y}\Rightarrow\cot x=\cot y$.

注意 $x,y\in(0,\pi)$,故 $x=y$,即 $\angle ACD=\angle BCE$.

充分性:若 $\angle ACD=\angle BCE$,因上述证明各步均可逆,由塞瓦定理之逆,知 AD, BE, CF 三线共点.

17. 设 $\angle CAQ=\alpha_1$, $\angle BAQ=\alpha_2$, $\angle ABQ=\beta_1$, $\angle CBQ=\beta_2$, $\angle BCQ=\gamma_1$, $\angle ACQ=\gamma_2$. 由塞瓦定理及正弦定理,有 M_1M, N_1N, L_1L 共点 $\Leftrightarrow\frac{NM_1}{M_1L}\cdot\frac{LN_1}{N_1M}\cdot\frac{ML_1}{L_1N}=1\Leftrightarrow\frac{S_{\triangle AM_1N}}{S_{\triangle AM_1L}}\cdot\frac{S_{\triangle BN_1L}}{S_{\triangle BN_1M}}\cdot\frac{S_{\triangle CL_1M}}{S_{\triangle CL_1N}}=1$

$$\Leftrightarrow\frac{AM_1\cdot AN\cdot\sin\alpha_1}{AM_1\cdot AL\cdot\sin\alpha_2}\cdot\frac{BN_1\cdot BL\cdot\sin\beta_1}{BN_1\cdot BM\cdot\sin\beta_2}\cdot\frac{CL_1\cdot CM\cdot\sin\gamma_1}{CL_1\cdot CN\cdot\sin\gamma_2}=1\Leftrightarrow\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CM}{BM}\cdot\frac{BL}{AL}\cdot\frac{QA}{QC}\cdot\frac{QC}{QB}\cdot\frac{QB}{QA}=1$$

$\Leftrightarrow AM,BN,CL$ 三直线共点，且与 Q 点位置无关.

18. 设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，D',E',F' 分别为 BC,CA,AB 的中点，则 $\triangle ABC$ 区域被划分为六个区域：$\triangle AF'G,\triangle BF'G,\triangle BD'G,\triangle CD'G,\triangle CE'G,\triangle AE'G$. 不妨设 P 点落在 $\triangle CE'G$ 区域. 此时，易知 $\frac{CD}{DB}\leqslant 1,\frac{CE}{EA}\leqslant 1,\frac{AF}{FB}\leqslant 1$.

由塞瓦定理，有 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1\Rightarrow\frac{DC}{BD}=\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\leqslant 1,\frac{AF}{FB}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{EA}{CE}\leqslant\frac{EA}{EC}\Rightarrow\angle BFD\geqslant\angle FDE$，$\angle BDF\geqslant\angle DFE$. 分别过 F,D，在 $\angle BFD,\angle BDF$ 内作 DE,FE 的平行线，则两平行线的交点 Q 必落在 $\triangle BFD$ 区域. 从而，有 $\triangle FDE\subset\square FQDE\subset\triangle ABC$，结论成立.

19. 设 AC 交 BC 于 Q. 对 $\triangle AEC$ 和点 F 应用塞瓦定理，有 $\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CD}{DE}=1$. 对 $\triangle AEC$ 及截线 BPD 应用梅涅劳斯定理，有 $\frac{ED}{DC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$，故有 $\frac{AP}{AQ}=\frac{PC}{QC}$.

过 P 作 EF 的平行线交 OA 于 I，交 OC 于 J，则 $\frac{PI}{QO}=\frac{AP}{AQ},\frac{JP}{QO}=\frac{PC}{QC}$. 于是 $\frac{PI}{QO}=\frac{PJ}{QO}$，即 $PI=PJ$. 又 $OP\perp IJ$，则 OP 平分 $\angle IOJ$，即 OP 平分 $\angle AOC$.

同理，当 BD 与 EF 相交时，OP 平分 $\angle DOB$；而当 $BD/\!/EF$ 时，过 B 作 ED 的平行线交 AC 于 G，则 $\frac{AG}{AC}=\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF}$，即 $GD/\!/CF$，$BCDG$ 为平行四边形，亦即 P 为 BD 中点. 因此，OP 平分 $\angle DOB$.

20. 显然有 $PD=DQ,AP=AQ$. 不妨设 $AB\geqslant AC$，则 $\angle ADC\leqslant\angle ADB$，$\angle ADC$ 为直角或锐角. 作 $AE\perp BC$ 于 E，易知 A,P,D,E 四点共圆，A,D,E,Q 四点共圆. 则 $BP\cdot BA=BD\cdot BE,CQ\cdot CA=CD\cdot CE$，故 $\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BP}{CQ}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BE}{CE}$.

由 AD 平分 $\angle BAC$，有 $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$，得 $\frac{BP}{CQ}=\frac{BE}{CE}$，即 $\frac{BP\cdot CE}{CQ\cdot BE}=1$. 而 $AP=AQ$，则 $\frac{BP\cdot CE\cdot AQ}{PA\cdot QC\cdot EB}=1$. 由塞瓦定理之逆，知 AE,BQ,CP 三线共点，即 $AE\perp BC$，故 $AK\perp BC$.

第三章　托勒密定理及应用

习题 A

1. 由 $\triangle CDE\backsim\triangle BAE$ 和 $\triangle CBE\backsim\triangle DAE$，有 $AB=\frac{4BE}{CE},AD=\frac{4DE}{CE}$. 对四边形 $ABCD$ 应用托勒密定理，有 $BD\cdot(AE+CE)=4(AB+AD)=16\cdot\frac{BE+DE}{CE}$. 令 $CE=x$，得方程 $x^2+6x-16=0$，求得 $x=2$（舍去了负值）. 于是 $BE\cdot DE=CE\cdot AE=12$. 又 $BD<BC+DC=8$，求得 $BE=3,DE=4$ 或 $BE=4,DE=3$，总之 $BD=7$ 为所求.

2. 连 EF,DF，由 $\angle FBC=\angle FBD=\angle FED=\angle FAC,\angle ABF=\angle EBF=\angle EDF=\angle ACF$，知 $\triangle ACF\backsim\triangle EDF$，即 $\frac{EF}{AF}=\frac{DE}{AC}=\frac{DF}{CF}$. 设其比值为 k（k 为参数），则 $EF=kAF,DE=kAC\cdot DF=kCF$，对四边形 $BEFD$ 应用托勒密定理. 有 $BE(EF+DF)=BF\cdot DE$，即 $BE(k\cdot AF+k\cdot CF)=BF\cdot k\cdot AC$. 注意到 $BE=AC$，消去 k，得 $BF=AF+CF$.

3. 连 AC,在四边形 $APCD$ 中应用托勒密定理,有$\frac{PA+PC}{PB}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}AB}{AB}=\sqrt{2}$.

4. 连 B_1D_1,D_1C_1,B_1C_1,设$\angle CAD=\alpha$,$\angle BAD=\beta$,$\odot O$ 的半径为 R.由 AD 为 BC 上中线,可令 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=k$.由正弦定理有 $B_1D_1=2R\cdot\sin\beta$, $C_1D_1=2R\cdot\sin\alpha$, $B_1C_1=2R\cdot\sin(\alpha+\beta)$.对四边形 $AB_1D_1C_1$ 应用托勒密定理,有 $AB_1\cdot 2R\cdot\sin\alpha+AC_1\cdot 2R\cdot\sin\beta=AD_1\cdot 2R\cdot\sin(\alpha+\beta)$,消去 $2R$,两边同乘以$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot AD$ 得 $AB_1\cdot AB\cdot S_{\triangle ACD}+AC_1\cdot AC\cdot S_{\triangle ABD}=2AD_1\cdot AD\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,亦即$AB_1\cdot AB+AC_1\cdot AC=2AD_1\cdot AD$,由此即证.

5. 连 A_1A_5,A_3A_5,则 $A_1A_5=A_1A_4$,$A_3A_5=A_1A_3$.对四边形 $A_1A_3A_4A_5$ 应用托勒密定理,有 $A_3A_4\cdot(A_1A_3+A_1A_5)=A_1A_4\cdot A_3A_5$,即 $A_1A_2(A_1A_3+A_1A_4)=A_1A_4\cdot A_1A_3$,由此整理即证.

6. 对四边形 $AB'A'B$ 应用托勒密定理,有 $a_1b_1=cc'+AB\cdot A'B'$,即 $a_1b_1c_1=cc'c_1+AB\cdot A'B'\cdot c_1$,同理,对四边形 $B'CA'C'$,$AB'BC'$,$AA'BC'$ 分别应用托勒密定理,有 $AB\cdot A'B'\cdot c_1=AB\cdot B'C'\cdot b+AB\cdot A'C'\cdot a'$,$AB\cdot B'C'\cdot b=abc+bb'b_1$,$AB\cdot A'C'\cdot a'=a'b'c'+aa'a_1$.由此四式即证得结论.

7. 设圆心 O 到 AB,BC,CA 的距离分别为 x_1,x_2,x_3,连接 BO 并延长与$\odot O$ 交于 D,连 AD,DC,则 $AD=2x_1$,$CD=2x_2$,对四边形 $ABCD$ 应用托勒密定理有 $2x_1a+2x_2c=2Rb$.同理,$2x_2b+2x_3a=2Rc$,$2x_1b+2x_3c=2Ra$.加之 $2x_1(a+b)=2x_2(b+c)+2x_3(c+a)=2R(a+b+c)$,但 $cx_1+ax_2+bx_3=r(a+b+c)$,以上两式相加得 $x_1+x_2+x_3=R+r$.但 $x_1=R-h_1$,$x_2=R-h_2$,$x_3=R-h_3$,由此即证.

8. 作一直径 $AB=x(x\geqslant 11)$的圆,在 B 的两侧分别取 C,D 二点,使 $BC=2$,$BD=11$,于是,$AC=\sqrt{x^2-4}$,$AD=\sqrt{x^2-121}$,对四边形 $ABCD$ 应用托勒密定理,有 $CD\cdot x=2\cdot\sqrt{x^2-121}+11\cdot\sqrt{x^2-4}$,将此式与原方程比较得 $CD=7\sqrt{3}$.在$\triangle BCD$ 中,由余弦定理,有 $\cos\angle CBD=\frac{2^2+11^2-(7\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\cdot 11}=-\frac{1}{2}$,知$\angle CBD=120°$,故 $x=AB=\frac{CD}{\sin 120°}=14$ 为所求.

9. 作直径 $AC=1$ 的圆,并作弦 $AB=b$,$AD=a$ 的圆内接四边形 $ABCD$,则 $DC=\sqrt{1-a^2}$,$BC=\sqrt{1-b^2}$.应用托勒密定理,有 $AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD$,即 $a\cdot\sqrt{1-b^2}+b\cdot\sqrt{1-a^2}=1\cdot BD$,由此得 $BD=1$,即 BD 也是圆的直径,故 $a^2+b^2=1$.

10. 当 $x=0$ 时,$y=1$,当 $x\neq 0$ 时,作代换 $t=\frac{x^2+2}{2x}$,则$|t|=|\frac{x}{2}+\frac{1}{x}|=\frac{|x|}{2}+\frac{1}{|x|}\geqslant\sqrt{2}$,$y=\frac{t+\sin\theta}{t+\cos\theta}$,即 $yt-1=\sin\theta-y\cdot\cos\theta$,以 $AB=1$ 为直径作圆,作弦 $AC=|\sin\theta|$,作弦 $AD=\frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}}$,则 $BD=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$,$BC=|\cos\theta|$.由托勒密定理及 $CD\leqslant AB=1$,有 $|\sin\theta|+|y\cos\theta|\leqslant\sqrt{1+y^2}$,亦有 $|yt-t|=|\sin\theta-y\cos\theta|\leqslant|\sin\theta|+|y\cos\theta|\leqslant\sqrt{1+y^2}$,即 $|t|\cdot|y-1|\leqslant\sqrt{1+y^2}$,$\sqrt{2}|y-1|\leqslant\sqrt{1+y^2}$,故 $2-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{3}$.

11. 连 AC,CE,AE,对四边形 $APCE$ 应用托勒密定理,有 $AC\cdot PE=AE\cdot PC+CE\cdot PA$,而 $AC=$

$AE=CE$,有 $PE=PA+PC$.同理,$PD=PB+PF$,由此即证.

12. 不失一般性,令 P 点位于$\triangle OBF$ 内部(其中 O 为$\triangle ABC$ 中心),作 $PP_1\perp AD$ 于 P_1,$PP_2\perp BE$ 于 P_2.$PP_3\perp CF$ 于 P_3.由 P,O,P_1,P_2 四点共圆,有$\angle PP_2O+\angle PP_3O=180°$,知 P_1,P_3,O,P_2 四点共圆,即 P,P_3,O,P_1,P_2 共圆,推知$\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形.在 $PP_3P_1P_2$ 中,有 $PP_1\cdot P_2P_3=PP_2\cdot P_1P_3+PP_3\cdot P_1P_2$,即 $PP_1=PP_2+PP_3$,故 $S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PCF}$.

13. 作$\triangle ABC$ 外接圆的直径 CF,并设 $AF=x$,$BF=y$,则$\angle BFC=\angle A=60°$,直径 $CF=d=2y$.对四边形 $BCAF$ 应用托勒密定理,有 $cd=ax+by$.从而 $\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\dfrac{\tan\angle BFC-\tan\angle AFC}{\tan\angle BFC+\tan\angle AFC}=$

$$\frac{\dfrac{a}{y}-\dfrac{b}{x}}{\dfrac{a}{y}+\dfrac{b}{x}}=\frac{ax-by}{ax+by}=\frac{ax+by-2by}{ax+by}=\frac{cd-2by}{cd}=1-\frac{2by}{c\cdot 2y}=\frac{c-b}{c}.$$

14. 令 $AB=AC=a$,对四边形 $ABPC$ 应用托勒密定理,有 $a\cdot PB+a\cdot PC=BC\cdot PA$,即有 $\dfrac{PA}{PB+PC}=\dfrac{a}{BC}$.对四边形 $BCAQ$ 应用托勒密定理,有 $QA\cdot BC+a\cdot QB=a\cdot QC$,即$\dfrac{QA}{QC-QB}=\dfrac{a}{BC}$.

15. 对四边形 $ABCD$ 应用托勒密定理,$BC\cdot AD+BD\cdot AC=AB\cdot CD$,即 $BC\cdot\dfrac{AD}{AB}+BD\cdot\dfrac{AC}{AB}=CD$.又$\triangle ABD\backsim\triangle MCP$ 及$\triangle ABC\backsim\triangle MDQ$,有$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{MP}{MC}$,$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{MQ}{MD}$,于是 $BC\cdot\dfrac{MP}{MC}+BD\cdot\dfrac{MQ}{MD}=CD$,注意到 $CD=2MC=2MD$ 即证.

16. 连 EG,FG 和 EF,对四边形 $BFGE$ 应用托勒密定理,有 $BE\cdot FG+BF\cdot EG=BG\cdot EF$,又$\angle FEG=\angle FBG=\angle ADB$,$\angle EFG=\angle EBG$,则$\triangle EFG\backsim\triangle ABD$,有$\dfrac{FG}{AB}=\dfrac{EG}{AD}=\dfrac{EF}{BD}$,令其比值为 t,则 $t\cdot BE\cdot AB+t\cdot BF\cdot AD=t\cdot BG\cdot BD$,消去 t,注意 $AD=BC$ 即证.

17. 作 $DG/\!/AF$ 交$\odot O_1$ 于 G,则 $AG=FD$,$GF=AD$.对四边形 $AGDF$ 应用托勒密定理,$AD\cdot FG=AG\cdot FD+AF\cdot GD$.

由 AD 平分$\angle BAF$,知 $FD=BD$,即 $AG=BD$,由此知 $GB/\!/DA$,有 $GD=AB$.故

$AD^2=FD^2+AF\cdot GD=FD^2+AF\cdot AB$.

同理,有 $AE^2=FE^2+AF\cdot AC$.

此两式相减有 $DA^2-EA^2=DF^2-EF^2$,故 $DE\perp AF$.

18. 在直径 $AB=x>2$ 的圆中,在两个半圆上分别取点 C 和 D,使 $AC=2$,$AD=1$,则 $BC=\sqrt{x^2-4}$,$BD=\sqrt{x^2-1}$.由托勒密定理,有$\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x^2-1}=CD\cdot x$,与原方程比较得 $CD=\sqrt{7}$.在$\triangle ACD$ 中,由余弦定理,有 $\cos\angle CAD=-\dfrac{1}{2}$,则$\angle CAD=120°$,故 $x=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$.

19. 由$(\sqrt{a+x})^2+(\sqrt{b-x})^2=(\sqrt{a+b})^2$,在直径 $AB=\sqrt{a+b}$的圆中,在一半圆上取点 C,使 $AC=\sqrt{a+x}$,$BC=\sqrt{b-x}$;在另一半圆上取中点 D,则 $AD=BD=\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$.连 CD,知 $CD\leqslant AB$,由托勒密定理,有$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\cdot\sqrt{a+x}+\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\cdot\sqrt{b-x}=AB\cdot CD\leqslant(\sqrt{a+b})^2$,即 $y=\sqrt{a+x}+$

$\sqrt{b-x}\leqslant\sqrt{2(a+b)}$.又在$\triangle ABC$中,$AC+BC\geqslant AB$(当$C$与$A$或$B$重合时,取等号),故$\sqrt{a+b}\leqslant y\leqslant\sqrt{2(a+b)}$.

20. 设$x^2+y^2=a^2$,则$0\leqslant a\leqslant 1$.

当$a=0$时,命题显然成立.当$0<a\leqslant 1$时,在直径$AB=a$的一半圆上取点C,使$AC=|x|$,$BC=|y|$,因$(\frac{|x+y|}{\sqrt2})^2+(\frac{|x-y|}{\sqrt2})^2=x^2+y^2=a$,则可在另一半圆上取点$D$,使$BD=\frac{|x+y|}{\sqrt2}$,$AD=\frac{|x-y|}{\sqrt2}$,由托勒密定理,有$|x|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt2}+|y|\cdot\frac{|x-y|}{\sqrt2}=AB\cdot CD\leqslant a^2$,即$|x(x+y)|+|y(x-y)|\leqslant\sqrt2a^2\leqslant\sqrt2$,但$|x^2+2xy-y^2|=|x(x+y)+y(x-y)|\leqslant|x(x+y)|+|y(x-y)|\leqslant\sqrt2$.

21. 设点T在劣弧$\overparen{AB}$上,连AT,BT,CT,分别交小圆于点D,E,F.连DE,EF,FD,过点T作公切线RQ.由$\angle DFT=\angle RTD=\angle RTA=\angle ACT$,有$AC\parallel DF$,有$\frac{AD}{CF}=\frac{AT}{CT}$.又$AM^2=AD\cdot AT$,$CP^2=CF\cdot CT$,有$\frac{AM^2}{CP^2}=\frac{AD}{CF}\cdot\frac{AT}{CT}=\frac{AT^2}{CT^2}$,即$\frac{AM}{CP}=\frac{AT}{CT}$.同理,$\frac{BN}{CP}=\frac{BT}{CT}$.对圆内接四边形$ATBC$应用托勒密定理,有$AT\cdot BC+BT\cdot AC=TC\cdot AB$,而$AB=BC=CA$,则$AT+BT=CT$,故$AM+BN=CP$.

22. 令$BC=a,AC=b,AB=c$.由BE平分$\angle ABC$,有$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$,亦有$\frac{AE}{AC}=\frac{AB}{BC+AB}$,即$AE=\frac{bc}{a+c}$.同理,$AF=\frac{bc}{a+b}$.由$AE\parallel PQ$,$EF\parallel QB$,有$\angle AEF=\angle Q$,从而$\angle AEF=\angle PCB$,注意到$\angle FAE=\angle BPC$,有$\triangle AEF\backsim\triangle PCB$,即$\frac{PB}{PC}=\frac{AF}{AE}=\frac{a+c}{a+b}$,即$PB\cdot b=PC\cdot(a+c)-PB\cdot a$.在圆内接四边形$PABC$中,应用托勒密定理,有$PB\cdot b=PC\cdot c+PA\cdot a$,故$PC\cdot(a+c)-PB\cdot a=PC\cdot c+PA\cdot a$,因此,$PC=PA+PB$.

23. 由$BF\cdot AC=(AF+FC)\cdot AC$,$AF\cdot BC+AB\cdot FC=AF\cdot(BD+CD)+FC(BE-AE)=AF\cdot AC+AF\cdot CD+FC\cdot AC-FC\cdot AE=(AF+FC)\cdot AC+(AF\cdot CD-FC\cdot AE)$,又$AF\cdot CD=FC\cdot AE$,则$BF\cdot AC=AF\cdot BC+AB\cdot FC$,由托勒密定理之逆,知$ABCF$有外接圆.

24. 连EA,ED,由$\angle BAE=\angle ECD$,且$\angle CDE=\angle EAD=\angle ABE$,有$\triangle ABE\backsim\triangle CDE$,亦有$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{CD}$,即$EC\cdot AB=EA\cdot CD$.在圆内接四边形$AEBC$中,应用托勒密定理,有$EA\cdot BC+EB\cdot AC=EC\cdot AB$,于是$\frac{EB\cdot AC}{EC\cdot AB}=1-\frac{EA\cdot BC}{EC\cdot AB}=1-\frac{EA\cdot BC}{EA\cdot CD}=1-\frac{BC}{CD}=\frac{BD}{CD}=\frac{BD^2}{BD\cdot CD}=\frac{BD^2}{DA^2}$.又$\angle ABD=\angle CAD$,$\angle ADB=\angle ADC$,有$\triangle ABD\backsim\triangle CAD$,有$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{AD}$.于是$\frac{EB\cdot AC}{EC\cdot AB}=\frac{AB^2}{AC^2}$,故$\frac{EB}{EC}=\frac{AB^3}{AC^3}$.

习题 B

1. 在弧$\overparen{ADC}$上取点H,使$AH=CD=c$,连HC,HB,令$AC=m$,$BD=n$,$BH=p$,易证$\triangle AHC\cong\triangle CDA$,即$HC=AD=d$.对四边形$ABCD$,$ABCH$分别应用托勒密定理,有$ac+bd=mn$,$ad+bc=pm$.

又在弧$\widehat{BCH}$上取点K,使$BK=CH=d$,由$\triangle CHB\cong\triangle KBH$,有$HK=BC=b$.对四边形$ABKH$应用托勒密定理,有$ab+cd=AK\cdot p$.又由$\widehat{KHA}=\widehat{BCD}$,有$AK=BD=n$.于是$m^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$,$n^2=\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$,由此即求得$AC,BD$.

2. 作$\triangle AGH$的外接圆O_1,分别截AC,AD,AB于点H,Q,G.易证$\triangle BCD\backsim\triangle APE$,即$\dfrac{DC}{PE}=\dfrac{BC}{AP}$,$\dfrac{BD}{AE}=\dfrac{BC}{AP}$,即$DC=\dfrac{PE}{AP}\cdot BC=\dfrac{AK}{AP}\cdot BC$,$BD=\dfrac{AE}{AP}\cdot BC$.对四边形$ABDC$应用托勒密定理,有

$AD\cdot BC=BD\cdot AC+DC\cdot AB=\dfrac{AE}{AP}\cdot BC\cdot AC+\dfrac{AK}{AP}\cdot BC\cdot AB$,故$AP\cdot AD=AE\cdot AC+AK\cdot AB$.(*)

同理,由托勒密定理,有$AP\cdot AQ=AE\cdot AH+AK\cdot AG$.

于是$AP\cdot AQ=AP(AP+PQ)=AP^2+AP\cdot PQ=AE\cdot AH+AK\cdot AG$,

即 $AP^2+PG\cdot PH=AP^2+AP\cdot PQ=AE\cdot AH+AK\cdot AG$,

从而 $AP^2=AE\cdot AH+AK\cdot AG-PG\cdot PH$.

由(*)式减去上式,有$AP(AD-AP)=AE(AC-AH)+AK(AB-AG)+PG\cdot PH$,即

$PA\cdot PD=PK\cdot PI+PE\cdot PF+PG\cdot PH$.

又$EF^2+KI^2\leqslant(\dfrac{PK+PI}{2})^2\leqslant\dfrac{1}{4}KI^2$,$PE\cdot PF\leqslant\dfrac{1}{4}EF^2$,$PG\cdot PH\leqslant\dfrac{1}{4}GH^2$,故$EF+KI^2+GH^2\geqslant 4PA\cdot PD$,其中等号当且仅当$P$为$\triangle ABC$的重心时取得.

3. 设四边形$A_1A_2A_3A_4$内接于以O为圆心,半径为R的圆,设点O在弦$A_1A_3,A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_1$上的射影分别为点$H_0,H_1,H_2,H_3,H_4$.记$h_i=OH_i(i=0,1,\cdots,4)$,$S_1,S_2$与$p_1,p_2$为$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle A_3A_4A_1$的面积与半周长,$r_1,r_2$为它们的内切圆半径.

考虑含点O的三角形,不妨设O在$\triangle A_1A_2A_3$内,分别对四边形$A_3H_0OH_2,A_1H_1OH_0,A_2H_2OH_1$应用托勒密定理,并注意$H_0H_2,H_0H_1,H_1H_2$是$\triangle A_1A_2A_3$的中位线,有$(R+r_1)p_1=R\cdot H_0H_2+R\cdot H_0H_1+R\cdot H_1H_2+S_1=(h_0\cdot H_2A_3+h_2\cdot H_0A_3)+(h_0\cdot H_1A_1+h_1\cdot H_0A)+(h_2\cdot H_1A_2+h_1\cdot H_2A_2)+\dfrac{1}{2}(h_1\cdot A_1A_2+h_2\cdot A_2A_0+h_0\cdot A_3A_1)=(h_1+h_2+h_0)\cdot p_1$,故$R+r_1=h_1+h_2+h_0$.

考虑O在三角形外部的情形,考虑$\triangle A_3A_4A_1$,对四边形$A_1H_4H_0O,A_3H_3H_0O,A_4H_1OH_3$应用托勒密定理,有 $(R+r_2)p_2=R\cdot H_0H_4+R\cdot H_0H_3+R\cdot H_3H_4+S_3=(h_4\cdot H_0A_1-h_0\cdot H_4A_1)+(h_3\cdot H_0A_3-h_0\cdot H_3A_3)+(h_4\cdot H_3A_4-h_3\cdot H_4A_4)+\dfrac{1}{2}(h_3\cdot A_3A_4+h_4\cdot A_4A_1-h_0\cdot A_1A_3)=(h_3+h_4-h_0)\cdot p_2$,故$R+r_2=h_3+h_4-h_0$.

在上述情形下,$r_1+r_2=h_1+h_2+h_3+h_4-2R$.

对一般情形,所求内切圆半径之和等于$h_1,h_2,h_3,h_4,2R$并赋以一定的符号之和,这些符号只与点O相对四边形$A_1A_2A_3A_4$的位置有关.因此,这个和与对角线的选取无关.

4. 设圆C_1的圆心为O,半径为r,连$OA_i,OB_i(i=1,2,\cdots,n)$,在四边形$OA_1B_1B_2$中应用托勒密不等式,有$OA_1\cdot B_1B_2+OO_2\cdot A_1B_1\geqslant OB_1\cdot A_1B_2$,即$r\cdot B_1B_2+\lambda r\cdot A_1B_1\geqslant\lambda r(A_1A_2+A_2B_2)$,故

$B_1B_2+\lambda A_1B_1\geqslant\lambda(A_1A_2+A_2B_2)$.

同理,选用托勒迷不等式,有 $B_2B_3+\lambda' A_2B_2\geqslant\lambda(A_2A_3+A_3B_3)$;$B_3B_4+\lambda\cdot A_3B_3\geqslant\lambda(A_3A_4+A_4B_4)$;…;$B_{n-1}B_n+\lambda\cdot A_{n-1}B_{n-1}\geqslant\lambda(A_{n-1}A_n+A_nB_n)$,$B_nB_1+\lambda A_nB_n\geqslant\lambda(A_nA_1+A_1B_1)$.

将上述几个同向不等式相加,得 $B_1B_2+B_2B_3+\cdots+B_{n-1}B_n+B_nB_1\geqslant\lambda(A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1)$,故 $p_2\geqslant\lambda p_1$.由托勒迷不等式中等号成立的条件是当且仅当四边形 $OA_1B_1B_2$,$OA_2B_2B_3$,…,$OA_nB_nB_1$,都是圆内接四边形,由圆内接四边形性质,知$\angle OA_2A_3=\angle OB_2B_3$,$\angle OA_2A_1=\angle OB_3B_2$,但$\angle OB_2B_3=\angle OB_3O_2$,则$\angle OA_2A_1=\angle OA_2A_3$,从而$\triangle OA_1A_2\cong\triangle OA_2A_3$,因此,$A_1A_2=A_2A_3$.同理,$A_2A_3=A_3A_4=\cdots=A_nA_1$,即 n 边形$A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形.

反之,若 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形,将其绕点 O 逆时针方向旋转$\frac{2\pi}{n}$,知 $A_1\to A_2$,$A_2\to A_3$,…,$A_n\to A_1$,从而 $B_1\to B_2$,$B_2\to B_3$,…,$B_n\to B_1$.于是知 $B_1B_2\cdots B_n$ 也是正 n 边形,因此有 $A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_nA_1=2r\cdot\sin\frac{\pi}{n}$,$B_1B_2=B_2B_3=\cdots=B_nB_1=2\lambda r\cdot\sin\frac{\pi}{n}$.此时有 $p_2=\lambda p_1$.

5. 作$\odot O_1$,$\odot O$ 的公共直径 GMK,其中 GM 是$\odot O_1$ 的直径,GK 是$\odot O$ 的直径,连 CG 交$\odot O_1$ 于点 N.显然 $MN/\!/KC$,于是$\frac{CN}{CG}=\frac{KM}{KG}$,$f^2=CN\cdot CG=CG^2\cdot\frac{CN}{CG}=CG^2\cdot\frac{KM}{KG}$,即 $f=CG\cdot\sqrt{\frac{KM}{KG}}$.同理,$d=AG\cdot\sqrt{\frac{KM}{KG}}$,$e=BG\cdot\sqrt{\frac{KM}{KG}}$.在 $ABGC$ 中应用托勒迷定理,有 $b\cdot BG+c\cdot CG=a\cdot AG$.此式两边同乘以$\sqrt{\frac{KM}{KG}}$,即可得 $bd+ce=af$.

6. 首先证 $EF=GH$,$MN=PQ$.由切线长定理,有$(AC-BC)+(BD-DA)=(AF-BF)+(BE-AE)=(AF-AE)+(BE-BF)=2EF$,$(AC-DA)+(BD-BC)=(CH-DH)+(DG-CG)=(CH-CG)+(DG-DH)=2GH$,而$(AC-B)+(BD-DA)=(AC-DA)+(BD-BC)$,故 $EF=GH$.同理 $MN=PQ$.

连 O_1A,O_1E,O_3C,O_3G,由$\angle BAD$ 与$\angle BCD$ 互补,知$\angle O_1AE$ 与$\angle O_3CG$ 互余,有$\angle O_1AE=90°-\angle O_3CG=\angle CO_3G$,即$\triangle O_1AE\backsim\triangle CO_3G$.于是 $AE\cdot CG=O_1E\cdot O_3G=R_1\cdot R_3$.同理,$BM\cdot DP=R_2\cdot R_4$.

令 $AE=AQ=a$,$BM=BF=b$,$CG=CN=c$,$DP=DH=d$,$EF=GH=m$,$MN=PQ=n$.于是,$AB=a+b+m$,$CD=c+d+m$,$BC=b+c+n$,$DA=d+a+n$,$AC=AF+CM=(a+m)+(c+n)$,$BD=BE+DQ=(b+m)+(d+n)$.对 $ABCD$ 应用托勒迷定理,有 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot DA$,即$(a+c+m+n)\cdot(b+d+m+n)=(a+b+m)(c+d+m)+(b+c+n)(d+a+n)$,亦即 $mn=ac+bd$.即证.

7. 设$\angle BAN=\angle NAC=\alpha$,对 AB,AN,AC 应用三弦定理,则有 $AN\cdot 2\cos\alpha=AB+AC$,因 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABL}+S_{\triangle ACL}=\frac{1}{2}AL\cdot\sin\alpha\cdot(AB+AC)$,则 $S_{\triangle ABC}=AN\cdot AL\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha$.又在 Rt$\triangle ALK$ 中,$AL\cdot\cos\alpha=AK$,则 $S_{\triangle ABC}=AN\cdot AK\cdot\sin\alpha=2S_{\triangle ANK}$.又易知 $AK=AM$,即$\triangle ANK\cong\triangle ANM$,于是 $S_{\triangle ANK}=S_{\triangle ANM}=\frac{1}{2}S_{四边形AKNM}$,即证.

8. 必要性：连 OB, OC，知 $\triangle EAB$, $\triangle FAC$ 均为等腰三角形，且 $\angle BPC = \angle AEP + \angle CFD = 2(\angle BAD + \angle CAD) = 2\angle BAC = \angle BOC$，知 B, C, P, O 共圆，由托勒密定理，有 $PB \cdot OC = PC \cdot OB + PO \cdot BC$，由 $PB = PC + PO$ 得 $OC = BC$，即 $\triangle OBC$ 为正三角形，推得 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = 30°$.

充分性：由 $\angle BAC = 30°$，知 $\triangle OBC$ 为正三角形，且由 $\angle BPC = \angle BOC$ 知 B, C, P, O 共圆. 由托勒密定理，有 $PB \cdot OC = PC \cdot OB + PO \cdot BC$，及 $OC = OB = BC$，即得 $PB = PC + PO$.

9. 对四边形 ACA_1B 应用托勒密定理，有 $AA_1 \cdot BC = AB \cdot A_1C + AC \cdot A_1B$，令 $A_1B = A_1C = x$，注意 $2x = A_1B + A_1C > BC$，有 $2AA_1 = 2\frac{ABx + A_1C}{BC} = (AB + AC) \cdot \frac{2x}{BC} > AB + AC$，即 $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC)$. 同理，$BB_1 > \frac{1}{2}(BA + BC)$, $CC_1 > \frac{1}{2}(CA + CB)$，此三式相加即证.

10. 令 $AC = a$, $CE = b$, $AE = c$. 对四边形 $ACEF$ 应用托勒密不等式，有 $AC \cdot EF + CE \cdot AF \geqslant AE \cdot CF$，注意 $EF = AF$，有 $\frac{FA}{FC} \geqslant \frac{c}{a+b}$. 同理，$\frac{DE}{DA} \geqslant \frac{b}{c+a}$, $\frac{BC}{BE} \geqslant \frac{a}{b+c}$.

令 $x = a + b$, $y = c + a$, $z = b + c$，有 $\frac{1}{2}\left(\frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geqslant \frac{3}{2}$，即知 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$,(*) 故 $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2}$，其中等号成立，即要(*)式中等号成立，亦即每次应用托勒密不等式中等号也成立. 从而 $ACEF$, $ABCE$, $ACDE$ 都是圆内接四边形，即 $ABCDEF$ 为圆内接六边形且 $a = b = c$ 成立. 即为正六边形时成立.

11. 连 AE 交 BZ 于 M，连 ZE, ZC. 对 $\triangle AXE$ 及截线 BYM 应用梅涅劳斯定理，有 $\frac{EB}{BX} \cdot \frac{XY}{YA} \cdot \frac{AM}{ME} = 1$，即 $\frac{BX}{EB} = \frac{AM}{ME}$. 令 $\angle ABC = \angle EBC = \theta$，有 $\frac{BX}{EB} = \frac{BX}{AB} = \cos 2\theta$，即 $\frac{AM}{ME} = \cos 2\theta$.

对四边形 $ABEZ$ 应用托勒密定理，有 $AZ \cdot BE + AB \cdot EZ = AE \cdot BZ$.(*) 注意 $AE = 2AB\sin\theta = 2BE\sin\theta$ 及 $\angle AZM = \angle EZM$，有 $\frac{AZ}{EZ} = \frac{AM}{ME} = \cos 2\theta$，(*)式变为 $\frac{AZ}{BZ} = \frac{2\sin\theta \cdot \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$.

由 $\angle ABC = \theta$，有 $\angle CAD = \theta$, $\angle ADC = 90° - 2\theta$，有 $\frac{AC}{CD} = \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$，注意 $AC = BC\sin\theta$，有 $\frac{AC}{BD} = \frac{2\sin\theta \cdot \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$，即 $\frac{AC}{BD} = \frac{AZ}{BZ}$，亦即 $\frac{AC}{AZ} = \frac{BD}{BZ}$，再由 $\angle ZBD = \angle CAZ$ 知 $\triangle ZBD \backsim \triangle ZAC$，有 $\angle ZCA = \angle ZDB$. 又 $\angle ZCA = \angle ABZ = \angle ZAD$，所以 $\angle ZAD = \angle ZDC$. 即证.

12. 设 P 在 $\overparen{BD}$ 内部，取 $\overparen{AB}$, $\overparen{AC}$ 中点 M, N，可证 P, E, M; P, F, N 分别共线，由 $ME = AM = AN = NF$，可证 $\triangle DME \cong \triangle DNF$ 及 $\angle EPF = 60° = \angle EDF$，知 P, D, F, E 共圆，在此圆中应用托勒密定理，有 $PD \cdot EF + PE \cdot DF = PF \cdot DE$. 再由 $\triangle DEF$ 为正三角形即证得 $PD + PE = PF$，若 P 在 $\overparen{DC}$ 上有 $PD + PF = PE$. 即证.

13. 设 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 顶点 A, B, C 所对边长. 下证所求最小值当 P 为重心 G 时取到，且最小值为

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{9}[(2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2c^2 + 2a^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2)] = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

设 Γ 是过 B,G,C 的圆，中线 AL 交 Γ 于 G（在 $\triangle ABC$ 内）和 K，令 $\angle BGK=\theta,\angle AGN=\varphi$，$\angle BGN=\delta$（$N$ 为 AB 中点）．由 L 为 BC 中点，知 B,C 到 GL 的距离相等．即 $BG\cdot\sin\theta=CG\sin\varphi$，故 $\frac{BC}{\sin\varphi}=\frac{CG}{\sin\varphi}$．同理，$\frac{AG}{\sin\delta}=\frac{BG}{\sin\varphi}$．设 R 为圆 Γ 的半径，则 $BK=2R\cdot\sin\theta$，$CK=2R\cdot\sin\varphi$，$BC=2R\cdot\sin\delta$，即 $\frac{AG}{BC}=\frac{BG}{CK}=\frac{CG}{BK}$．（*） 又设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点，由托勒迷不等式，有 $PK\cdot BC\leqslant BP\cdot CK+CP\cdot BK$，等号当且仅当 P 在圆 Γ 上成立．由（*）式，有 $PK\cdot AG\leqslant BP\cdot BG+CP\cdot CG$．两边同加 $AP\cdot AG$ 得 $(AP+PK)\cdot AG\leqslant AP\cdot AG+BP\cdot BG+GP\cdot CG$，而 $AK\leqslant AP+PK$，则 $AK\cdot AG\leqslant AP\cdot AG+BP\cdot BG+CP\cdot CG$，等号当且仅当 P 在线段 AK 上，且 P 在圆 Γ 上成立，即等号当且仅当 P 与 G 重合时成立．

14．充分性：由于 $(b_2c_1-b_1c_2)(c_jc_3-b_3c_j)+(b_3c_2-b_2c_3)(b_jc_1-b_1c_j)=(b_jc_2-b_2c_j)(b_3c_1-b_1c_3)$，故 $A_1A_2\cdot A_3A_j+A_2A_3\cdot A_1A_j=A_2A_jA_1A_3\ (4\leqslant j\leqslant n)$，应用托勒迷定理的逆定理，知 A_1,A_2,A_3,A_j 四点共圆 $(4\leqslant j\leqslant n)$．从而点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圆上，即 $A_1A_2\cdots A_n$ 为圆内接多边形．必要性：以圆内接多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆为单位圆建立复平面．设 $A_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 对应的复数为 $e_j^{i\theta}$，其中 $0=\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<2\pi$，令 $b_j=\sqrt{2}\sin\frac{\theta_j}{2}$，$c_j=\sqrt{2}\cos\frac{\theta_j}{2}$，则对对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有 $|A_iA_j|=|e^{\theta_i}-e^{\theta_j}|=2|\sin\frac{\theta_i-\theta_j}{2}|\cdot|\sin\frac{\theta_i+\theta_j}{2}-i\cos\frac{\theta_i+\theta_j}{2}|=2\sin\frac{\theta_j-\theta_i}{2}=b_jc_i-b_ic_j$．综上即证．

第四章 斯特瓦尔特定理及应用

习题 A

1．因 $AB=AC$，由斯特瓦尔特定理推论 1，有 $AP_i^2=AB^2-BP_i\cdot P_iC$，则 $AP_i^2+BP_i\cdot P_iC=AB^2$，即 $m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC=AB^2=4$，即 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}=4\cdot 100=400$．

2．由 CD 平分 $\angle ACB$，由斯特瓦尔特定理推论 3，知 $CD^2=CA\cdot CB-AD\cdot DB<CA\cdot CB$，故 $CD<\sqrt{CA\cdot CB}$．

3．由斯特瓦尔特定理，有 $AD^2=AB^2\cdot\frac{CD}{BC}+AC^2\cdot\frac{BD}{BC}-BD\cdot DC$．设 $DC=x$，则 $BC=5+x$，则 $12^2=13^2\cdot\frac{x}{5+x}+15^2\cdot\frac{5}{5+x}-5x$，解得 $x_1=9$（舍去 $x_2=-9$）．

4．由斯特瓦尔特定理，有 $PA^2=AB\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{PB}{BC}-PB\cdot BC=(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{PC}{2}+(\sqrt{2})^2\cdot\frac{PB}{2}-PB\cdot PC=4PC+PB-PB\cdot PC$，$\therefore PA^2-PB\cdot PC=4PC+PB-2PB\cdot PC$，又 $PB=2-PC$，则 $PA^2-PB\cdot PC=4PC+2-PC-2(2-PC)\cdot PC=2PC^2-PC+2=2(PC-\frac{1}{4})^2+\frac{15}{8}>0$，故选(C)．

5．由 $AD:DC=2:1$，由斯特瓦尔特定理推论 5，有 $BD^2=\frac{1}{3}AB^2+\frac{2}{3}BC^2-\frac{2}{9}AC^2$．

由 $\angle C=45^\circ$，$\angle ADB=60^\circ$，及 $\frac{BD}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，有 $3BD^2=2BC^2$．

又由 $AD:DC=2:1$，有 $AC^2=\frac{3}{2}AD\cdot AC$．

于是有 $AB^2=AD\cdot AC$,由切割线定理即证.

6. 设 P 为$\triangle ABC$ 的 BC 所在直线上任一点,且 $BP:BC=\lambda:1$,由斯特瓦尔特定理推论 5,有

$AP^2=\lambda(\lambda-1)a^2+\lambda b^2+(1-\lambda)c^2$.

当 $\lambda=\frac{1}{2}$时,$AP=m_a$ 即得(Ⅰ);

当 $\lambda=\frac{c}{b+c}$时,$AP=t_a$,即得(Ⅱ);

当 $\lambda=\frac{1}{|b-c|}$时,$AP=t'_a$,即得(Ⅲ);

当 $\lambda=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a^2}$时,$AP=h_a$,即得(Ⅳ).

7. 作$\angle B$ 的平分线交 AC 于 D,则$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=2$,对 ABC 及 AC 边上点 D 应用斯特瓦尔特定理推论 3,有 $BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$,即$(2DC)^2=2BC^2-2DC^2$,即 $DC^2=\frac{1}{3}BC^2$,又 $AC^2=(AD+DC)^2=9DC^2=3BD^2$,从而 $AC^2+BC^2=4BC^2=AB^2$,故$\triangle ABC$ 为直角三角形.

8. 设 G 为三条中线 AD,BE,CF 的交点,P 为$\triangle ABC$ 所在平面上任一点.不妨设 P 在$\triangle ABC$ 内,连 PA,PB,PC,PD,PG,对$\triangle APD$ 及点 G 应用斯特瓦尔特定理,有 $PA^2\cdot DG+PD^2\cdot AG=PG^2\cdot AD+AG\cdot GD\cdot AD$.

由 $DG=\frac{1}{2}AG,AD=\frac{3}{2}AG$,则 $3PG^2=PA^2+2PD^2-\frac{3}{2}AG^2$. ①

在$\triangle PBC$ 和$\triangle GBC$ 中,D 为 BC 中点,应用斯特瓦尔特定理推论 2,则 $PD^2=\frac{1}{2}PB^2+\frac{1}{2}PC^2-\frac{1}{4}BC^2$,$GD^2=\frac{1}{2}GB^2+\frac{1}{2}GC^2-\frac{1}{4}BC^2$,此两式相减,并注意 $GD=\frac{1}{2}AG$,得 $PD^2=\frac{1}{2}(PB^2+PC^2)-\frac{1}{2}(GB^2+GC^2)+\frac{1}{4}AG^2$,代入①式,得 $3PG^2=(PA^2+PB^2+PC^2)-(GA^2+GB^2+GC^2)$.显然,当 P 异于 G 时,恒有 $PA^2+PB^2+PC^2>GA^2+GB^2+GC^2$.故到三角形三顶点距离的平方和为最小的点是三角形的重心.

习题 B

1. 设⊙O 的半径为 r,连 OA,OB,OC,对$\triangle OAC$ 及 AC 边上的点 B,应用斯特瓦尔特定理,有 $OA^2\cdot BC+OC^2\cdot AB=OB^2\cdot AC+AB\cdot BC\cdot AC$,而 $OA^2=r^2+a,OB^2=r^2+b,OC^2=r^2+c$,于是

$(r^2+a)\cdot BC+(r^2+c)\cdot AB=(r^2+b)\cdot AC+AB\cdot BC\cdot AC$,化简即得结论.

2. 对$\triangle ABC$ 及 BC 边上的点 M,应用斯特瓦尔定理推论 1,有 $AM^2=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2)$,$BN=\frac{BM}{\cos\angle A}=\frac{BC}{2\cos\angle A}$.又 $AN^2=AB^2+BN^2-2AB\cdot BN\cdot\cos\angle ABN=AB^2+\frac{BC^2}{4\cos^2\angle A}+AB\cdot BC\cdot\frac{\cos\angle C}{\cos\angle A}$ $(\cos\angle ABN=-\cos\angle C)$,于是 $AN^2\cdot\cos^2\angle A=AB^2\cdot\cos^2\angle A+\frac{1}{4}BC^2+AB\cdot BC\cdot\cos\angle C\cdot\cos\angle A$.而

$\cos\angle A\cdot\cos\angle C=\cos(\angle A+\angle C)+\sin\angle A\cdot\sin\angle C=\sin\angle A\cdot\sin\angle C-\sin\angle B$,则 $AN^2\cdot\cos^2\angle A=AB^2\cdot\cos^2\angle A+\frac{1}{4}BC^2+AB\cdot BC\cdot\sin\angle A\cdot\sin\angle C-AB\cdot BC\cdot\cos\angle A=AB^2\cdot(\cos^2\angle A+\sin^2\angle A)+\frac{1}{4}BC^2-\frac{1}{2}\cdot(AB^2+BC^2-AC^2)=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2)\cdot AM^2$(其中 $BC\cdot\sin\angle C=AB\cdot\sin\angle A$),即$\frac{AM}{AN}=\cos\angle A=\frac{CM}{CN}$,$\frac{AN}{CN}=\frac{\sin(180°-\angle A-\angle C)}{\sin\angle CAN}$,又 $BM=CM$,且$\frac{AM}{BM}=\frac{\sin\angle B}{\sin\angle BAM}$,故 $\sin\angle BAM=\sin\angle CAN$,即证.

另证:设 AN 交圆于 D,连 BD,CD,对四边形 $ABDC$ 应用托勒迷定理,有 $AD\cdot BC=AC\cdot BD+AB\cdot CD$,由$\triangle ACN\backsim\triangle CDN$,$\triangle ABN\backsim\triangle BDN$,有$\frac{AC}{CD}=\frac{AN}{CN}$,$\frac{AB}{BD}=\frac{AN}{BN}$,而 $BN=CN$,则 $AC\cdot BD=AB\cdot CD$.注意到 $BD=2BM$,有 $2AD\cdot BM=2AB\cdot CD$,即$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BM}$,又$\angle ABM=\angle ADC$,从而$\triangle ADC\backsim\triangle ABM$,故$\angle NAC=\angle BAM$.

3. 由 $PT_1=PT_2$ 及 $PT_1\cdot PS_1=PT_2\cdot PS_2$,有 $PS_1=PS_2$,从而 $T_1T_2/\!/S_1S_2$,即$\frac{PS_1}{PS}=\frac{PT_1}{PT}$,而 $PT_1\cdot PS_1=PQ\cdot PR$,则 $PS_1^2=\frac{PS}{PT}\cdot PQ\cdot PR$,对$\triangle S_1PS_2$ 及 S_1S_2 边上的点 S 应用斯特瓦尔特定理推论 1,有 $PS^2=PS_1^2-S_1S\cdot SS_2$,又在$\odot O$ 中,$S_1S\cdot SS_2=RS\cdot SQ=(PR-PS)(PS-PQ)$,故 $PS^2=\frac{PS}{PT}\cdot PQ\cdot PR-(PR-PS)(PS-PQ)$,故$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}=\frac{1}{PS}+\frac{1}{PT}$.

4. 对$\triangle BCD$ 及 BD 边上的点 E,应用斯特瓦尔特定理或其推论 1,有 $CE^2=4^2\cdot\frac{BE}{BD}+4^2\cdot\frac{DE}{BD}-BE\cdot DE=16\cdot\frac{BE+DE}{BD}-BE\cdot DE=16-BE\cdot DE=16-AE\cdot CE=16-6CE$.解得 $CE=2$(负值舍去).于是 $BE\cdot DE=CE\cdot AE=12$,而 $BD<BC+CD=8$,即 $BE=3$,$DE=4$ 或 $BE=4$,$DE=3$,故 $BD=7$.

5. 由 $BE:CE=2$,对$\triangle BCP$ 及 BC 边上的点 E,应用斯特瓦尔特定理的推论 5,有 $PE^2=\frac{1}{3}PB^2+\frac{2}{3}PC^2-2$.对$\triangle BCD$ 及 BD 边上点 P 应用推论 1,有 $PC^2=BC^2-BP\cdot PD=9+PB^2-3\sqrt{2}PB$,于是 $PE^2=PB^2-2\sqrt{2}PB+4$,故 $PE+PC=\sqrt{(PB-\sqrt{2})^2+(0-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(PB-\frac{3}{2}\sqrt{2})^2+(0+\frac{3}{2}\sqrt{2})^2}$.

令 $PB=x$,上式表示 x 轴上动点 $Q(x,0)$到两定点 $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$,$B(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2})$的距离之和,当 Q 为线段 AB 与 x 轴交点$(\frac{6}{5}\sqrt{2},0)$时,即 $PB=\frac{6}{5}\sqrt{2}$时,$PE+PC$ 取最小值$\sqrt{13}$.

6. 设凸四边形 $ABCD$ 的对角线交点为 E.令 $AB=a$,$BC=b$,$CD=c$,$DA=d$,$AC=e$,$BD=f$,$AE=g$,$BE=h$,$CE=k$,$DE=l$.不妨设 $h\leqslant l$,则在$\triangle ABC$ 中,有 $\min\{a^2,b^2\}\leqslant\frac{a^2k+bg}{k+g}=kg+h^2$(斯特瓦尔特定理)$\leqslant(\frac{k+g}{2})^2+(\frac{h+l}{2})^2=\frac{1}{4}(e^2+f^2)$,于是 $2\min\{a,b,c,d\}\leqslant 2\min\{a,b\}=\sqrt{4\min\{a^2,b^2\}}\leqslant\sqrt{e^2+f^2}$,当且仅当 $a=b$,$g=k$,$h=l$,$\min\{a,b\}\leqslant\min\{c,d\}$时等号成立,即 $ABCD$ 为菱形.

7. 由于四个结论都与内心 I 有关，不妨设 AD 平分$\angle A$ 交 BC 于 D，显然 I 在 AD 上. 设 P 为$\triangle ABC$ 所在平面内任一点，连 PB,PD,PC,PI，注意到 $BD=\frac{ac}{b+c}$，$CD=\frac{ab}{b+c}$，对$\triangle PBC$ 及 BC 边上点 D 应用斯特瓦尔特定理，有 $PD^2=\frac{b}{b+c}\cdot PB^2+\frac{c}{b+c}\cdot PC^2-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$.

又$\frac{AI}{ID}=\frac{c}{BD}=\frac{b}{CD}=\frac{b+c}{a}$，有 $AI=\frac{b+c}{2p}AD$，$ID=\frac{a}{2p}AD$，而 $AD^2=\frac{4bcp}{(b+c)^2}(p-a)$，对$\triangle PAD$ 及 AD 边上点 I 应用斯特瓦尔特定理，有 $PI^2=\frac{b+c}{2p}\cdot PD^2+\frac{a}{2p}\cdot PA^2-\frac{abc(p-a)}{p(b+c)}$. 将 PD^2 表达式代入上式，得 $PI^2=\frac{a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2-abc}{a+b+c}$.　①

(Ⅰ)当 P 与 I 重合时，由①式即证.

(Ⅱ)当 P 为外心 O 时，$PA=PB=PC=R$，由①式即证.

(Ⅲ)当 P 为重心 G 时，$PA^2=GA^2=\frac{4}{9}m_a^2=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a)$，等等. 由①式即证.

(Ⅳ)当 P 为垂心 H 时，$PA^2=HA^2=a^2\cdot\cot^2\angle A=a^2(\csc^2\angle A-1)=4R^2-a^2$，等等. 由①式即证.

8. 设 CD 的中点为 H，则 $ABEH$ 是平行四边形，延长 BC 至 G，使 $CG=CA$. 设 $BD=DH=HC=\frac{a}{3}$，$CA=b$，$AB=c$，$BE=AH=x$，$AD=DE=y$，$CE=z$. 由 $2\angle ABC=\angle ACB=\angle CGA+\angle CAG=2\angle CGA=2\angle CAG$，则$\triangle ABG\backsim\triangle CAG$. 于是有$\frac{AB}{BG}=\frac{CA}{AG}$或 $c^2=b(a+b)$.　①

在$\triangle ACD$，$\triangle ABH$，$\triangle CDE$ 中分别应用斯特瓦尔特定理推论 2，得 $b^2+y^2=2x^2+\frac{2}{9}a^2$，$x^2+c^2=2y^2+\frac{2}{9}a^2$，$y^2+z^2=2c^2+\frac{2}{9}a^2$. 从前两式中消去 y，有 $x^2+c^2+2b^2=4x^2+\frac{2}{3}a^2$，将①式代入得 $x^2=(b+\frac{2}{3}a)(b-\frac{a}{3})$. 再求得 $z=b+\frac{2}{3}a$，故有 $x^2=z(z-a)$或 $BE^2=CE(CE-BC)=CE\cdot EP$. 这里 P 是 CE 上一点，且满足 $CP=BC$. 故$\frac{BE}{CE}=\frac{EP}{BE}$，又$\angle BEP=\angle CEB$，知$\triangle BEP\backsim\triangle CEB$，从而$\angle ECB=\angle EBP=\angle EBC-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ECB)$. 故$\angle ECB+180^\circ=2\angle EBC$.

第五章　张角定理及应用

习题 A

1. 延长 AM 交 DC 延长线于 F，过 F 作 $FG/\!/BC$ 交 AB 延长线于 G，则 $BG=a$，$GF=b$. 以 D 为视点，对 A,E,F 应用张角定理，有$\frac{\sin 90^\circ}{DE}=\frac{\sin\alpha}{DF}+\frac{\sin\beta}{DA}$，即$\frac{1}{DE}=\frac{\sin\alpha}{2a}+\frac{\sin\beta}{b}$. 又在 Rt$\triangle ADF$ 中，$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{4a^2+b^2}}$，$\sin\beta=\frac{2a}{\sqrt{4a^2+b^2}}$. 于是，求得 $DE=\frac{2ab\sqrt{4a^2+b^2}}{4a^2+b^2}$.

2. 显然 AD 是$\angle A$ 的平分线，以 A 为视点，对 C,D,B 和 C,M,K 分别应用张角定理的推论，有

$\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle A}{AD}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$，$\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle A}{AM}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AK}$. 注意到 $AB=AC$，$AM=\frac{1}{2}AD$，则 $\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle A}{AD}=\frac{2}{AB}$，$\frac{4\cos\frac{1}{2}\angle A}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AK}$，故 $AB=3AK$.

3. 过 E 作 AB 的平行线交 AC 于 G，交 BD 于 H，则 $GE=m$，$EH=n$. 以 A 为视点，对 B,E,C 应用张角定理，有 $\frac{\sin 90°}{AE}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}$，即 $\frac{1}{AE}=\frac{\sin\alpha}{p}+\frac{\sin\beta}{m+n}$. 而 $\sin\alpha=\frac{r}{EA}$，$\sin\beta=\frac{m}{AE}$，即有 $\frac{r}{p}=1-\frac{m}{m+n}$. 又以 B 为视点，对 A,E,D 应用张角定理，有 $\frac{r}{q}=1-\frac{n}{m+n}$.

由上面得到的两式相加，得 $\frac{r}{p}+\frac{r}{q}=1$ 即证.

4. 令 $\angle BPN=\alpha$，$\angle APM=\beta$，以 P 为视点，分别对 B,N,C 及 A,M,D 应用张角定理，有 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PN}=\frac{\sin\beta}{PB}+\frac{\sin\alpha}{PC}$，$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PM}=\frac{\sin\beta}{PD}+\frac{\sin\alpha}{PA}$.

上述两式相除，有 $\frac{PM}{PN}=\frac{(PB\cdot\sin\alpha+PC\cdot\sin\beta)\cdot PA\cdot PD}{(PD\cdot\sin\alpha+PA\cdot\sin\beta)\cdot PB\cdot PC}$. ①

在 $\triangle PBA$ 和 $\triangle PDC$ 中，由正弦定理，有 $PB\cdot\sin\alpha=PA\cdot\sin\beta$，$PD\cdot\sin\alpha=PC\cdot\sin\beta$，又 $\triangle PAB\backsim\triangle PCD$，有 $PA\cdot PD=PB\cdot PC$，从而由①式即得 $PM=PN$.

5. 令 $\angle POA=\angle POB=\alpha$，以 O 为视点，分别对 B,P,A 及 D,P,C 三点，应用张角定理的推论，有 $\frac{2\cos\alpha}{OP}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}$，$\frac{2\cos\alpha}{OP}=\frac{1}{OC}+\frac{1}{OD}$. 上述两式相减，有 $\frac{1}{OA}-\frac{1}{OC}=\frac{1}{OD}-\frac{1}{OB}$. 由此即证.

6. 以 A 为视点，分别对 $\triangle ABN$ 和 $\triangle ADG$ 应用张角定理，有 $\frac{\sin\angle BAN}{AL}=\frac{\sin\angle LAN}{AB}+\frac{\sin\angle BAL}{AN}$，$\frac{\sin\angle DAG}{AN}=\frac{\sin\angle GAN}{AD}+\frac{\sin\angle DAN}{AG}$. 注意到 $\angle BAL=\angle NAL=\angle GAN=60°$，上述两式变为

$AN\cdot AL+a\cdot AL=a\cdot AN$，$c\cdot AN+b\cdot AN=bc$，由此解得 $AL=\frac{abc}{ab+bc+ac}$.

7. 设 GH 交 AC 于 E，交 BD 于 F，由蝴蝶定理知 $ME=MF$. 以 M 为视点，分别对 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BMD$ 应用张角定理，有 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ME}=\frac{\sin\alpha}{MC}+\frac{\sin\beta}{MA}$，$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MF}=\frac{\sin\alpha}{MD}+\frac{\sin\beta}{MB}$，即 $\frac{\sin\alpha}{MC}+\frac{\sin\beta}{MA}=\frac{\sin\alpha}{MD}+\frac{\sin\beta}{MB}$，亦即 $\sin\alpha(\frac{1}{MD}-\frac{1}{MC})=\sin\beta(\frac{1}{MA}-\frac{1}{MB})$. 而 $MA\cdot MB=MC\cdot MD$，即 $\sin\alpha(MC-MD)=\sin\beta(MB-MA)$. 由此即证.

8. 设 $CD=3$，则 $CP=1$. 考虑 BQ，QP 对 C 的视角，令 $\angle DCA=\alpha$，$\angle ACB=\beta$.

在 $\triangle ABC$ 中应用正弦定理，有 $CB=\frac{3\sin\alpha}{\sin\beta}$，$CA=\frac{3\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$，$CQ=\frac{3\sin(\alpha+\beta)}{4\sin\beta}$，从而 $\frac{\sin\angle BCP}{CQ}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\frac{3\sin(\alpha+\beta)}{4\sin\beta}}=\frac{4\sin\beta}{3}$.

$$\frac{\sin\angle PCQ}{CB}+\frac{\sin\angle QCB}{CP}=\frac{\sin\alpha}{\frac{3\sin\alpha}{\sin\beta}}+\frac{\sin\beta}{1}=\frac{4\sin\beta}{3}.$$

故 $\frac{\sin\angle BCP}{CQ}=\frac{\sin\angle PCQ}{CB}+\frac{\sin\angle QCB}{CP}$.由张角定理,知 B,Q,P 三点共线.

习题 B

1. 令 $KA=a,KB=b,KC=c,KD=d,KF=f,KG=g,KL=l,\angle DKC=\alpha,\angle CKG=\beta$,以 K 为视点,分别对 $A,B,L;D,C,L;D,B,F;A,C,G$ 应用张角定理,有 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{b}=\frac{\sin\alpha}{l}+\frac{\sin\beta}{a}$,① $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{c}=\frac{\sin\alpha}{l}+\frac{\sin\beta}{d}$,② $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{b}=\frac{\sin\alpha}{f}+\frac{\sin\beta}{d}$,③ $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{c}=\frac{\sin\alpha}{g}+\frac{\sin\beta}{a}$,④ 由①+②-③-④,得 $0=\frac{2\sin\alpha}{l}-\frac{\sin\alpha}{f}-\frac{\sin\alpha}{g}$,即 $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}=\frac{2}{l}$.即证.

2. 以 B 为视点,对 C,D,A 应用张角定理的推论,有 $\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle B}{BD}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AB}>\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}$(因 $AC>AB$).

以 C 为视点,对 A,E,B 应用张角定理的推论,有 $\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle C}{CE}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}$.将此式代入前式,得 $\frac{\cos\frac{1}{2}\angle B}{BD}>\frac{\cos\frac{1}{2}\angle C}{CE}$.又由 $AC>AB$,知 $\angle B>\angle C$,而 $0<\angle C<\angle B<\frac{1}{2}\pi$,则 $0<\frac{1}{2}\angle C<\frac{1}{2}\angle B<\frac{\pi}{4}$,又 $\cos x$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 为减函数,则 $\cos\frac{1}{2}\angle C>\cos\frac{1}{2}\angle B>0$,于是有 $CE>BD$.

3. 设 $OD=O'D=O'E=r$,则 $OO'=\sqrt{2}r$,且 $\angle O'OD=45°$,O,O',F 三点共线.又设 $OA=OF=R$,由 $OO'=R-r=\sqrt{2}r$,知 $r=\frac{R}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)R$,于是 $\frac{\sin\angle AOF}{OE}=\frac{\sin135°}{(\sqrt{2}-1)R}=\frac{2+\sqrt{2}}{2R}$,$\frac{\sin\angle AOE}{OF}+\frac{\sin\angle EOF}{OA}=\frac{\sin90°}{R}+\frac{\sin45°}{R}=\frac{2+\sqrt{2}}{2R}$,即有 $\frac{\sin\angle AOF}{OE}=\frac{\sin\angle AOE}{OF}+\frac{\sin\angle EOF}{OA}$,故由张角定理,知 A,E,F 三点共线.

4. 设 O_1O_2 的延长线分别与 AC,BC 交于 M,N,连 CO_1,DO_1,DO_2.由 $\mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle CBD$,有 $\frac{DO_1}{DO_2}=\frac{AC}{BC}$.又 $\angle O_1DO_2=90°$,知 $\triangle O_1DO_2\backsim\triangle ACB$,有 $\angle O_2O_1D=\angle BAC$,则 O_1,M,A,D 共圆,可推知 $\triangle CMO_1\cong\triangle CDO_1$,故 $CM=CD$.同理,$CD=CN$.令 $\angle BCD=\alpha$,则 $\angle ACD=90°-\alpha$,有

$$\frac{\sin90°}{CK}=\frac{\sin\alpha}{CM}+\frac{\sin(90°-\alpha)}{CN}.$$

而 $\sin\alpha=\frac{CD}{BC}$,$\cos\alpha=\frac{CD}{AC}$,故有 $\frac{1}{CK}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}$.

5. 不妨设 P' 在 EF 上,由题设知 $\frac{P'D'}{PD}=\frac{S_{\triangle P'BC}}{S_{\triangle PBC}}$,$\frac{P'E'}{PE}=\frac{S_{\triangle P'CA}}{S_{\triangle PCA}}$,$\frac{P'F'}{PF}=\frac{S_{\triangle P'AB}}{S_{\triangle PAB}}$.作 $P'B'\perp CA$ 于 B',

$P'C' \perp AB$ 于 C'. 由 P',E,F 共线,有$\frac{\sin A}{AP'}=\frac{\sin\angle P'AE}{AF}+\frac{\sin\angle P'AF}{AE}=\frac{P'B'}{AF\cdot AP'}+\frac{P'C'}{AE\cdot AP'}$.

上式两边同乘以 $AB\cdot AC$,有 $AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{CA\cdot P'B'}{\frac{AF}{AB}}+\frac{AB\cdot P'C'}{\frac{AE}{AC}}$,即

$S_{\triangle P'CA}+S_{\triangle P'AB}+S_{\triangle P'BC}=S_{\triangle ABC}=\frac{S_{\triangle P'CA}}{\frac{AF}{AB}}+\frac{S_{\triangle P'AB}}{\frac{AE}{AC}}$,有 $S_{\triangle P'BC}=\frac{S_{\triangle P'CA}}{\frac{AF}{FB}}+\frac{S_{\triangle P'AB}}{\frac{AE}{EC}}=\frac{S_{\triangle P'CA}}{\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle PBC}}}+$

$\frac{S_{\triangle P'AB}}{\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PBC}}}$,由此即证.

第六章 西姆松定理及应用

习题 A

1. 由西姆松定理,知 L,M,N 三点共线.注意到 P,L,N,B 及 P,M,C,L 分别四点共圆,知$\angle LPN=\angle B$,$\angle LPM=\angle C$.又由张角定理,有$\frac{\sin(\angle B+\angle C)}{PL}=\frac{\sin\angle B}{PM}+\frac{\sin\angle C}{PN}$,即 $mn\cdot\sin\angle A=ln\cdot\sin\angle B+lm\cdot\sin\angle C$.再应用正弦定理,得 $mn\cdot a=ln\cdot b+lm\cdot c$.

2. 根据直径所对的圆周角是直角,知$\angle BDP=\angle ADP=90°$,$\angle BFP=\angle CFP=90°$,$\angle CEP=\angle AEP=90°$,即知 $D,A,B;B,F,C;C,E,A$ 分别三点共线.

又 $PD\perp AB$ 于 D,$PE\perp AC$ 于 E,$PF\perp BC$ 于 F,P 是$\triangle ABC$ 外接圆周上一点,由西姆松定理,知 D,E,F 三点共线.

3. 延长 BE,CD 相交于点 K,延长 CG,BF 相交于点 L.设 CG 与 BE 相交于点 I,则 I 为$\triangle ABC$ 的内心.由$\angle CAI=\frac{1}{2}\angle BAC$,而$\angle CKI=90°-\angle CIK=90°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\frac{1}{2}\angle BAC$,从而 A,I,C,K 四点共圆.

又 $AD\perp CK$ 于 D,$AE\perp KB$ 于 E,$AG\perp CI$ 于 G,A 是$\triangle ICK$ 外接圆上任一点,由西姆松定理,知 D,E,G 三点共线.同理,B,I,A,L 四点共圆,$AE\perp BI$ 于 E,$AG\perp IL$ 于 G,$AF\perp BL$ 于 F,由西姆松定理,知 E,G,F 三点共线.故 F,G,E,D 四点共线.

4. 设正$\triangle ABC$ 外接圆弧$\overset{\frown}{AB}$上任一点 P 到边 BC,CA,AB 的距离分别为 h_a,h_b,h_c,其垂足分别为 D,E,F,正三角形边长为 a.由面积等式可得 $h_a+h_b-h_c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.此式两边平方,得

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2+2(h_ah_b-h_bh_c-h_ah_c)=\frac{3}{4}a^2.$$

由$\frac{h_b}{PA}=\sin\angle PAC=\sin\angle PBD=\frac{h_a}{PB}$,有 $h_a\cdot PA=h_b\cdot PB$.

同理,$h_a\cdot PA=h_c\cdot PC$,故 $h_a\cdot PA=h_b\cdot PB=h_c\cdot PC$.

又 P,F,E,A 及 P,D,B,F 分别四点共圆,有$\angle PFD=\angle PBD=\angle PAC$,$\angle PDF=\angle PBF=\angle PCA$,得$\triangle PFD\backsim\triangle PAC$,故 $PA=\frac{h_c}{DF}\cdot a$.同理,$PB=\frac{h_a}{DE}\cdot a$,$PC=\frac{h_b}{EF}\cdot a$,即$\frac{h_a\cdot h_c}{DF}=\frac{h_b\cdot h_a}{DE}=\frac{h_c\cdot h_b}{EF}=$

k.

由西姆松定理,知 D,E,F 共线,即 $DF+FE=DE$.于是

$h_ah_b-h_ah_c-h_bh_c=(DE-DF-EF)\cdot k=0$,

故 $h_a^2+h_b^2+h_c^2=\frac{3}{4}a^2$.

5. 设以△ABC 的三个顶点为圆心的三圆,皆经过同一点 M,而 M 在△ABC 的外接圆上,⊙A 与⊙B 另交于 D,⊙A 与⊙C 另交于 E,⊙B 与⊙C 另交于 F.

注意到⊙A 与⊙B 中,公共弦 $MD\perp$ 连心线 AB;⊙A 与⊙C 中,公共弦 $ME\perp$ 连心线 AC;⊙B 与⊙C 中,公共弦 $MF\perp$ 连心线 BC.对△ABC 及其外接圆周上一点 M,应用西姆松定理,知 D,E,F 三点共线.

习题 B

1.(Ⅰ)设从点 P 向 BC,CA,AB 作垂线,垂足分别为 X,Y,Z.由对称性,知 XY 为△PUV 的中位线,故 $UV/\!/XY$.同理,$VW/\!/YZ$,$WU/\!/XZ$.由西姆松定理,知 X,Y,Z 三点共线,故 U,V,W 三点共线.

(Ⅱ)由 P,C,A,B 四点共圆,有 $\angle PCE=\angle ABP$.亦有 $\angle PCV=2\angle PCE=2\angle ABP=\angle PBW$.

又 $\angle PCQ=\angle PBQ$,则 $\angle PCV+\angle PCQ=\angle PBW+\angle PBQ$.

即 $\angle QCV=\angle QBW$,从而 $\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}}=\frac{CV\cdot CQ}{BQ\cdot BW}$.

同理,$\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}}=\frac{AW\cdot AQ}{CQ\cdot CU}$,$\frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}}=\frac{BQ\cdot BU}{AQ\cdot AV}$.∴ $\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}}\cdot\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}}\cdot\frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}}=1$.

于是,$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QCV}}\cdot\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QAV}}\cdot\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QBW}}=1$.

由梅勒劳斯定理的逆定理,知 D,E,F 三点共线.

2. 由西姆松定理知 P,Q,R 三点共线.而 $\angle DPC=\angle DQC=90°$,则 D,P,C,Q 四点共圆.于是,$\angle DCA=\angle DPQ=\angle DPR$.同理,由 D,Q,R,A 共圆,有 $\angle DAC=\angle DRP$.故△DCA∽△DPR.

类似地,△DAB∽△DQP,△DBC∽△DRQ,从而

$\frac{DA}{DC}=\frac{DR}{DP}=\frac{DB\cdot QR/BC}{DB\cdot PQ/BA}=\frac{QR\cdot BA}{PQ\cdot BC}$,故 $PQ=QR\Leftrightarrow\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}$.而 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的角平分线分 AC 的比分别为 $\frac{BA}{BC}$ 和 $\frac{DA}{DC}$.即可证.

3. 设 P 在 $\overset{\frown}{BC}$,由 $\angle PDB=\angle PFB=\angle PEC=\angle PEA$,知 B,P,D,F 四点共圆,P,F,A,E 四点共圆,从而 $\angle PFD=\angle PBD=\angle PBC=\angle PAE=\angle PFE$,故 F,D,E 共线(当 $\angle PBD=\angle PEC=\angle PFB=90°$ 时,即为西姆松定理).

4. 由 $\angle PCE=\angle A'$ 及 $AA'/\!/BB'$,有 $\angle A'=\angle BGD$(G 为 PA' 与 BB' 的交点),即 $\angle PCE=\angle BGD$.又 $\angle CBB'=\angle CPB'$,从而在△BGD 和△PCE 中,有 $\angle BDP=\angle CEP$,即知 D,P,E,C 四点共圆,有 $\angle PDE=\angle PCE=\angle A'$,故 $AA'/\!/DE$.

同理,$AA'/\!/DF$,所以 D,E,F 共线(当 $PA'\perp BC$ 时,即为西姆松定理).

5. 设 Q,P 顺次在 $\overset{\frown}{BC}$ 上,由 $\angle PCE=\angle PBA$,有 $\angle PCV=\angle PBW$.又 $\angle PCQ=\angle PBQ$,有 $\angle QCV=$

$\angle QBW$.故$\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}}=\frac{VC\cdot QC}{WB\cdot QB}=\frac{PC\cdot QC}{PB\cdot QB}$.

同理,$\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}}=\frac{PA\cdot QA}{PC\cdot QC}$,$\frac{S_{\triangle QBV}}{S_{\triangle QAV}}=\frac{PB\cdot QB}{PA\cdot QA}$.

于是,$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QCU}}\cdot\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QAV}}\cdot\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QBW}}=\frac{PB\cdot QB}{PC\cdot QC}\cdot\frac{PC\cdot QC}{PA\cdot QA}\cdot\frac{PA\cdot QA}{PB\cdot QB}=1$.

由梅勒劳斯定理的逆定理,知 D,E,F 共线(当 P,Q 重合时,即为西姆松定理).

6. 设 K 点在$\overset{\frown}{BC}$上,连 OC,则 $OP\cdot OQ=OC^2$,又$\angle POC=\angle COQ$,则$\triangle OPC\backsim\triangle COQ$,有$\angle OCP=\angle OQC$.又$\angle OKC=\angle OQC+\angle KCQ$,$\angle OCK=\angle OCP+\angle KCP$,而

$\angle OKC=\angle OCK$,$\angle OCP=\angle OQC$,知$\angle PCK=\angle KCQ$,即$\angle QCV=2\angle KCE$.

同理,$\angle QBW=2\angle KBA$.又$\angle KCE=\angle KBA$,则$\angle QCV=\angle QBW$,有

$\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}}=\frac{CV\cdot CQ}{QB\cdot WB}=\frac{PC\cdot QC}{PB\cdot QB}$.同理,$\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}}=\frac{PA\cdot QA}{PC\cdot QC}$,$\frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}}=\frac{PB\cdot QB}{PA\cdot QA}$.

故$\frac{BD}{DZ}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QCU}}\cdot\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QAV}}\cdot\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QBW}}=1$,故 D,E,F 共线[当 P(或 Q)在圆周上时,即为西姆松定理].

第七章 九点圆定理及应用

习题 A

1. 设 POP'是$\triangle ABC$ 的外接圆(圆心为 O)的直径,关于 P 点的西姆松线为 l_1,关于 P' 点的西姆松线为 l_2,因为 l_1 与 l_2 的交角可以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{PP'}$度量,从而 l_1 与 l_2 的交角为直角.设 H 为$\triangle ABC$ 的垂心,则 l_1 和 l_2 分别经过 $PH,P'H$ 的中点 Q,Q',而 Q 和 Q'在$\triangle ABC$ 的九点圆上,H 点是三角形的九点圆和外接圆的外位似中心,线段 QQ'是线段 PP'的位似图形,从而 QQ'是九点圆的直径,故 l_1 与 l_2 的交点在$\triangle ABC$ 的九点圆上.

2. 连 AG 并延长交 BC 于 L,则 A 在$\triangle ABC$ 的外接圆上,L 在$\triangle ABC$ 的九点圆上.又 G 是$\triangle ABC$ 的外接圆与九点圆的内位似中心,且位似比为 2:1.而 $PG:GQ=2:1$,且 P 点在外接圆上,则 Q 点必在九点圆上.

3. 设 I,O,H,V 分别为$\triangle ABC$ 的内心、外心、垂心及九点圆圆心,R,r,ρ 分别为$\triangle ABC$ 外接圆、内切圆、九点圆的半径,I_A,ρ_A 分别为在 BC 边外侧相切的旁切圆圆心和半径,则由心距公式,有

$OI^2=R^2-2Rr$,$IH^2=2r^2-2R\rho$,$OH^2=R^2-4R\rho$.

注意到 V 为 OH 的中点,由斯特瓦尔特定理的推论(即三角形中线长公式),有 $VI^2=\frac{1}{2}(VI^2+HI^2)-VH^2=\frac{1}{4}R^2-Rr+r^2=(\frac{1}{2}R-r)^2$,即 $VI=\frac{1}{2}R-r$.故九点圆与内切圆相内切.

同理,$OI_A^2=R^2+2R\rho_A$,得 $VI_1^2=(\frac{1}{2}R+\rho_A)^2$,即有 $VI_A=\frac{1}{2}R+\rho_1$,故九点圆与此旁切圆相外切.

同理,可证九点圆与其他两个旁切圆相外切.

4. 设 G 是△ABC 的重心，V 是九点圆的圆心，O 和 V 对于 G 和 H 是共线且调和共轭的，考察以 O 点为起点的向量，则 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=3(\frac{\overrightarrow{OA}}{3}+\frac{\overrightarrow{OB}}{3}+\frac{\overrightarrow{OC}}{2})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. 因此，$|\overrightarrow{OH}|\leqslant|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|=3R$，仅当 $A=B=C$ 时等号成立，这是不可能的. 故 $OH<3R$.

5. 设 O,H 分别为△ABC 的外心与垂心，I,I_1,I_2,I_3 分别为△ABC 的内心和三个旁心. 由于 H，A,B,C 构成一老垂心组(四点中，任一点是另三点构成的三角形的垂心，此四点为垂心组)；I 与 I_1，I_2,I_3 构成一新垂心组，又△ABC 的外接圆是△$I_1I_2I_3$ 的九点圆，从而△$I_1I_2I_3$ 的外心 O' 是关于 O 的 I 的对称点. 其余以此类似地推证. 从而新垂心组各点与老垂心组各点关于△$I_1I_2I_3$ 的九点圆的圆心对称.

习题 B

1.(1)设 E,F 分别是边 BA 的延长线，CA 的延长线上的点. 由旁心的定义，知 I_AA 平分∠BAC，I_BA 平分∠CAE，I_CA 平分∠BAF. 又∠BAF=∠CAE，从而有 I_B,A,I_C 三点共线，且 $I_AA\perp I_BI_C$.

同理，$I_BB\perp I_AI_C$，$I_CC\perp I_AI_B$. 故△ABC 为△$I_AI_BI_C$ 的垂足三角形，故△ABC 的外接圆即为△$I_AI_BI_C$ 的九点圆.

(2)设 O' 为△$I_AI_BI_C$ 的外心，则 $\angle O'I_BI_C=\frac{1}{2}(180°-\angle I_BO'I_C)=\frac{1}{2}(180°-2\angle I_BI_AI_C)$. 由 I_A,I_C，A,C 四点共圆，知 $\angle I_BAC=\angle I_BI_AI_C$，从而 $\angle O'I_BI_C+\angle I_BAC=90°$，即 $I_BO'\perp AC$.

同理，$I_AO'\perp BC$，$I_BO'\perp BA$. 故三条垂线共点于 O'.

2. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$ 是单位圆上任意四点，则 $x_i^2+y_i^2=1(i=1,2,3,4)$. 由九点圆圆心是三角形外心与垂心连线的中点，得△ABC，△ABD，△BCD，△ACD 九点圆圆心坐标分别为

$$O_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\right),O_2\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{2},\frac{y_1+y_2+y_4}{2}\right),$$

$$O_3\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{2},\frac{y_2+y_3+y_4}{2}\right),O_4\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{2},\frac{y_1+y_3+y_4}{2}\right).$$

考虑点 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}\right)$，则

$$|O_1G|=[(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}-\frac{x_1+x_2+x_3}{2})^2+(\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3}{2})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_4^2+y_4^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

同理，$|O_2G|=|O_3G|=|O_4G|=\frac{1}{2}$.

故 O_1,O_2,O_3,O_4 在以 G 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆上.

第八章 相交两圆的性质及应用

习题 A

1. 连 AP,AC,AQ,AD，由$\angle PAQ=\angle CAD$，有$\angle PAC=\angle QAD$.又 $CD\perp AB$，则 AC,AD 均为直径.从而 $Rt\triangle PAC\backsim Rt\triangle QAD$，故 $PC:QD=AC:AD$ 为定值.

2. 过 A 作 AB 的垂线交两圆于 P,Q，连 BC,BP,BD,BQ.由于 $PQ\perp AB$，则 PB,QB 为直径，即有 $PB=QB$.又$\triangle CBD\backsim\triangle PBQ$，则$\triangle CBD$ 也是等腰三角形，即 CD 上的中线 BE 也是高，故 $CD\perp BE$.

3. 若 PQ 与 CD 重合，则 $PQ=CD$.若 PQ 与 CD 不重合.连 BP,BC,BQ,BD，由 $CD\perp AB$ 知 BC 为圆的直径，从而在 $Rt\triangle BPC$ 中，$PB<BC$.又$\triangle BPQ\backsim\triangle BCD$，则 $PQ:CD=PB:BC<1$，即 $PQ<CD$，故 $PQ\leqslant CD$.

4. 连 AF,AC,AD,AE，则$\triangle ACE\backsim\triangle AFD$.连 FC，由 A,F,C,B 四点共圆，有$\angle AFC=\angle ABE=\angle ABD-\angle EBD=\angle ABC-\angle FBC=\angle ABF=\angle ACF$，从而$\triangle ACF$ 为等腰三角形，即有 $AF=AC$.此时，$\triangle ACF\cong\triangle AFD$，故 $CE=FD$.

习题 B

1. 连 KM，由$\angle DAM=\angle CBK$，知 A,B,M,K 四点共圆.于是，设 N 为 MB 延长线上一点，有$\angle MKA=\angle ABN=\angle DCM$，即知 M,C,D,K 四点共圆.因此 AD,BC 分别为过$\odot AKMK$ 与$\odot KMCD$ 的两交点 K,M 的割线.由相交两圆性质 2 的推论 1，知$\triangle AMD\backsim\triangle BKC$，故$\angle DMA=\angle CKB$.

2. 设 O 为弦 AB 的中点，连 OM,OP,OQ，则 $OM\perp PQ$，于是 O,M,P,P' 四点共圆.同理，O,M,Q,Q' 四点共圆.PQ 与 $P'Q'$ 分别为过$\odot OMPP'$ 和$\odot OMQQ'$ 的两交点 M,O 的割线，由相交两圆性质 2 的推论 1，知$\triangle P'MQ'\backsim\triangle POQ$.又由于弦 PQ 为定长，不论 PQ 滑到什么位置，所得$\triangle POQ$ 均为全等的等腰三角形，故$\triangle P'MQ'$ 的各角的大小不变.

3. 连 MP,MQ，则由四点共圆，有$\angle BRM=\angle APM$，$\angle CRM=\angle AQM$.又$\angle APM+\angle AQM=180°$，则$\angle BRM+\angle CRM=180°$，从而 B,R,C 三点共线.同理 B',R',C' 共线.

连 $AM,A'M,BM,B'M,CM,C'M$，则由$\triangle ABM\backsim\triangle A'B'M$，$\triangle BCM\backsim\triangle B'C'M$，$\triangle ACM\backsim\triangle A'C'M$，即证.

4. 由$\angle B=\angle C=60°$，知$\angle BO_1D=\angle BI_1C=120°=\angle DO_2C=\angle DI_2C$，故 A,O_1,I_1,D,C 五点共圆，A,O_2,I_2,D,B 五点共圆，且此两圆相等又相交于 A,D，由相交两圆性质 2，知$\angle O_1DO_2=\angle BAC=60°$，且 AD 平分$\angle O_1DO_2$，由$\angle AI_2O_2=\angle ADO_2=30°=\angle I_1AI_2$，知 $AI_1\parallel O_2P$.同理 $AI_2\parallel O_1P$，即可推知$\angle O_1PO_2=30°$，由此推知 D 为$\triangle O_1O_2P$ 的外心.

5. $\triangle ABD$ 与$\triangle MNB$ 内接于同一个圆，而$\triangle MNB$ 与$\triangle MNC$ 有公共边 MN，因此要证明$\triangle ABD$ 与$\triangle MNC$ 的外接圆相等，只须证明：$\angle MBN=\angle MCN$.事实上，由 $DB=DC=DA$，有$\angle DBN=\angle DCN$，$\angle MAD=\angle MCD$，又$\angle MAD=\angle MBD$，有$\angle MBN=\angle MBD+\angle DBN=\angle MAD+\angle DCN=\angle MCD+\angle DCN=\angle MCN$，由相交两圆性质 5(1)，即证.

6. 考虑圆 S_1 和圆 S_2，M_1M_2，M_4M_5 的端点分别在该两圆周上，由相交两圆性质 6 或$\angle M_1M_4A_4=\angle A_4A_1M_2=180°-\angle A_4M_5M_2$，所以 $M_1M_4\parallel M_2M_5$.同理 $M_5M_2\parallel M_6M_3$ 及 $M_6M_3\parallel M_7M_4$.因而 $M_1M_4\parallel M_7M_4$，从而 M_1 与 M_7 重合.

第九章　完全四边形的性质及应用

习题 A

1. 由于 $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle EFC} - S_{\triangle EFD} = S_{\triangle BCE} - S_{\triangle BCD}$.

如图 9－32,记点 D 到 CG、GE 的距离分别为 d_1,d_2,D 到 AE、AB 的距离分别为 d_3,d_4,则

$$\frac{1}{2}EF(d_1+d_3)-\frac{1}{2}EF\cdot d_3=\frac{1}{2}BC(d_2+d_4)-\frac{1}{2}BC\cdot d_4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}EF\cdot d_1=\frac{1}{2}BC\cdot d_2$$

由 $BC = EF \neq 0$,知 $d_1 = d_2$,即点 D 在$\angle CGE$ 的平分线上.

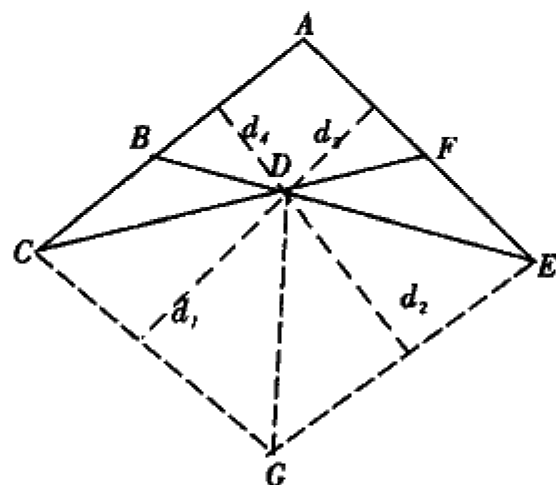


图 9－32

注　此题为 2003 年德国数学竞赛第一轮试题的等价表述.

在▱$ABCD$ 中,M、N 分别在 AB、BC 上,且 M、N 不与端点重合,$AM = NC$.设 AN 与 CM 交于点 Q.证明:DQ 平分$\angle ADC$.

2. 如图 9－33,显然,$\angle EBA = 90°$,$\angle CFA = 90°$,从而 B、F 在以 CE 为直径的圆上,即有 $AB\cdot AC = AF\cdot AE$.

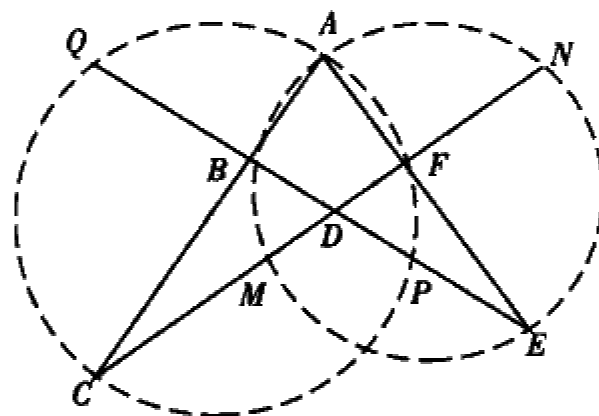


图 9－33

易知$\triangle CAP$ 是直角三角形,PB 是它的高线,有 $AB\cdot AC = AP^2$.

同理,在$\triangle EAM$ 中,有 $AF\cdot AE = AM^2$.

由 $AB\cdot AC = AF\cdot AE$,有 $AP^2 = AM^2$,即 $AP = AM$.

又 $PQ\perp AC$,则 $AP = AQ$.

同理,$AM = AN$.

综上,线段 AM、AP、AN、AQ 都相等,即 P、N、Q、M 都在以 A 为圆心的圆上.

注　此题为 2005 年第 36 届奥地利数学奥林匹克决赛题的等价表述.

已知锐角$\triangle ABC$,以 AC 为直径的圆为圆 Γ_1,以 BC 为直径的圆为圆 Γ_2,AC 与圆 Γ_2 相交于点 E,BC 与圆 Γ_1 相交于点 F,直线 BE 和圆 Γ_1 相交于点 L、N,其中点 L 在线段 BE 上,直线 AF 和圆 Γ_2 相交于点 K、M,其中点 K 在线段 AF 上.证明:四边形 $KLMN$ 是圆内接四边形

3.(1)易知,四边形 $ABGF$ 是正方形.

因为$\triangle EFN \backsim \triangle EAB$,$\triangle CMG \backsim \triangle CFE$,$\triangle CGB \backsim \triangle CEA$,

则 $\dfrac{FN}{AB}=\dfrac{EF}{EA}$,　①

且 $\dfrac{GM}{EF}=\dfrac{CG}{CE}=\dfrac{GB}{EA}$或 $\dfrac{GM}{GB}=\dfrac{EF}{EA}$.　②

由①、②及 $AB = GB$,得 $FN = GM$.

(2)因为 $FG /\!/ BC$,所以$\dfrac{FM}{MC}=\dfrac{GM}{MB}$.　③

由于 $GM = FN$,$MB = GB - GM = FG - FN = NG$,代入③得$\dfrac{FM}{MC}=\dfrac{FN}{NG}$,故 $MN /\!/ CE$.

(3)设 FC 与 AN 交于点 H,则由 $\triangle AFN \cong \triangle FGM$,$\angle AHF = \angle HFN + \angle FNH = \angle MFG + \angle FMD = 90°$,故 $MD \perp AN$.

同理,$ND \perp AM$.故 D 为 $\triangle AMN$ 的垂心,即 $AD \perp MN$.

由 $MN // CE$,知 $AD \perp CE$.

注 此题为2003年第54届罗马尼亚数学奥林匹克第二轮题.

在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle A = 90°$,$\angle A$ 的平分线交边 BC 于点 D,点 D 在边 AB、AC 上的射影分别为 P、Q.若 BQ 交 DP 于点 M,CP 交 DQ 于点 N,BQ 交 CP 于点 H.证明:(1) $PM = PN$;(2) $MN // BC$;(3) $AH \perp BC$.

4. 由于 $AC > AE$,则知直线 BF 必与直线 MN 相交,设交点为 T.

由直角三角形性质,有 $EN \cdot EC = EF^2$,$CM \cdot EC = CB^2$,从而 $\frac{EN}{CM} = \frac{EF^2}{CB^2}$.

而 $GN = \frac{CB}{EB} \cdot EN$,$HM = \frac{EF}{CF} \cdot CM$,

故 $\frac{GM}{HM} = \frac{CB \cdot CF}{EB \cdot EF} \cdot \frac{EN}{CM} = \frac{CB \cdot CF}{EB \cdot EF} \cdot \frac{EF^2}{CB^2} = \frac{CF \cdot EF}{CB \cdot EB}$. ①

又因 $CF \cdot EF = FN \cdot CE$,$CB \cdot EB = BM \cdot CE$,

所以 $\frac{CF \cdot EF}{CB \cdot EB} = \frac{FN}{BM} = \frac{TN}{TM}$. ②

由①、②得 $\frac{GN}{HM} = \frac{TN}{TM}$,因此,$H$、$G$、$T$ 三点共线.

由 $\frac{QN}{CN} = \frac{EB}{CB}$,$CN \cdot CE = CF^2$,相乘得 $QN \cdot CE = \frac{CF^2 \cdot EB}{CB}$.

又 $\frac{PM}{EM} = \frac{CF}{EF}$,$EM \cdot CE = EB^2$,相乘得 $PM \cdot CE = \frac{EB^2 \cdot CF}{BF}$.

上面两式相除,得 $\frac{QN}{PM} = \frac{CF \cdot EF}{CB \cdot EB}$. ③

由②、③得 $\frac{QN}{PM} = \frac{TN}{TM}$,因此,$P$、$Q$、$T$ 三点共线.

从而四直线 PQ、BF、HG、MN 都过点 T,亦即这四条直线相交于点 T.

第十章 根轴的性质及应用

习题 A

1. 由 $\triangle PAB \backsim \triangle AQB$,有 $\angle PBA = \angle ABQ$,即知 Q 点在 PB 上,且 $\frac{PB}{AB} = \frac{AB}{QB}$.由 $\triangle AQB \backsim \triangle ABR$,有 $\angle BAQ = \angle RAB$,即知 R 点在 AQ 上,且 $\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{AR}$.故 $PB \cdot QB = AB^2 = AQ \cdot AR$.

设 $\triangle PQR$ 的外接圆圆心为 O,则 A,B 关于 $\odot O$ 是等幂的.作切线 AT,BS,连 OA,OB,OT,OS,由 $AT^2 = BS^2 = AB^2$,$OT = OS$ 有 $\triangle OAT \cong \triangle OBS$,$OA = OB$,即 $\odot O$ 关于 AB 的中垂线对称,故 P',Q',R' 都在 $\odot O$ 上.

2. 设两圆圆心为 O_1,O_2,连 O_1O_2,由于 O_1,O_2 是梯形 $BCED$ 两条对角线的中点,则 $O_1O_2 //$

BC，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的根轴与 BC 垂直.

设 $\triangle ABC$ 的三条高线为 AL, BM, CN，垂心为 H，则 M 在 $\odot O_1$ 上，N 在 $\odot O_2$ 上，且 B, C, M, N 共圆，直径为 BC，记此圆为 $\odot O_3$，这三圆的圆心不共线，则三条根轴相交于一点根心. 又 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$ 的根轴是 BM，CN 是 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 的根轴，又 BM 和 CN 相交于垂心 H，从而 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的根轴是过垂心 H 且垂直于 BC 的直线，即高 AL 所在的直线.

3. 设以 BE 为直径的圆为 $\odot O_1$，以 CD 为直径的圆为 $\odot O_2$，BM，CN 是高线，H 为垂心，则 M 在 $\odot O_1$ 上，N 在 $\odot O_2$ 上，由 B, C, M, N 四点共圆，有 $HB \cdot HM = HC \cdot HN$，即 H 是关于两圆的等幂点，则 H 在 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的根轴上.

4. 过 A 引 BC 的平行线，并与 $A'M$ 的延长线交于 B'，与 $A'N$ 的延长线交于 C'，令 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ_1，$\triangle A'B'C'$ 的外接圆为 Γ_2.

因 $\triangle MBA'$ 和 $\triangle NA'C$ 都是等腰三角形，$B'C' /\!/ BC$，则在 $\triangle MAB'$ 和 $\triangle NAC'$ 中，$\angle MBA' = \angle MA'B = \angle MB'A = \angle MAB'$，$\angle NA'C = \angle NCA' = \angle NAC' = \angle NC'A$，即有 $AB = A'B'$，$AC = A'C'$，即 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 又 $AM \cdot BM = A'M \cdot B'M$，$AN \cdot CN = A'N \cdot C'N$，从而 M, N 是圆 Γ_1 和 Γ_2 的等幂点，即直线 MN 是圆 Γ_1 和 Γ_2 的根轴. 又 Γ_1 与 Γ_2 是等圆，则 MN 是 Γ_1 和 Γ_2 的对称轴. 又 A' 在 Γ_2 上，则 A' 关于 MN 的对称点在 Γ_1 上.

5. 设凸六边形 $ABCDEF$ 切圆于点 R, Q, T, S, P, U（R 在 AB 上，Q 在 BC 上，等等）. 选择任意实数 $a > 0$，在直线 BC 和 EF 上作点 Q' 和 P'，使 $QQ' = PP' = a$，而向量 $\overrightarrow{QQ'}$ 和 $\overrightarrow{PP'}$ 同向量 $\overrightarrow{CB}$ 和 $\overrightarrow{EF}$ 同方向，类似地作点 R', S', T', U'（有 $RR' = SS' = TT' = UU' = a$），再作 $\odot O_1$ 切直线 BC 和 EF 分别于点 P', Q'，类似地作 $\odot O_2$，$\odot O_3$.

下证点 B 和 E 在 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的根轴上. $BQ' = QQ' - BQ = RR' - BR = BR'$（若 $QQ' < BQ$，则 $BQ' = BQ - QQ' = BR - RR' = BR'$）和 $EP' = EP + PP' = ES + SS' = ES'$. 类似地可证，直线 FC 和 AD 分别是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_3$，$\odot O_2$ 和 $\odot O_3$ 的根轴. 而三个圆的根轴交于一点，因此 AD, BE, CF 共点.

6. 若圆 $DD'EE'$，$EE'FF'$，$FF'DD'$ 是互异的，那么直线 AB, BC, CA 将是它们的根轴，而这是不可能的，因为三圆的根轴不可能构成三角形. 因此，至少有两圆重合，此时，三圆必重合.

7. 设 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r，其与 BC, CA, AB 的切点分别为 D, E, F. 又设 P, Q, R 分别是线段 EF, FD, DE 的中点. 由 $\triangle IBD$ 和 $\triangle IDQ$ 均为直角三角形，有 $IQ \cdot IB = ID^2 = r^2$. 同理，$IR \cdot IC = r^2$，于是 B, C, R, Q 四点共圆. 由于点 Q, R 分别在 IB, IC 上，则 I 在 $\odot BQRC$ 的外部，I 关于 $\odot BQRC$ 的幂为 $IB \cdot IQ = r^2$，从而该圆与 $\odot I$ 直交. 同理，$\odot CRPA$，$\odot APQB$ 也与 $\odot I$ 直交，故 A', B', C' 就是 P, Q, R，且 $\triangle PQR$ 的外接圆半径为 $\frac{r}{2}$. 即证.

习题 B

1. 由 $\angle BM'M \xlongequal{m} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BM} \xlongequal{m} 90^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{MM'B'}$，$\angle ABM \xlongequal{m} \frac{1}{2}\overset{\frown}{MM'B}$，有 $\angle BM'M = 90^\circ - \angle ABM$，由 $AB \perp AN$，有 $\angle ANB = 90^\circ - \angle ABM$，即 $\angle BM'M = \angle ANB$，故 M, M', N', N 四点共圆，此圆记为 Γ. 于是，MM' 是 $\odot O$ 和圆 Γ 的根轴. 又 A 在根轴上，则 $AN \cdot AN' = AB \cdot AB'$，即 $AN \cdot AN'$ 恒为 A 对于 $\odot O$ 的

幂.

2. 记直线 AM 与 DN 的交点为 Q,须证点 Q 在直线 XY 上.连 MN,由 P 在两圆根轴 XY 上,知 $PC\cdot PM=PB\cdot PN$,由此有 $\triangle PBC\backsim\triangle PMN$,故 $\angle PMN=\angle PBC$.再由 AC 和 BD 分别为两圆直径,有 $\angle AMP=90°$ 且 $\angle PBC+\angle D=90°$,得 $\angle AMN+\angle D=\angle AMP+\angle PMN+\angle D=180°$,故 A,M,N,D 四点共圆,于是 $AQ\cdot QM=QD\cdot QN$,即点 Q 对两圆的幂相等,从而 Q 在两圆的根轴 XY 上.

3. 连 AE,BE,AO_1,O_1O_2,O_2B.设 $\odot O$ 与 l_1 相切于 H,$\angle EAO_1=\theta$,$\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的半径分别为 r,r_1,则两圆外公切线长 $AH=2\sqrt{rr_1}$.再由 $O_1A\parallel OB$,得 $\triangle O_1AE\backsim\triangle O_2BE$,于是 A,E,B 共线,且 $AE=2r_1\cos\theta$,$AB=2\sec\theta$,于是有 $AE\cdot AB=4rr_1=AH^2$,即点 A 对 $\odot O$ 和 $\odot O_2$ 的幂相等,故 A 在两圆的根轴(过切点 D 的公切线)上,即 AD 为两圆公切线.同理可知 BC 为 $\odot O$ 和 $\odot O_1$ 的公切线,故 $QC=QD$,即 $QO_1^2-r_1^2=QO_2^2-r_2^2$,故 $OE\perp O_1O_2$,即 QE 为 $\odot O$ 和 $\odot O_2$ 的公切线,于是 $QE=QC=QD$,即 Q 为 $\triangle CDE$ 的外心.

另证:因 $l_1\parallel l_2$,连 O_1A,O_2B,则 $O_1A\parallel O_2B$.连 O_1O_2,则 $\angle AO_1E=\angle BO_2E$.连 AE,BE,则 $\angle AEO_1=\angle BEO_2$,故 A,E,B 三点共线.

设 $\odot O$ 与 l_1 交于 F,同理可知 B,D,F 三点共线,所以

$\angle FAE\xlongequal{m}\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACE}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{EmB}\xlongequal{m}\angle BDE$.则 A,E,D,F 四点共圆,所以,B 点在 $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的根轴上,因此,BC 为 $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的根轴.同理,AD 为 $\odot O$ 与 $\odot O_2$ 的根轴.因此,Q 为 $\odot O,\odot O_1,\odot O_2$ 的根心,且 $QC=QD=QE$.

所以,Q 为 $\triangle CDE$ 的外心.

4. 记 AB 中点为 M,为证 M 在 $\odot C$ 和 $\odot D$ 的根轴上,只须证 M 向 $\odot C$ 和 $\odot D$ 引的切线长相等,只须证对任一与 $\odot A$ 内切而与 $\odot B$ 外切的圆 Γ 而言,自 M 向 Γ 所引的切线长为定值(仅与 $\odot A$ 半径 R 及 $AB=2a$ 有关,而与 Γ 的位置和半径 r 无关).

连 AC,BC,MC,则 $AC=R-r$,$BC=R+r$,$AB=2a$,故由斯特瓦尔特定理的推论(或三角形中线长定理),有 $MC^2=\frac{1}{2}(AC^2+BC^2-\frac{1}{2}AB^2)=\frac{1}{2}[(R+r)^2+(R-r)^2-\frac{1}{2}4a^2]=R^2+r^2-a^2$.于是自 M 点向 $\odot C$ 所作切线长为 $\sqrt{MC^2-r^2}=\sqrt{R^2-a^2}$ 为定值(与 $\odot C$ 的位置与半径无关),从而自 M 点向 $\odot C$ 和 $\odot D$ 引的切线长相等,即 M 在两圆根轴上,故直线 PQ 平分线段 AB.

第十一章　线段调和分割的性质及应用

习题 A

1. 如图 11-40,事实上,在梯形 $EFGH$ 中,EG 与 HF 交于点 B,两腰 EH、FG 的延长线交于点 A,设直线 AB 交 HG 于 C',交 EF 于 D'.

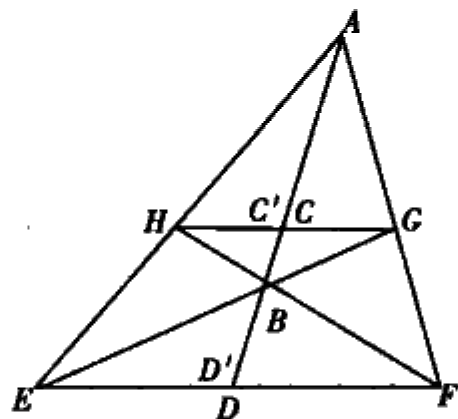


图 11-40

则 $\frac{C'G}{ED'}=\frac{C'B}{BD'}=\frac{HC'}{D'F}$,$\frac{HC'}{ED'}=\frac{AC'}{AD'}=\frac{C'G}{D'F}$,即有 $\frac{C'G}{ED'}=\frac{HC'}{D'F}$,$\frac{HC'}{ED'}=\frac{C'G}{D'F}$,此两式两边分别相乘、相除,分别有 $ED'^2=D'F^2$,$HC'^2=C'G^2$,即

知 C'，D'分别为 HG，EF 的中点，故 C'与 C 重合，D'与 D 重合．

又由 $HG/\!/EF$，有$\frac{CA}{DA}=\frac{HC}{ED}=\frac{HC}{DF}=\frac{CB}{DB}$，即$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$，故 C、D 调和分割 AB．

2．如图 11－41，设 C、D 两点调和分割⊙O 的直径 AB，且 AB 直线上 A、B、C、D 的垂线与圆周上任一点 T 的切线交于点 E、F、G、H．

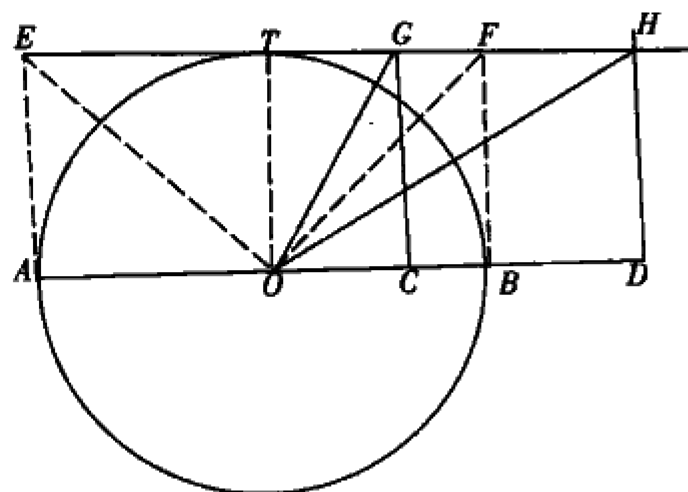


图 11－41

直线 AE、BF、CG、DH 在直线 AB 和 EF 上截下成比例的线段，于是点 G 和 H 调和分割线段 EF，所以直线 OG、OH 调和分割直线 OE 和 OF．但直线 OE 与 OF 垂直（由 $\angle OEF+\angle OFE=\frac{1}{2}\cdot180°=90°$），从而 OF 是$\angle GOH$ 的平分线．

于是，$\frac{OG}{OH}=\frac{GF}{FH}=\frac{CB}{BD}$，故$\frac{OG}{OH}$保持定值$\frac{CB}{BD}$，不因切线的选择而变．

3．如图 11－42，设直线 AD 与 EP 交于无穷远点 Q．

在完全四边形 $AEBPQD$ 中，对角线 AP 与 ED 交于点 M，则 AP 被 M、C 调和分割．从而 EA、EP、EM、EC 为调和线束．

而 $EP\perp EA$，故 EP 平分$\angle MEC$，即 PE 平分$\angle DEC$．

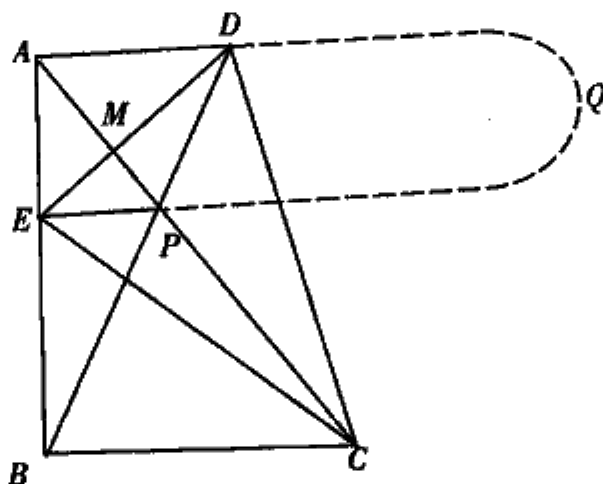


图 11－42

4．如图 11－43，设 BH 交 DF 于 G，在完全四边形 $BDCHAF$ 中，对角线 BH 被 G、E 调和分割，则 DB、DH、DG、DE 为调和线束，而 $BD\perp HO$，故 HD 平分$\angle GDE$，即$\angle EDA=\angle FDA$．

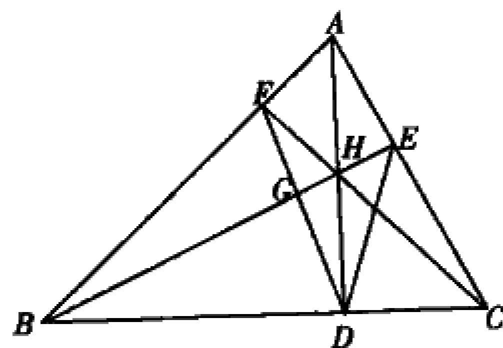


图 11－43

5．如图 11－44．

（1）由题设 AF、BP、CD 三线共点，设该点为 H，又设 AH 与 BD 交于点 G．

在完全四边形 $ABCHPD$ 中，由对角线调和分割性质，知 AH 被 G、F 调和分割，从而知 BA、BH、BG、BF 为调和线束．

而 $BD\perp BE$，故 BF 平分$\angle ABP$ 的外角，即 BF 是$\angle PBC$ 的角平分线．

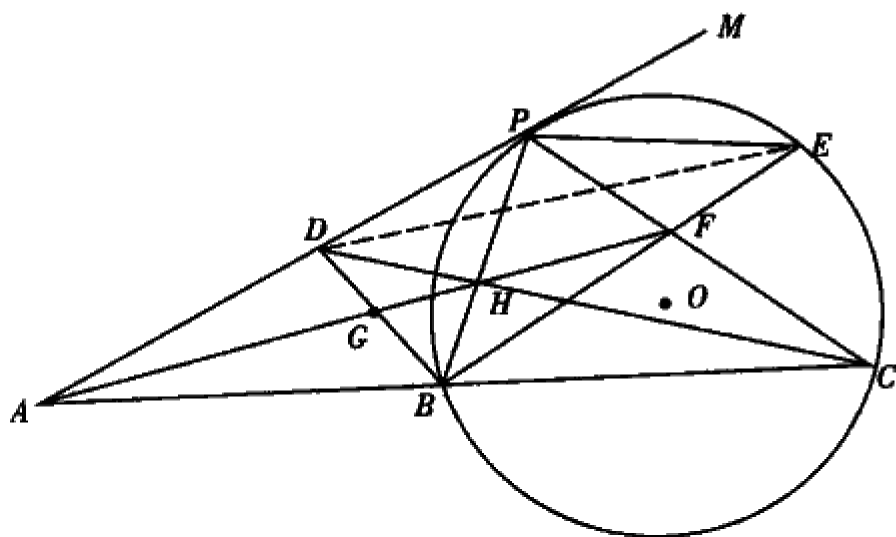


图 11-44

(2)不妨设⊙O 的半径为 1,$\angle PCB=\alpha$,由(1)知$\angle PBE=\angle EBC=30°$,且 E 是$\overset{\frown}{PC}$的中点.

因$\angle MPE=\angle PBE=30°$,$\angle CPE=\angle CBE=30°$,则由 $PD=PE$ 知$\angle PDE=\angle PED=15°$,$PE=2\cdot\sin30°=1$,$DE=2\cdot\cos15°$.

又 $BE=2\cdot\sin\angle ECB=2\cdot\sin(\alpha+30)°$,$\angle BED=\angle BEP-15°=\alpha-15°$.

所以,在 Rt△BDE 中,有 $\cos(\alpha-15°)=\frac{BE}{DE}=\frac{2\sin(\alpha+30°)}{2\cos15°}$,

即 $\cos(\alpha-15°)\cdot\cos15°=\sin(\alpha+30°)$,即 $\cos\alpha+\cos(\alpha-30°)=2\sin(\alpha+30°)$,

即 $\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\cos30°+\sin\alpha\cdot\sin30°=\sqrt{3}\cdot\sin\alpha+\cos\alpha$,

从而 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\tan\alpha=\sqrt{3}\cdot\tan\alpha+1$,故 $\tan\alpha=\frac{6+\sqrt{6}}{11}$.

6. **证法 1** 如图 11-45,连结 AB 交 CD 于点 Q,由于 AB 是点 P 的切点弦,则 P、Q 调和分割 CD,从而 AP、AQ、AC、AD 为调和线束.

又 $EF/\!/AP$ 且与其他三条线束相截,从而 $BE=BF$.

证法 2 连 BC、BA、BD,则$\angle ABC=\angle PAC=\angle E$.所以△$ABC$ ∽△AEB,

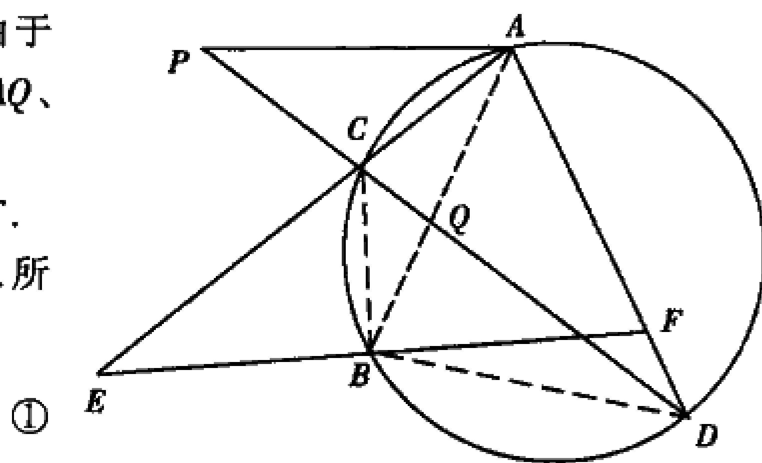


图 11-45

从而$\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AC}$,即 $BE=\frac{AB\cdot BC}{AC}$. ①

又$\angle ABF=\angle PAB=\angle ADB$,所以△$ABF$ ∽△ADB,

从而$\frac{BF}{BD}=\frac{AB}{AD}$,即 $BF=\frac{AB\cdot BD}{AD}$. ②

另一方面,因为△PBC ∽△PDB,△PCA ∽△PAD.所以$\frac{BC}{BD}=\frac{PC}{PB}$,$\frac{AC}{AD}=\frac{PC}{PA}$

而 $PA=PB$,所以$\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}$. ③

于是$\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}$,故由①②③三式即知 $BE=BF$.

7. **证法 1** 如图 11-46,当 $AB=AC$ 时结论显然成立. 当 $AB\neq AC$ 时,设直线 MN 与直线 BC 交

于点 P(或无穷远点),则知线段 MN 被 A、P 调和分割,即知 DM、DN、DA、DP 成调和线束.而 $DA\perp DP$,故知 AD 平分 $\angle MDN$.

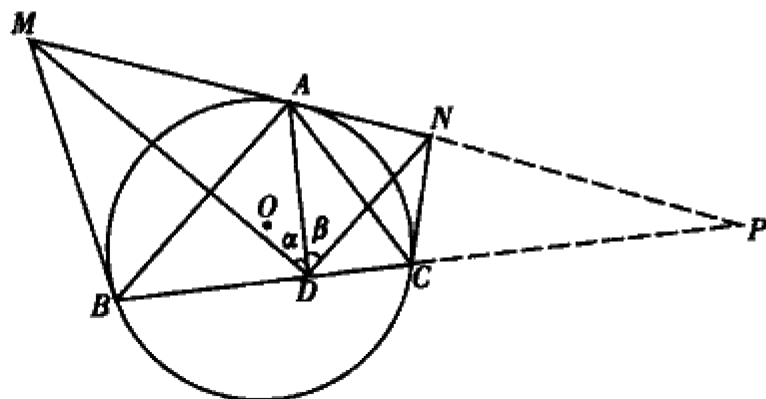


图 11-46

证法 2 记 $\angle MDA=\alpha$,$\angle NDA=\beta$.

因 MN、MB、NC 都是 $\odot O$ 的切线,则 $\angle MAB=\angle MBA=\angle ACB$,$\angle NAC=\angle NCA=\angle ABC$,对 $\triangle DAB$ 及点 M 应用角元形式塞瓦定理,有

$$1=\frac{\sin\angle ADM}{\sin\angle MDB}\cdot\frac{\sin\angle DBM}{\sin\angle MBA}\cdot\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAD}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin(B+C)}{\cos\alpha\cdot\sin\angle MAD}=\frac{\sin(B+C)}{\sin\angle MAD}\cdot\tan\alpha. \quad ①$$

同理,对 $\triangle DAC$ 及点 N 应用角元形式塞瓦定理,有 $1=\dfrac{\sin(B+C)}{\sin\angle NAD}\cdot\tan\beta$. ②

比较①②两式,即得 $\tan\alpha=\tan\beta$,因此,$\alpha=\beta$,即 AD 平分 $\angle MDN$.

习题 B

1. 如图 11-47,先证 A、M、H 三点共线.

对 $\triangle ABC$ 及点 E、F 分别应用角元形式的塞瓦定理,有

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCE}{\sin\angle ECA}\cdot\frac{\sin\angle CAE}{\sin\angle EAB}=1, \quad ①$$

$$\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle FAB}\cdot\frac{\sin\angle ABF}{\sin\angle FBC}=1, \quad ②$$

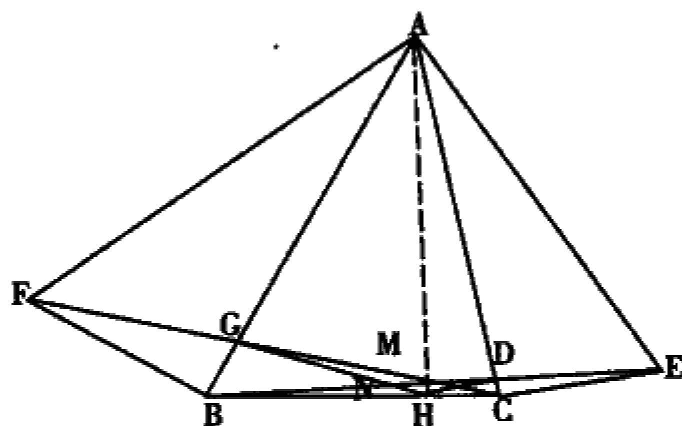


图 11-47

由 $\triangle ABF\backsim\triangle ACE$,且 $\angle ABF=90°$,知 $\angle ACE=90°$,$\angle CAE=\angle BAF$,$\angle EAB=\angle FAC$.

①×②并化简得 $1=\dfrac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\dfrac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}\cdot\dfrac{\sin\angle BCE}{\sin\angle FBC}=$

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}\cdot\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle ABC}=\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}\cdot\frac{\sin\angle CAH}{\sin\angle HAB}.$$

由塞瓦定理的逆定理知 BE、CF、AH 共点,故 A、M、H 三点共线.

设 GH 交 BM 于点 N,在完全四边形 $BHCMAG$ 中,N、D 调和分割 BM,从而 HB、HM、HN、HD 为调和线束.而 $HB\perp HM$,故 MH 平分 $\angle GHD$.

2. 如图 11-48,连结 DA、DE、DF,过点 A 作 $AG'\perp BC$ 于 G',则由 $\triangle BDF\backsim\triangle BAG'$,$\triangle CDE\backsim\triangle CAG'$,且 $DE=DF$,有 $\dfrac{BG'}{BF}=\dfrac{AG'}{DF}=\dfrac{AG'}{DE}=\dfrac{CG'}{CE}$,即 $\dfrac{BG'}{BF}\cdot\dfrac{CE}{CG'}=1$.

由 $AF=AE$，有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BG'}{G'C}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{AE}\cdot\frac{BG'}{BF}\cdot\frac{CE}{CG'}=1$.

由塞瓦定理的逆定理，知 BE、CF、AG' 三线共点.

所以，高 AG' 过点 H，即点 G' 与 G 重合.

设 BE 与 FG 交于点 K，在完全四边形 $BGCHAF$ 中，BH 被 K、E 调和分割，从而 GB、GH、GK、GE 为调和线束. 而 $BG\perp GH$，故 HG 平分 $\angle FGE$.

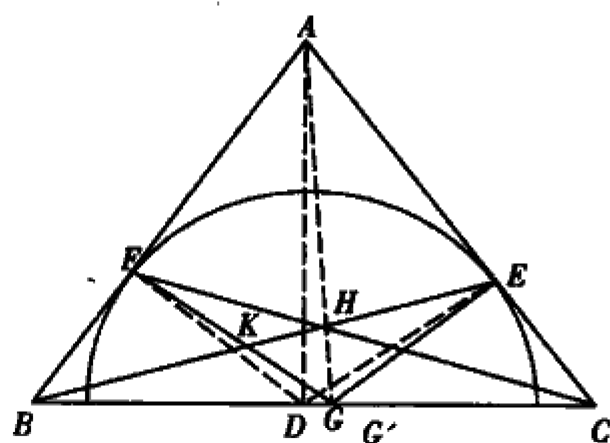


图 11-48

3. **证法 1** 如图 11-49，同上题，BE、CF 与 BC 边上的高线 AL 共点于 H.

此时，作 $DG'\perp BE$ 于 G'，连 FG'，则知 D、L、H、G' 四点共圆，B、D、G'、F 四点共圆，有 $\angle AHG'=\angle G'DL=\angle G'FB$，于是 F、G'、H、A 四点共圆，从而 G' 与 G 重合.

由 $BG^2-GE^2=(BD^2-DG^2)-(DE^2-DG^2)=BD^2-DF^2=BF^2$，即证.

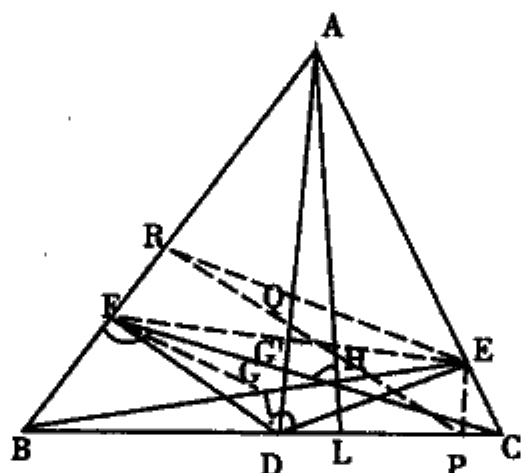


图 11-49

证法 2 连结 EF，则 AD 垂直平分 EF 于点 Q，作 $EP\perp BC$ 于 P，连结 PQ 并延长交 AB 于 R，连结 RE，由 Q、D、P、E 共圆，有 $\angle QPD=\angle QED$.

由 A、F、D、E 共圆有 $\angle QED=\angle FAD$，从而 A、R、D、P 四点共圆.

又 $\angle RAQ=\angle DAC$，$\angle ARQ=\angle ADC$，则 $\triangle ARQ\backsim\triangle ADC$，有 $\frac{AR}{AQ}=\frac{AD}{AC}$.

从而 $AR\cdot AC=AQ\cdot AD=AF^2=AF\cdot AE$，即 $\frac{AR}{AF}=\frac{AE}{AC}$. 所以 $RE/\!/FC$，有 $\angle AFC=\angle ARE$.

作 $DG'\perp BE$ 于 G'，则 A、R、D、P，G'、D、P、E 分别四点共圆，则 $BG'\cdot BE=BD\cdot BP=BR\cdot BA$，故 A、R、G'、E 四点共圆.

所以，$\angle AG'E=\angle ARE=\angle AFC$，因此 A、F、G'、H 共圆，故 G' 与 G 重合．以下同证法 1.

第十二章 三角形内心的性质及应用

习题 A

1. 先证 O_1、B、O_2、C、D 五点共圆，再证 O_1C、O_2D 是 $\triangle BCD$ 的两条内角平分线.

2. 先证 A、O_1、O_2、B 四点共圆，再证 $\angle AO_1C=\angle BO_2C$.

3. 因为 $S_{四边形AMIN}=\frac{1}{2}MN\cdot AI$，$S_{\triangle IBC}=\frac{1}{2}BC\cdot IE$，所以只须证 $MN\cdot AI=BC\cdot IE$ 即可.

4. 注意 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}=\sqrt{S_{\triangle PBC}\cdot S_{\triangle PDA}}$，只须证明 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的周长之和等于 $\triangle PBC$ 与 $\triangle PDA$ 的周长之和.

5. 连 AI 并延长交 BC 于 N，连 MN. 因 $AC=AB$，I 为 $\triangle AEB$ 的内心，则 $AN\perp BC$，$BN=CN$，即 $MN/\!/AC$，$MN=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD$. ① 又 $AC\perp BD$，则 $MN\perp BD$，从而 $\angle DBC=\angle ANM=\angle NAC=$

$\frac{1}{2}\angle BAE$.连 BI,则$\angle IBE=\frac{1}{2}\angle ABE$,从而$\angle IBN=\frac{1}{2}\angle ABE$,于是$\angle IBN=\angle IBE+\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle ABE+\angle BAE)=45°$,故 $IN=BN=\frac{1}{2}BC$.② 由①,②得 $MN:DB=NI:BC=1:2$.又$\angle ANM=\angle DBC$,则$\triangle MNI\backsim\triangle DBC$.从而 $MI\perp CD$,且 $MI=\frac{1}{2}CD$.

6. 由 B,A',I,C'四点共圆,有$\angle IA'C'=\angle A'BI=\frac{1}{2}\angle B$.同理$\angle IA'B'=\angle ICB'=\frac{1}{2}\angle C$.从而$\angle A'=\angle IA'C+\angle IA'B'=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$.

同理得$\angle B'=\frac{1}{2}(\angle C+\angle A)$,$\angle C'=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$.于是原不等式等价于 $\cot\angle A+\cot\angle B+\cot\angle C\geqslant\tan\frac{1}{2}\angle A+\tan\frac{1}{2}\angle B+\tan\frac{1}{2}\angle C$.又

$$\cot\angle B+\cot\angle C=\frac{\sin(\angle B+\angle C)}{\sin\angle B\cdot\sin\angle C}=\frac{2\sin\angle A}{\cos(\angle B-\angle C)-\cos(\angle B+\angle C)}\geqslant\frac{2\sin\angle A}{1+\cos\angle A}$$
$$=2\tan\frac{1}{2}\angle A.$$

类似其他两式,此三式相加即证.

7. 过点 B 作直线 AO 的垂线,垂足为 D.连 OB,OC,CD,由 $AE=AF$,$AO\perp EF$,知 $OE=\frac{1}{2}EF$,$\angle OAE=\angle OAF$.由$\angle ACB=90°=\angle ADB$,知 A,B,D,C 共圆,从而$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$,即 $BD=CD$.由 $AO\perp OE$,$BD\perp AO$,知 $EO/\!/BD$,而 $AE=BE$,从而 $AO=OD$.又 $AO=OD$,$AE=BE$,有 $BD=2OE$,得 $BD=EF$.因 $AO=EF$,则 $BD=OD=CD$,即知 D 是$\triangle OBC$ 的外心.于是$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ODB=45°$,$\angle OCA=90°-\angle OCB=45°$,故 O 是$\triangle ABC$ 的内心.

8. 设$\odot I$ 切 AB 于 E,连 IE,则 $IE\perp AB$.设$\triangle ABC$ 的外心为 O,连 DO 并延长交$\odot O$ 于 F,连 BD,BF,则$\angle FBD=90°$.又$\angle BFD=\angle BAD$,则 $\text{Rt}\triangle AIE\backsim\text{Rt}\triangle FDB$,即有 $DF:BD=AI:IE$,由内心性质 3 得 $BD=ID$,于是 $2R:ID=AI:r$,故 $AI\cdot ID=2Rr$.

9.(1)$\frac{1}{ID}-\frac{1}{IK}=\frac{1}{IC}$可变形为$\frac{IC}{ID}-\frac{IC}{IK}=1$,由内心性质 6 有$\frac{IC}{ID}=\frac{AC+BC}{AB}$,① $\frac{CK}{IK}=\frac{AC+AB}{AB}$,此即为$\frac{CK-IK}{IK}=\frac{AC+BC-AB}{AB}$,亦即有$\frac{IC}{IK}=\frac{AC+BC-AB}{AB}$,② 由 ①-②得$\frac{IC}{ID}-\frac{IC}{IK}=1$,即证.

(2)由内心性质 8,有$\frac{IK}{DK}=\frac{AC+BC}{AB}$,即$\frac{IK-DK}{DK}=\frac{AB+BC-AB}{AB}$,亦即$\frac{ID}{DK}=\frac{AC+BC-AB}{AB}$,③ 由 ①-③即证.

10. 延长 AI 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 P,因 I 是$\triangle ABC$ 的内心,由内心性质 3 知 $BP=IP=CP$,从而知 P 是$\triangle IBC$ 的外心.又 A' 是$\triangle IBC$ 的外心,则 A' 与 P 重合,从而 A' 在$\triangle ABC$ 的外接圆上.同理,B',C' 也都在$\triangle ABC$ 的外接圆上,由此知 A',B',C',A,B,C 六点共圆,故$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 有相同的外心.

习题 B

1. 设$\triangle ABC$ 的内心为 I,由内心性质 5 有 $IP=BP=CP$,于是 $2IP=BP+CP>BC$,即 $IP>$

$\frac{1}{2}BC$,① 又由性质8有$\frac{AP}{IP}=\frac{AB+AC}{BC}$,② 由①,②有$\frac{AP}{\frac{1}{2}BC}>\frac{AB+AC}{BC}$,于是$AP>\frac{1}{2}(AB+AC)$.

同理$BQ>\frac{1}{2}(BC+AB)$,$CR>\frac{1}{2}(AC+BC)$,此三式相加即证.

2. 设$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CD},\overset{\frown}{DA}$中点分别为$M,N',M',N$,则$MI_c=MA=MB=MI_D$,即$\triangle I_CMI_D$为等腰三角形.又$MM'$平分$\angle DMC$,有$MM'\perp I_CI_D$.同理$MM'\perp I_AI_B$,有$I_AI_B\parallel I_CI_D$.同理$I_BI_C\parallel I_AI_D$,故四边形$I_AI_BI_CI_D$为平行四边形.但$MM'\perp NN'$,而$I_AI_B$,$I_BI_C$分别与它们垂直,即有$I_AI_B\perp I_BI_C$.故$I_AI_BI_CI_D$是矩形.

3.(1)设I为$\triangle ABC$的内心,即I为AA_0,BB_0,CC_0的交点.设$\angle BA_1C=\alpha$,$\angle ABB_1=\beta$,则$\angle BIA_1=\alpha+\beta$,$\angle A_1BI=\beta+\angle A_1BC=\beta+\alpha$,所以$A_1B=A_1I$,易知$BB_1\perp BA_0$,所以$\angle A_1BA_0=90^\circ-\angle A_1BI=90^\circ-\angle BIA_1=\angle A_1A_0B$,$A_1A_0=A_1B=A_1I$.于是$S_{\triangle A_0BI}=2S_{\triangle A_1BI}$.类似地还有其他五个等式,这六个等式相加即得$S_{\triangle A_0B_0C_0}=2S_{AC_1BA_1CB_1}$.

(2)由于A_1,C_1分别是A_0I,C_0I的中点,所以A_1C_1是$\triangle A_0B_0I$的中位线,平分IB,从而$S_{\triangle IA_1C}=S_{\triangle BA_1C_1}$,类似地还有三个等式,将它们相加得$S_{\triangle A_1B_1C_1}=S_{\triangle BA_1C_1}+S_{\triangle AC_1B_1}+S_{\triangle CB_1A_1}=\frac{1}{2}S_{AC_1BA_1CB_1}$,于是只需证明$S_{\triangle A_1B_1C_1}\geqslant S_{\triangle ABC}$.又$S_{\triangle ABC}=2R^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=2R^2\cdot\sin2\alpha\cdot\sin2\beta\cdot\sin2C$($R$为外接圆半径),$\triangle A_1B_1C_1$的内角分别为$\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$,因此$S_{\triangle A_1B_1C_1}=2R^2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\alpha)=2R^2(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)(\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot\sin\gamma)(\sin\gamma\cdot\cos\alpha+\cos\gamma\cdot\sin\alpha)\geqslant2^4R^2\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\cos^2\gamma\cdot\sin^2\gamma}=2R^2\cdot\sin2\alpha\cdot\sin2\beta\cdot\sin2\gamma=S_{\triangle ABC}$.

4. 由3(1)得$A_0A=A_1I$,$C_1C_0=C_1I$,则$A_1C_1\parallel A_0C_0$,$S_{\triangle A_1B_1I}=\frac{1}{4}S_{\triangle A_0B_0I}$,易见$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}S_{\triangle A_0B_0C_0}$.由3题结论得$4S_{\triangle A_1B_1C_1}\geqslant4S_{\triangle ABC}$,即$S_{\triangle A_1B_1C_1}\geqslant S_{\triangle ABC}$.

5. 设$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$AC_2=b'$,$AB_2=c'$,$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,设$\triangle ABC$的内切圆半径为r.由$S_{\triangle AC_1B_2}=\frac{1}{2}AC_1\cdot AB_2\cdot\sin A$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A$,$C_1$是$AB$中点及$S_{\triangle ABC}=rp$,可推得$S_{\triangle AC_1B_2}=\frac{AC_1\cdot AB_2}{AB\cdot AC}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{c'rp}{2b}$.但$S_{\triangle AKB_2}=\frac{1}{2}c'r$,$S_{\triangle AKC_1}=\frac{1}{4}cr$,注意到$S_{\triangle AC_1B_2}-S_{\triangle AKB_2}=S_{\triangle AKC_1}$,则$\frac{c'rp}{2b}-\frac{c'r}{2}=\frac{cr}{4}$,故$2c'(p-b)=bc$,即$(a-b+c)c'=bc$,同理可得$(a+b-c)b'=bc$.另一方面,由已知$S_{\triangle AB_2C_2}=S_{\triangle ABC}$可得$b'c'=bc$.于是由$(a-b+c)(a+b-c)b'c'=b^2c^2$得$a^2-(b-c)^2=bc$,故$a^2=b^2+c^2-bc$.由余弦定理知$\cos\angle CAB=\frac{1}{2}$,故$\angle CAB=60^\circ$.

6. 由$RS\parallel MK$有$\angle MBR=\angle KMB$,$\angle KBS=\angle MKB$,而BM与BK是两条切线,则$BM=BK$,

$\angle KMB=\angle MKB$,从而$\angle MBR=\angle KBS$.连结 IB,则 $IB\perp RS$.又$\angle LMK=90^\circ-\frac{1}{2}\angle C=\angle CKL=\angle BKS$,则$\angle BRM=\angle LMK=\angle BKS$.从而$\triangle BMR\backsim\triangle BSK$,有 $BR:BM=BK:BS$,故 $BM\cdot BK=BR\cdot BS$,即 $BR\cdot BS=BM^2=IB^2-r^2$(r 为内切圆半径)$<IB^2$,即$\angle BIS$ 为锐角.

7. 由例 10 知 $AD=AK$,且$\frac{1}{AK}+\frac{1}{AE}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AB}+\frac{BD}{AB\cdot AD}$及$\frac{BD}{AB\cdot AD}=\frac{1}{AC}$,故$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AE}$.

8. 令 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $B'C'=a'$, $C'A'=b'$, $A'B'=c'$,由题设及正弦定理,得 $AI=c\cdot\sin\frac{1}{2}\angle B/\cos\frac{1}{2}\angle C$ 等三式,$A'I=b'\sin\frac{1}{2}\angle A/\cos\frac{1}{2}\angle B$ 等三式,有 $AI\cdot BI\cdot CI=abc\cdot\tan\frac{1}{2}\angle A\cdot\tan\frac{1}{2}\angle B\cdot\tan\frac{1}{2}\angle C$, $A'I\cdot B'I\cdot C'I=a'b'c'\cdot\tan\frac{1}{2}\angle A\cdot\tan\frac{1}{2}\angle B\cdot\tan\frac{1}{2}\angle C$,故$\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{A'I\cdot B'I\cdot C'I}=\frac{abc}{a'b'c'}=\frac{4RS_\triangle}{4R'S'_\triangle}=\frac{S_\triangle}{S'_\triangle}$,而$\frac{S_\triangle}{S'_\triangle}\leqslant1$,故 $IA\cdot IB\cdot IC\leqslant IA'\cdot IB'\cdot IC'$.

9. 要证 $FA=FG$,即须证$\angle FGA=\angle FAG$.由 A,C,F,G 共圆及 AF 平分$\angle CAD$ 知$\angle FGD=\angle FAD$.还须证$\angle DGA=\angle DAG$.由条件易知 I,E,F 共线,且直线 BI,AF 关于等腰梯形的对称轴 l 对称,即两直线交点 M 在 l 上,l 平分$\angle BMA$ 且 $l/\!/IF$,故 $MI=MF$.又易知 A,B,C,M,D 五点共圆,有$\angle ADC=\angle AMC$,故欲证$\angle DAG=\angle DGA$,只须证$\angle MFC=\angle MCF$(因 A,C,F,G 共圆,$\angle MFC=\angle DGA$),又$\angle MFC+\angle MCF=\angle AMC=\angle ADC=\angle DGA+\angle DAG$,即证 $MF=MC$.但由 BM 平分$\angle CBD$ 及 M 在$\triangle BCD$ 的外接圆上,有 $MI=MC$(内心性质 3),于是 $MF=MC$.

10. 作高 BD,又作 AQ 使$\angle QAD=30^\circ$且 AQ 交 BD 于 Q,连 PQ,易知 P 是$\triangle ABQ$ 的内心(AP,BP 是角平分线),$\angle PQA=60^\circ$.设 PQ 交 AC 于 C',则$\angle PC'A=\angle PQA-\angle QAC=60^\circ-30^\circ=30^\circ=\angle PCA$,故 C' 与 C 重合,从而 $QA=QC$, $BA=BC$.

11. 连 AI 并延长交 BC 于 E,AE 是$\angle A$ 的平分线.设 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.由三角形内角平分线性质有$\frac{BE}{EC}=\frac{a}{b}$, $BE=\frac{ac}{b+c}$.又设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,由已知 $AB+BR=p$, $BR=p-c$, $ME=|BE-BM|=|\frac{ac}{b+c}-\frac{a}{2}|=\frac{a|c-b|}{2(b+c)|}$, $MR=|BM-BR|=|\frac{a}{2}-(p-c)|=\frac{|c-b|}{2}$.从而$\frac{ME}{MR}=\frac{a}{b+c}$,而由内心性质,$\frac{IE}{IA}=\frac{a}{b+c}=\frac{ME}{MR}$,故 $AR/\!/MI$,即 $AJ/\!/MI$.

设 N 是 AB 中点,连 IN,仿上证明得 $CJ/\!/NI$.连 BI 并延长到 F,使 $IF=BI$.连 CF,AF,则 MI,NI 分别是$\triangle BCF$,$\triangle BAF$ 的中位线,$CF/\!/MI$, $AF/\!/NI$,从而 $CF/\!/AJ$, $AF/\!/CJ$, $AJCF$ 是平行四边形,故 $AJ=CF=2MI$.

12. 在 BC 的延长线上取一点 E,使$\angle EAC=10^\circ$,过 B 作 AC 的垂线分别交 AE,AM 于 D,F.连 DM,DC,CF,由$\angle MAC=10^\circ$,$\angle ACB=80^\circ$,知 $AF\perp BC$,故 F 为$\triangle ABC$ 的垂心.又$\angle CAB=30^\circ$,则$\angle FCA=60^\circ$.又$\angle MCA=20^\circ$,则$\angle MCF=40^\circ$,易知$\angle ADB=80^\circ=\angle ACB$,故 A,B,C,D 四点共圆.于是$\angle DCA=\angle DBA=60^\circ$,$\angle MCD=80^\circ$.

在$\triangle AFD$ 中,易知$\angle MFD=80^\circ=\angle MCD$,故 D,M,F,C 四点共圆,所以$\angle MDF=\angle MCF=40^\circ$,从而 DM 平分$\angle ADB$.又 AM 平分$\angle DAB$,故 M 为$\triangle ABD$ 的内心,$\angle MBA=\frac{1}{2}\angle ABD=30^\circ$.

13. 连 MN，取$\triangle AMN$ 的中心 I，I 必在 AD 上，连 IM，IN. 由$\angle B$，$\angle MDN$，$\angle C$ 成等差数列，则$\angle MDN=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$. 又由内心性质，$\angle MIN=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$，则$\angle MDN+\angle MIN=180^\circ$，即 I，M，D，N 四点共圆，从而$\angle MDI=\angle MNI=\frac{1}{2}\angle ANM$. 但$\angle MID=\frac{1}{2}(\angle AMN+\angle MAN)$，则$\angle MDI+\angle MID=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$，即 $MI\perp MD$. 又 MI 平分$\angle AMN$，则 MD 必平分$\angle BMN$. 易知 $MN/\!/BC$，则$\angle BDM=\angle NMD=\angle BMD$，$BM=BD$. 同理可证 $CD=CN$，故 $AB+AC=2(BM+CN)=2(BD+CD)=2BC$，即 AB，BC，AC 成等差数列.

第十三章　三角形外心的性质及应用

习题 A

1. 证$\angle OCB+\angle QPB=90^\circ$.

2. 先证 S、E、C 和 S、F、B 分别共线，再证 S、F、E、A 四点共圆，最后证 O 点在此圆上.

3. 利用 $S_{\triangle ACC'}=S_{\triangle A'CC}$，$S_{\triangle BOC'}=S_{\triangle B'OC}$，$S_{\triangle BOA'}=S_{\triangle B'OA}$以及 $S_{AA'BC}=\frac{1}{2}S_{ACBA'CB'}$ 证明.

4. 证明点 O_A、O_B、O_C 均在$\triangle ABC$ 的外接圆上.

5. 连结 AI 并延长交$\odot O$ 于 E，则 E 为$\overset{\frown}{BC}$的中点，可证 D、O、E 三点共线. 对于圆内接四边形 $ABEC$，由托勒迷定理及 $EB=EC=EI=\frac{1}{2}AE$，可证得 $AB+AC=2BC$.

6. 应用外心张角公式和正弦定理.

7. 作$\triangle ABC$ 的外接圆，连 CO 交圆于 F，连 BF，AF. 由于 $FB\perp BC$，$AH\perp BC$，则 $FB/\!/AH$. 又 $FA\perp AC$，$BH\perp AC$，则 $FA/\!/BH$，从而 $AFBH$ 为平行四边形，故 $BF=AH$. 在$\triangle ADE$ 和$\triangle FBO$ 中，$\angle DAE=\angle BAC=\angle BFO$，$AD=AH=FB$，$AE=AO=FO$，从而$\triangle ADE\cong\triangle FBO$，故 $DE=BO=AO=AE$.

8. 设$\triangle AED$，$\triangle BEC$ 的外接圆半径分别是 R_1，R_2，设 F，G 分别是 ED，EC 的中点，则 $O_1F\perp ED$，$O_2G\perp EC$，$FG \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \frac{1}{2}DC$. 由正弦定理，知 $EF=\frac{1}{2}DE=R_1\cdot\sin\angle A$，$EG=\frac{1}{2}EC=R_2\cdot\sin\angle B$，因 $AD/\!/BC$，有 $\sin\angle B=\sin\angle A$. 从而$\frac{EF}{EG}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{EO_1}{EO_2}$，$\angle O_1FE=\angle O_2GE=90^\circ$，故$\triangle FEO_1\backsim\triangle GEO_2$，即有$\angle FEO_1=\angle GEO_2$，亦即$\angle FEG=\angle O_1EO_2$. 由$\frac{EF}{EO_1}=\frac{EG}{EO_2}$，有$\angle FEG\backsim\triangle O_1EO_2$，从而 $\frac{FG}{O_1O_2}=\frac{EG}{EO_2}=\frac{EG}{R_2}=\sin\angle B$，于是 $O_1O_2=\frac{FG}{\sin\angle B}=\frac{DC}{2\sin\angle B}$.

9. 连 CR，由于$\triangle CDR\backsim\triangle ACR$，有 $CR^2=RD\cdot RA$，由此可知$\odot E$ 与 RC 相切于点 C，从而 C，E，S 三点共线. 同理 B，F，S 三点共线. 连 BS，CS，AE，AF，则$\triangle ABF\backsim\triangle ACE$，从而$\angle FAE=\angle BAC=\angle BSC$，故 S，A，E，F 四点共圆. 又 $OF\perp AB$，$OE\perp AC$，故$\angle FOE+\angle BAC=\angle EOF+\angle BSC=180^\circ$，从而 F，E，O，S 共圆，因此有 A，E，O，F，S 五点共圆.

10. 过 B 作 PO 的平行线交 AD 于 F，交 AC 的延长线于 G，作 $OE\perp BC$ 于 E，则 E 是 BC 的中点，而 $OE\perp BC$，即 $OE\perp EF$. 又 $OD\perp PD$，则 O，E，D，P 四点共圆. 连 ED，知$\angle FDE=\angle OPE$. 因 $BG/\!/$

PO,则$\angle OPB=\angle PBG$,进而$\angle EBF=\angle EDF$,故 B,E,F,D 四点共圆.所以$\angle CEF=\angle FDB=\angle ACB$,从而 $EF/\!/AG$.又 E 为 BC 的中点,则 F 是 BG 的中点.又 $PO/\!/BG$,从而 O 是 MN 的中点,故 $OM=ON$.

11.作 $O_1G\perp EC$ 于 G,作 $O_2H\perp EF$ 于 H.连 GH,由中位线定理,有 $GH \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CF$.设$\triangle CDE$ 的外接圆半径为 R_1,$\triangle EAF$ 的外接圆半径为 R_2,连 O_1E,O_2E,有 $O_1E=R_1,O_2E=R_2$.在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1GE$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle O_2HE$中,由$\frac{EG}{EH}=\frac{\frac{1}{2}EC}{\frac{1}{2}EF}=\frac{R_1\cdot\sin\angle D}{R_2\cdot\sin\angle A}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{O_1E}{O_2E}$,① 得 $\mathrm{Rt}\triangle O_1GE\backsim\mathrm{Rt}\triangle O_2HE$,从而$\angle GEO_1=\angle HEO_2$,$\angle O_1EO_2=\angle GEH$,② 在$\triangle O_1EO_2$与$\triangle GEH$中,由①,②有$\triangle O_1EO_2\backsim\triangle GEH$,则$\frac{O_1O_2}{GH}=\frac{O_2E}{EH}=\frac{R_2}{R_2\sin\angle A}$,得 $O_1O_2=\frac{GH}{\sin\angle A}=\frac{\frac{1}{2}CF}{\sin\angle CBF}=R$.

12.(1)由轴对称的性质有 $MP=MQ$,又由 $AB=AC$,$QM/\!/CA$,有 $MQ=MB$,即知 M 为$\triangle PBQ$ 的外心.同理 N 为$\triangle PCQ$ 的外心,从而$\angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BMQ$,$\angle QPC=\frac{1}{2}\angle QNC$,但$\angle BMQ=\angle BAC=\angle QNC$,从而$\angle BPQ=\angle QPC$.由角平分线性质,即有$\frac{PB}{PC}=\frac{BQ}{QC}$.

(2)由(1)知$\angle BPC=\angle BMQ=\angle BAC$,又 $\frac{PB}{PC}=\frac{BQ}{QC}=\frac{MQ}{NC}=\frac{QM}{QN}=\frac{AN}{AM}$,由此即证.

13.显然,$\triangle ABC$ 是正三角形,$\angle BAC=\angle BCA=60°$,由 $KC\perp BC$ 有$\angle ACK=30°$.又由 $AB=AC=AD$ 可知点 A 是$\triangle BCD$ 的外心,故$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BAC=30°=\angle ACK$.又$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle CAD=\angle CAK$,则$\triangle BCD\backsim\triangle ACK$,即有$\frac{BD}{AC}=\frac{BC}{AK}$,亦即 $AK\cdot BD=AC\cdot BC=BC^2$,故 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}AK\cdot BD$.

14.作$\angle ABK=90°$,K 在 l_1 上,易证 B,C,B',C' 四共点圆,得$\angle AC'B'=\angle ACB$,又 $AK\perp B'C'$,$AA'\perp BC$,故$\angle BAK=\angle A'AC$,从而 $\mathrm{Rt}\triangle ABK\backsim\mathrm{Rt}\triangle AA'C$,故$\angle AKB=\angle ACB$,即有 A,B,K,C 四点共圆,即 K 在$\triangle ABC$ 的外接圆上.又已作$\angle ABK=90°$,可断定线段 AK 必是$\triangle ABC$ 外接圆的一条直径.换言之,直线 l_1 通过$\triangle ABC$ 的外心.同理,直线 l_2,l_3 也通过$\triangle ABC$ 的外心.

习题 B

1.设 O_1,O_2,O_3 为三个等圆的圆心,且$\odot O_1$,$\odot O_2$ 均与 AB 相切,则 O_1,O_2 到 AB 的距离相等,即 $O_1O_2/\!/AB$.同理 $O_2O_3/\!/BC$,$O_3O_1/\!/AC$.又 O_1,O_2,O_3 在$\triangle ABC$ 的角平分线 AI,BI,CI 上,则$\triangle ABC$ 与$\triangle O_1O_2O_3$ 位似,位似中心为 I.又 $KO_1=KO_2=KO_3$,则 K 为$\triangle O_1O_2O_3$ 的外心,故 O,I,K 三点共线.

2.连 QA,QB,OA,OB,因 PB 与$\odot O_1$ 相切,知$\angle QPB=\angle QAP$.同理$\angle APQ=\angle PBQ$.由三角形外角等于不相邻两内角之和,可得$\angle AQB=\angle QPB+\angle QAP+\angle APQ+\angle PBQ=2\angle APB$.又由 O 为$\triangle ABC$ 的外心,有$\angle AOB=2\angle APB$,即有$\angle AQB=\angle AOB$,于是 A,B,O,Q 四点共圆.从而$\angle OQB=$

$\angle OAB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOB)=90^\circ-\angle APB$，$\angle PQO=360^\circ-\angle PQA-\angle AQB-\angle OQB=360^\circ-(180^\circ-\angle APB)-2\angle APB-(90^\circ-\angle APB)=90^\circ$，即 $OQ\perp PQ$.

3. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于 P 点，过 P 作直线 $PH\perp AB$ 于 H，作 DP 的中垂线交 HP 于 Q，交 DP 于 E，下证 Q 为 $\triangle CDP$ 的外心.

过 D 作 $DL\parallel EQ$ 交 HP 于 L，则 $DL\perp DP$，Q 为 PL 的中点. 由 $\angle DLP=\angle BQP=90^\circ-\angle EPQ=90^\circ-\angle HPB=\angle PBH=\angle ACD=\angle DCP$，知 D，P，C，L 四点共圆，记为 $\odot T$. 由 $\angle PDL$ 为直角，因此 Q 为 $\odot T$（即 $\triangle DPC$ 外接圆）的中心，故为其外心.

4. 设 O_1O_3 与 OP 交于 Q，连 OO_1，过 P 作 $PH\perp AB$. 由3题结论知点 O_3 必在直线 PH 上. 又 $OO_1\perp AB$，故 $OO_1\parallel PH$，即 $OO_1\parallel O_3P$. 同理可证 $OO_3\parallel O_1P$，所以四边形 OO_1PO_3 为平行四边形，OP 与 O_1O_3 互相平分. 设它们相交于 G，此即是说 O_1O_2 通过 OP 的中点 G. 同理 O_2O_4 过 OP 的中点 G，故 OP，O_1O_3，O_2O_4 三条直线共点.

5. 作 $\triangle DCP\cong\triangle ABP$，易判断四边形 $ABCD$ 是轴对称图形，其对称轴是过点 P 所作 BC 边的中垂线，显然四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，它必然内接于圆，记此圆为 L. 由 $\angle DCB=\angle ABC=2\angle ACB$，有 $\angle ACD=\angle ACB$. 在 $\odot L$ 中，由 $\angle ACD=\angle ACB$ 有 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AB}$，即 $AD=AB$，此时由 $DP=DC=AB=DA$，知 D 为 $\triangle APC$ 的外心，从而 $\angle PAC=\frac{1}{2}\angle PDC$. 由 $\angle PDC=\angle PAB$，则 $\angle PAC=\frac{1}{3}\angle BAC$（利用外心还可得到：$\angle PCA=\frac{1}{2}\angle PDA$，而由 $PA=AB=AD=PD$，$\triangle PAD$ 为正三角形，则 $\angle PCA=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ$）.

6. 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a，b，c，外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，O 为外心，O 到三边 BC，CA，AB 的距离分别为 d_1，d_2，d_3，易见 $d_1=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{R^2-R^2\sin A}=R|\cos A|$. 同理 $d_2=R|\cos B|$，$d_3=R|\cos C|$.

$d_1+d_2+d_3=R(|\cos A|+|\cos B|+|\cos C|)\geqslant R(\cos A+\cos B+\cos C)$，故只需证 $R(\cos A+\cos B+\cos C)\geqslant 3r$，也即 $\cos A+\cos B+\cos C\geqslant\frac{3r}{R}$. 由于 $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+1$，$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$，于是只须证 $\frac{r}{R}+1\geqslant\frac{3r}{R}$，而由 $R\geqslant 2r$ 即证.

7. 连 OP，AE，BF，MN，易知 O，A，M 及 O，B，N 分别共线. 此时，由 $\angle AEM=\angle AME=\angle OMP=\angle OPM$，知 $AE\parallel OP$. 由 $\angle BFM=\angle BNF=\angle ONP=\angle OPN$，知 $BF\parallel OP$，则 $AE\parallel OP\parallel BF$. 因 $PM\cdot PE=PC\cdot PD=PN\cdot PF$，知 M，N，F，E 四点共圆，有 $\angle PEF=\angle PNM$. 由外心性质，知 $\angle PNM=\frac{1}{2}\angle POM=90^\circ-\angle OPN$，则 $\angle PEF=90^\circ-\angle OPM$，知 $\angle PEF+\angle OPM=90^\circ$，故 $OP\perp EF$. 又已证 $AE\parallel OP\parallel BF$，知 $AE\perp EF$，$BF\perp EF$，故直线 EF 是 $\odot A$，$\odot B$ 的公切线.

注：题目中的内切改为外切，结论亦成立.

8. 取 $\triangle ABC$ 的外心 O，易知 $\angle BOC=2\angle A$，$\angle COA=2\angle B$，$\angle AOB=2\angle C$，设 $S_{\triangle BOC}=x$，$S_{\triangle COA}=y$，$S_{\triangle AOB}=z$，$OA=OB=OC=1$，则 $\frac{x}{y+z}=\frac{\sin 2A}{\sin 2B+\sin 2C}=\frac{\cos A}{\cos(B-C)}$.

同理，$\frac{y}{z+x}=\frac{\cos B}{\cos(C-A)}$，$\frac{z}{x+y}=\frac{\cos C}{\cos(A-B)}$.

由柯西不等式，有$[(x+y)+(z+x)+(x+y)](\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y})\geqslant 9$，即知

$$\frac{\cos A}{\cos(B-C)}+\frac{\cos B}{\cos(C-A)}+\frac{\cos C}{\cos(A-B)}=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}.$$

第十四章　三角形重心的性质及应用

习题 A

1. 易知$\frac{EF}{BC}+\frac{PQ}{AC}+\frac{HG}{AB}=\frac{EF}{BC}+\frac{BP}{BC}+\frac{GC}{BC}=2$，则$\frac{EF}{BC}=\frac{PQ}{CA}=\frac{HG}{AB}=2$，故 O 为$\triangle ABC$ 的重心.

2. 先证 $BD=AE=CF$，再由$\triangle BMP\backsim\triangle BCF$，得$\frac{MP}{CF}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，同理$\frac{PN}{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{MN}{AE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，则 $MP=PN=MN$.

3. 易知 G 到 BC 的距离等于$\triangle ABC$ 内切圆的半径 r，则 BC 边上的高为 $3r$，再利用面积法证明.

4. 证明$\triangle ODG$ 与$\triangle ABC$ 的重心重合.

5. 由 $AM=3$，$BM=4$，$CM=5$，有 $AM^2+BM^2=CM^2$，知两中线 AD，BE 垂直. 于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}\cdot AM\cdot BM=18$.

6. 连 BE，CF，并延长相交于 M，则 M 为 AD 的中点. 由 E，F 分别是$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 的重心，则$\frac{ME}{MB}=\frac{MF}{MC}=\frac{1}{3}$. 于是 $EF\parallel BC$，$EG\parallel BD$. 从而$\frac{MG}{DM}=\frac{ME}{MB}=\frac{1}{3}$，$\frac{DG}{DM}=\frac{BE}{BM}=\frac{2}{3}$，$MG=\frac{1}{3}DM$，$DG=\frac{2}{3}DM$，$AG=AM+MG=DM+\frac{1}{3}DM=\frac{4}{3}DM$，故 $DG:GA=\frac{2}{3}DM:\frac{4}{3}DM=1:2$.

7. 由题设及梯形的中位线性质及三角形重心性质，推知所有这些直线都经过$\triangle ABC$ 的重心，即共点于重心.

习题 B

1. 设 G 为$\triangle ABC$ 的重心，连 DE 并延长到 H 使 $EH=DE$，连 HC，HF，则以三条中线 AD，BE，CF 围成的三角形就是$\triangle HCF$. 当 $BC^2=a^2$，$CA^2=b^2$，$AB^2=c^2$ 成等差数列时，若$\triangle ABC$ 为正三角形，易证$\triangle ABC\backsim\triangle HCF$. 若 $a\geqslant b\geqslant c$，有 $CF=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$，$BE=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$，$AD=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. 将 $a^2+c^2=2b^2$ 分别代入以上三式，得 $CF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$BE=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}c$，从而 $CF:BE:AD=a:b:c$，故有$\triangle ABC\backsim\triangle HCF$. 反之，若有$\triangle ABC\backsim\triangle HCF$，当$\triangle ABC$ 中 $a\geqslant b\geqslant c$ 时，$\triangle HCF$ 中 $CF\geqslant BE\geqslant AD$，且 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle HCF}=(CF:a)^2$. 据"三角形的三条中线围成的新三角形面积等于原三角形面积的$\frac{3}{4}$"，有 $CF^2:a^2=3:4$，即 $3a^2=4CF^2=2a^2+2b^2-c^2$，故 $a^2+c^2=2b^2$.

2. 分两种情况讨论. ①若 G，I 两点重合，易断$\triangle ABC$ 为正三角形，此时 $S_{\triangle AGI}=S_{\triangle BGI}=S_{\triangle CGI}=$

0,结论显然成立.②若 G, I 两点互异,过 G, I 作直线 l.若 l 通过 $\triangle ABC$ 的一个顶点,易推知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.此时 $S_{\triangle AGI}$, $S_{\triangle BGI}$, $S_{\triangle CGI}$ 中一个为零,其余两个相等,结论亦成立;若 l 与 $\triangle ABC$ 的两边相交,不妨设 l 与 AB, AC 相交.延长 AG 交 BC 于 E, E 必为 BC 的中点,连 EI.过 B, E, C 分别作到直线 l 的距离 BB', EE', CC',易证 $BB'+CC'=2EE'$,从而 $S_{\triangle BGI}+S_{\triangle CGI}=2S_{\triangle EGI}$.又由重心性质知 $AG=2GE$,从而 $S_{\triangle AGI}=2S_{\triangle EGI}$,故 $S_{\triangle AGI}=S_{\triangle BGI}+S_{\triangle CGI}$.

3.要证 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 成等差数列,只需证 $2\tan B=\tan A+\tan C$,又在 $\triangle ABC$ 中,由 $\tan B=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\cdot\tan C}$,有 $\tan A+\tan C=-\tan B+\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$.故只需证 $2\tan B=-\tan B+\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$,亦即 $\tan A\cdot\tan B=3$.

因 O 为外心,有 $\angle AOC=2\angle B$, $S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}R^2\cdot\sin\angle AOC=R^2\cdot\sin B\cdot\cos B$.又由 G 是重心,有 $S_{\triangle AGC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot 2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$.注意到 $OG/\!/AC$,有 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AGC}$,故 $R^2\cdot\sin B\cdot\cos B=\dfrac{2}{3}R^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$,从而 $3\cos B=2\sin A\cdot\sin C$,即由 $\cos B=-\cos A\cos C+\sin A\cdot\sin C$,有 $\sin A\cdot\sin C=3\cos A\cdot\cos C$,由此即证.

4.$\triangle ABC$ 中,重心 G 到三边距离之和为 $GG_1+GG_2+GG_3$, $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r,内心 I 到三边距离之和为 $II_1+II_2+II_3=3r$.

记 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,射线 AG 交 BC 于 D,连 GB, GC.则由 $S_{\triangle GCA}=S_{\triangle GAB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$,知

$GG_1=\dfrac{\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}a}=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{3a}$.同理,$GG_2=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{3b}$, $GG_3=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{3C}$.于是 $GG_1+GG_2+GG_3=2\cdot S_{\triangle ABC}\cdot\left(\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{3b}+\dfrac{1}{3c}\right)=\dfrac{1}{3}r\cdot(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant\dfrac{1}{3}\cdot 3^2=3r$,即证.

第十五章 三角形垂心的性质及应用

习题 A

1.B.由 D、H、E、C 四点共圆,得 $AH\cdot AD=AE\cdot AC=AC\cdot AB\cos\angle A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$.同理还有两式,相加即得.

2.2:1.延长 BO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 E,证明四边形 $AHCE$ 为平行四边形即可.

3.不变.分 $\angle A$ 为锐角、直角、钝角三种情况分别讨论.或设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 1,由垂心性质 5,有 $CH=BH=2\cos B$. $S_{\triangle HBC}=\dfrac{1}{2}CH\cdot BH\cdot\sin\angle BHC=\dfrac{1}{2}BH\cdot CH\cdot\sin(180^\circ-\angle A)=2\sin A\cdot\cos^2 B$.又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=2\sin A\cdot\sin^2 B$,故 $S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle HBC}=\sin^2 A\cdot\sin^2 2B$,而 $\sin 2B=\sin A$,故 $S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle HBC}=\dfrac{1}{16}BC^4$(不变).

4. 只需证明 $CI_1 \perp II_2$、$CI_2 \perp II_1$.

5. 存在性可通过作图证明,即设 AH 交$\triangle ABC$ 外接圆于 L,交 BC 于 K,连结 OL 交 BC 于 D,则 $OD + DH = OD + DL = OL = R$($R$ 为$\triangle ABC$ 外接圆半径).类似地可在 CA、AB 上得到点 E、F.证明直线 AD、BE、CF 共点可应用塞瓦定理的逆定理.

6. 只需证明 $OCHM$ 是菱形.

7. 过 D 作 $DG /\!/ CF$ 交 AB 于 G,有 $AM \perp DG$,于是知 M 为$\triangle ADG$ 的垂心,故 $GM \perp AD$, $GM /\!/ BC$.由 $DG /\!/ CF$, D 为 BC 中点,于是知 G 为 BF 的中点,从而 M 为 DF 的中点.

8. 由$\angle BCD = \angle BAC$,有$\angle BCO_2 = \angle CAO$,而$\angle BCO_2 + \angle ACO_2 = 90°$,从而$\angle CAO + \angle ACO_2 = 90°$,于是 $CO_2 \perp AO$,即 $CO_1 \perp OO_2$.同理 $CO_2 \perp OO_1$.即证.

9. 作 BC 边上的高 AD,延长 AD 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D',则 $HD = DD'$.连 PD' 交 DC 于 Q,延长 PA_1(A_1 为 P 在 BC 上的射影)交圆于 U,与 HQ 的延长线交于 V,则$\triangle QVP$ 为等腰三角形.由$\angle AD'P = \angle D'AU = \angle D'PU = \angle B_1A_1P = \angle AUP = \angle D'HV$,可证 $HV /\!/ AV /\!/ A_1B_1$(B_1 为 P 在 AC 上的射影).又 A_1 为 PV 的中点,所以 B_1 为 HP 的中点.

10. 设 BC 中点为 O,连 AO 与 PQ 交于点 G,于是 $AO \perp PQ$.设 AD, BE 是$\triangle ABC$ 的两条高,于是点 E 在$\odot O$ 上.由$\angle HEC = 90° = \angle HDC$,知 H, D, C, E 四点共圆,即有 $AQ^2 = AE \cdot AC = AH \cdot AD$.连 OQ,则 $OQ \perp AQ$.由射影定理,有 $AQ^2 = AG \cdot AO$,即有 $AG \cdot AO = AH \cdot AD$,故 G, O, D, H 四点共圆.连 HG,由$\angle HDO = 90°$,知$\angle HGO = 90°$,从而直线 HG 与 PQ 重合,故 P, H, Q 三点共线.

11. 连 OC, AC,由 C 是弧$\overset{\frown}{AG}$的中点,知 $OC \perp AG$.又 $CD \perp AB$,则知 E 为$\triangle CAO$ 的垂心.连 OE 交 AC 于 M,则 $OM \perp AC$.又 $BC \perp AC$,则 $OM /\!/ BC$.而 M 为 AC 中点,故 $AE = EF$.

12. 由正弦定理,$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$,可知$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$,且$\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$.在$\triangle A'B'C'$中, $A'B' = \sin\angle C$, $B'C' = \sin\angle A$, $C'A' = \sin\angle B$. H 是$\triangle A'B'C'$ 的垂心,由 $\frac{A'H}{\cos\angle A} = \frac{A'H}{\cos\angle A'} = \frac{A'H}{\sin(90° - \angle A')} = \frac{A'H}{\sin\angle A'B'H} = \frac{A'B'}{\sin\angle A'HB'} = \frac{A'B'}{\sin(180° - \angle C')} = \frac{A'B'}{\sin\angle C'} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle C'} = 1$,即 $A'H = \cos\angle A$.同理 $B'H = \cos\angle B$, $C'H = \cos\angle C$.由三角形垂心的唯一性及三圆公共点的唯一性可,知结论获证.

13. 由 $AH^2 + a^2 = 4R^2$ 及 $a = 2AH - 2R$,有 $5a^2 + 4Ra - 12R^2 = 0$,解得 $a = \frac{6}{5}R$.再由正弦定理 $a = 2R\sin A$,得 $\sin A = \frac{3}{5}$.

14. 由正弦定理及等比定理,有 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R$.又 $\frac{AH}{\cos A} = \frac{BH}{\cos B} = \frac{CH}{\cos C} = 2R$,有 $\frac{AH + BH + CH}{\cos A + \cos B + \cos C} = 2R$.因此$\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{AH + BH + CH}{\cos A + \cos B + \cos C}$.

由 H 为锐角三角形内一点,有 $a + b + c > AH + BH + CH$.

故 $\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$.

15. 延长 NH 交$\odot O$ 于 E,作 $OD \perp AC$ 于 D,由垂心性质 9,有 $BH = 2OD = EC$.又 $BH \perp AC$, $EC \perp AC$,知 $BH \mathrel{\underline{\not\!/\!/}} EC$,即 $BECH$ 为平行四边形,点 M 为 BC 中点.或由垂心性质 6,有 $BH = 2R \cdot \cos B$.又

$\angle AEC=\angle ABC$，在 Rt$\triangle AEC$ 中，$EC=2R\cdot\cos B$，则 $BH=EC$. 同理 $CH=EB$，得 $BECH$ 为平行四边形.

16. 连 OB，OC，OP，OF. 因 AB，BC 与⊙O 相切，所以$\angle EBO=\angle OBF$. 又 $AB=BC$，所以 $OB\perp BC$. 同理 $OC\perp BD$，所以 P 为$\triangle OBC$ 的垂心，故 $OP\perp BC$，又 $OF\perp BC$，故 O，P，F 三点共线.

17. 连 EF 并延长交 AB 于 K. 由 $AD\perp BE$，$BC\perp EA$，所以 F 为$\triangle EAB$ 的垂心，则 $EK\perp AB$. 设过 C 的切线与 EK 交于 G，所以$\angle GCB=\angle CAB$. 又 A，C，F，K 四点共圆，所以$\angle CFG=\angle CAB=\angle GCB$，故 $GC=GF$. 又$\angle ECF=90°$，则 G 是 EF 的中点. 同理可知过 D 的切线也过 EF 的中点 G，所以过点 C，D 的切线与 EF 三线共点于 G.

18. 由垂足三角形性质(Ⅲ)，当 $R=1$ 时，$\rho\leqslant r^2$，它是关系式 $\rho\leqslant 1-\frac{1}{3}(1+r^2)$ 的加强.

习题 B

1. 由 BE，CF 为$\triangle ABC$ 的高，知 F，B，C，E 四点共圆，有$\angle AFE=\angle ACB$. 又 $EF/\!/RQ$，知$\angle AFE=\angle ARQ$，从而$\angle ARQ=\angle ACB$，从而 B，R，C，Q 四点共圆，故 $DB\cdot DC=DR\cdot DQ$. ① 连 ED，EM，则 $EM=MB$，$\angle EBM=\angle BEM$. 但$\angle EBM=\angle EPC+\angle PEB$，$\angle BEM=\angle DEM+\angle BED$，$\angle BED=\angle BCF=\angle BAD=\angle PEB$，从而$\angle EPC=\angle DEM$，即有$\triangle DEM\backsim\triangle EPM$. 故 $MB^2=EM^2=MD\cdot MP=MD(MD+PD)=MD^2+MD\cdot PD$，于是 $MD\cdot PD=MB^2-MD^2=(MB+MD)(MB-MD)=BD\cdot(MC+MD)=BD\cdot CD$. ② 由①，②得 $DR\cdot DQ=DM\cdot DP$，即 P，R，M，Q 共圆.

2. 设 H 为$\triangle ABC$ 的垂心，而 M 是边 AC 的中点. 分别在线段 AH 和 CH 上取点 S 和 T，使 $PS\perp AB$ 于 P，$TQ\perp BC$ 于 Q. 将直线 PS 和 QT 的交点记作 K，由于$\angle BPK=\angle BQK=90°$，所以四边形 $BPKQ$ 内接于圆. 现在来证明 K 与 R 相互重合.

$\triangle PBQ$ 为等腰三角形($BP=BQ$)，因为$\angle HPB=\angle HQB$，因此点 K 位于$\angle B$ 的平分线上. 现证 K 亦在直线 HM 上. 事实上，$\triangle PHC_1\backsim\triangle QHA_1$，因它们有两对内角对应相等，因此 $\frac{PH}{HQ}=\frac{C_1H}{HA_1}$. 同理，$\triangle AHC_1\backsim\triangle CHA_1$，因此$\frac{C_1H}{HA_1}=\frac{AH}{HC}$，进而$\frac{PH}{HQ}=\frac{HS}{HT}$，此因$\triangle PHS\backsim\triangle THQ$，故$\frac{HS}{HT}=\frac{PH}{HQ}=\frac{C_1H}{HA_1}=\frac{AH}{HC}$. 由此得知 $ST/\!/AC$. 所以，线段 ST 的中点位于直线 HM 之上，由于 $HSKT$ 是平行四边形，所以点 K 在直线 HM 上，故知点 K 是直线 HM 与$\angle B$ 的平分线的交点. 从而点 K 与点 R 重合.

3. 设$\triangle ABD$，$\triangle ADC$ 的内心分别为 M，N. 又设 BM 的延长线与 CN 的延长线交于 H，CH 所在直线交 AM 于 P，BH 所在直线交 AN 于 Q. 由于 BH，CH 分别为$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线，则 H 为$\triangle ABC$ 的内心. 由 AM 为$\angle BAD$ 的平分线，$AD\perp BC$，$AB\perp AC$，易得$\angle BAD=\angle ACB$，从而$\angle MAD=\angle PCB$，故 $CP\perp AM$. 同理 $BQ\perp AN$. 从而 H 又为$\triangle AMN$ 的垂心. 所以$\angle KAH=\angle LAH$. 又 $AH\perp KL$，所以 $AK=AL$，即$\angle ALK=45°$，即有$\triangle ALN\cong\triangle ADN$. 设 $AD=h$，得 $S_{\triangle AKL}=\frac{1}{2}h^2$，而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ch$，显然$\triangle ABC$ 斜边中线长不小于高，即 $c\geqslant 2h$，故 $S_{\triangle ABC}\geqslant 2S_{\triangle AKL}$.

4. 先看由 P_1 点得的直线 M_1N_1 交$\triangle ABC$ 的高 AD 于 H，垂足 E，F 各是 P_1M_1，O_1N_1 之中点；作 $P_1G\perp BC$ 于 G，显然 E，G，F 共线(西姆松线). 延长 AD 交圆于 K，AK 交 EF 于 L，PH_1 交 EF 于 Q，连 P_1B，P_1C，P_1K，P_1L 及 KC，KG，GH. 由 EF 是$\triangle P_1M_1N_1$ 的中位线知 $P_1Q=QH$；又由 $P_1G/\!/HL$ 知

GP_1HL 为一平行四边形，推得 $GH=P_1L$. 由 P_1,G,C,F 共圆知 $\angle P_1GL=\angle P_1GF=\angle P_1CF$, $\angle P_1KL=\angle P_1KA=\angle P_1CA$，从而 $\angle P_1GL+\angle P_1KL=\angle P_1CF+\angle P_1CA=180°$，故 G,P_1,K,L 四点共圆. 而 $P_1G\parallel LK$，可知四边形 GP_1KL 为等腰梯形，必有 $GK=P_1L$，即有 $GH=GK$，由此易证得 $\triangle GHC\cong\triangle GKC$，推得 $\angle BCH=\angle GCH=\angle GCK=\angle BCK=\angle BAK$，即 $\angle DCH=\angle SAH$（CH 交 AB 于 S）. 从而，有 $\angle ASH=\angle CDH=90°$，即 CS 是 $\triangle ABC$ 的另一条高，故 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 这就是说直线 M_1N_1 通过 $\triangle ABC$ 的垂心. 同样可证 $M_2N_2,M_3N_3,\cdots,M_nN_n$ 也都过 $\triangle ABC$ 的垂心.

5. 利用简单的结论：设在 $\triangle UVW$ 中，$\angle UVW$ 和 $\angle VWU$ 都是锐角，则"点 P 是 $\triangle UVW$ 的垂心"$\Leftrightarrow$"$UP\perp VW$ 且 $\angle VPW=\pi-\angle VUW$". (i) 若 $HD\parallel CF$，并且 H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，则 $CF\perp AB$，且 $\angle AFB=\angle ADB=\pi-\angle AHB=\pi-\angle ACB$. 因此，点 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心. (ii) 若 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心，则显然 $HD\parallel CF$，且 $\angle ACB=\pi-\angle AFB=\pi-\angle AHB$，因此，$A,B,C,H$ 四点共圆.

6. 易知 H_1,H_2,H_3 均在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，于是 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{S_{\triangle AH_3P}}{S_{\triangle H_3BP}}=\dfrac{AH_3\cdot AP}{BH_3\cdot BP}=\dfrac{AH\cdot AP}{BH\cdot BP}$. ①

同理，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{CH\cdot CP}{AH\cdot AP}$. ②

连 BH_1,CP,CH_1，有 $\angle PBH_1=\angle PCH_1$，则

$$\frac{BD}{CD}=\frac{S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{\frac{PD}{PH_1}\cdot S_{\triangle PBH_1}}{\frac{PD}{PH_1}\cdot S_{\triangle PCH_1}}=\frac{S_{\triangle PBH_1}}{S_{\triangle PCH_1}}=\frac{BP\cdot BH}{CP\cdot CH}. \quad ③$$

由①，②，③有 $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AH\cdot AP}{BH\cdot BP}\cdot\dfrac{CH\cdot CP}{AH\cdot AP}\cdot\dfrac{BP\cdot BH}{CP\cdot CH}=1$ 及梅涅劳斯定理之逆，知 D,E,F 三点共线.

第十六章　三角形旁心的性质及应用

习题 A

1. 先证明 OP 与 $\odot O$ 的交点 M 为 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的共同内心，再证明 PO 的延长线与 $\odot O$ 的交点 N 为 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的一个共同旁心.

2. 应用旁切圆的性质、正弦定理和割线定理，通过计算实施证明.

3. 由题设知 BA 和 CA 分别是 $\triangle DBC$ 的 $\angle B$，$\angle C$ 的外角平分线，即 A 为 $\triangle DBC$ 的旁心，所以 DA 是 $\angle BDC$ 的平分线.

作 $BJ\perp AX$ 交 AD 于 J，因 $\angle ABJ=\angle XBL=90°$，$\angle ABC=\angle XBD$，$\angle CBJ=\angle DBJ$，即 BJ 是 $\angle CBD$ 的平分线，从而点 J 是 $\triangle BCD$ 的内心，CJ 平分 $\angle BCD$. 由于 $\angle ACB=\angle YCD$，则 $JC\perp AY$.

因 $\angle ABJ=\angle ACJ=90°$，故四边形 $ACJB$ 内接于圆，且圆心在 $\mathrm{Rt}\triangle ABJ$ 的斜边 AJ（即 AD）上，所以过 A,B,C 的圆的圆心在 AD 上.

4. (1) 由 $p(p-c)=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{4}[(a+b)^2-c^2]=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{4}[c^2-(a-b)^2]=\frac{1}{2}(-a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(a-b+c)=(p-a)(p-b)$，即证.

(2)由 $r_A=p-b,r_B=p-a,r_C=p,r=p-c$,知 $r+r_A+r_B+r_C=p-c+p-b+p-a+p=4p-(a+b+c)=2p$.

5. 连 AO 并延长,过 F 作 BC 的垂线,两线相交于 O',过 O' 作 AC、AB 延长线的垂线 $O'M,O'N$,M,N 为垂足.由 $OE/\!/O'F$,有 $\frac{AO}{AO'}=\frac{OE}{O'F}$.设⊙$O$ 切 AC 于 G,连 OG,则 $OG/\!/O'M$,有 $\frac{OA}{O'A}=\frac{OG}{O'M}$.故 $\frac{OE}{O'F}=\frac{OG}{O'M}$.

又 $OE=OG$,则 $O'F=O'M$.同理有 $O'F=O'N$.从而,以 O' 为圆心,$O'F$ 为半径的圆必切 AN,BC,AM 于 N,F,M,即⊙O' 为△ABC 的旁切圆.由旁心性质 7,知 $BD=CF$.

6. 因 I 是△BEC 和△AFB 的内心,则由内心性质知 $\angle BIC=90°+\frac{\alpha}{2}$,$\angle AIB=90°+\frac{\beta}{2}$.又因 I 是△AED 及△DFC 的旁心,由旁心性质 3,知 $\angle AID=90°-\frac{\alpha}{2}$,$\angle CID=90°-\frac{\beta}{2}$.从而 $S_{\triangle AIB}=\frac{1}{2}IA\cdot IB\cdot\sin\angle AIB=\frac{1}{2}IA\cdot IB\cdot\sin(90°+\frac{\beta}{2})=\frac{1}{2}IA\cdot IB\cdot\cos\frac{\beta}{2}$.

同理,$S_{\triangle AID}=\frac{1}{2}IA\cdot ID\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$,$S_{\triangle BIC}=\frac{1}{2}IB\cdot IC\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$,$S_{\triangle CID}=\frac{1}{2}IC\cdot ID\cdot\cos\frac{\beta}{2}$,而这四个三角形的高都等于内切圆的半径,所以 $\frac{AD\cdot BC}{AB\cdot CD}=\frac{S_{\triangle AID}\cdot S_{\triangle BIC}}{S_{\triangle AIB}\cdot S_{\triangle CID}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

习题 B

1. 用点 O 表示圆 Γ 的圆心,点 O_1 表示 Γ_2 的圆心,点 O_2 表示 Γ_2 的圆心.r,r_A 分别为圆 Γ_2,Γ_1 的半径,点 S 是直线 PQ 与 Γ_1 的交点,连 OO_1,O_2S,OO_2,则 $\angle QSO_1=\angle O_1QS=\angle OQP=\angle OPQ$.利用 O,P,O_2 共线有 $OO_2/\!/O_1S$,从而△RPO_2∽△RSO_1,即有 $RO_2:RO_1=r:r_A$.而 $RO_1=RO_2+O_1O_2$,从而 $RO_2=rO_1O_2/(r_A-r)$,$RO_1=r_AO_1O_2/(r_A-r)$(注意 Γ_1 并不与 Γ 相切).

设 O_1O_2 分别与 Γ_1,Γ_2 相交于 M,N,则 N,M,O_1 共线.又 O_2,P,O 共线,则 $\angle NMQ+\angle NPQ=(\pi-\angle O_1MQ)+(\pi-\angle NPO_2-\angle QPO)=[\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle MO_1Q)]+[\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle PO_2N)-\frac{1}{2}(\pi-\angle POQ)]=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\angle MO_1Q+\angle PO_2N+\angle POQ)=\pi$(其中注意到 $MO_1=QO_1,PO_2=NO_2,PO=QO$),因此,$P,N,M,Q$ 共圆.由此 $RT^2=RP\cdot RQ=RN\cdot RM$($P,N,M,Q$ 共圆)$=(RO_2+r)(RO_1-r_A)=(\frac{rO_1O_2}{r_A-r}+r)(\frac{r_AO_1O_2}{r_A-r}-r_A)=rr_A[\frac{O_1O_2^2}{(r_A-r)^2}-1]$.

设直线 AB 切圆 Γ_1 于点 O_1^*,切圆 Γ_2 于点 O_2^*,则 $AO_1^*=p,AO_2^*=p-a$,于是 $O_1^*O_2^*=AO_1^*-AO_2^*=a$.由于 $O_2O^*\perp O_1^*O_2^*$,$O_1O_1^*\perp O_1^*O_2^*$,因此 $(O_1O_2)^2=O_1^*O_2^{*2}+(r_A-r)^2=a^2+(r_A-r)^2$,从而 $RT^2=rr_A[\frac{a^2+(r_A-r)^2}{(r_A-r)^2}-1]=\frac{rr_Aa^2}{(r_A-r)^2}$.而 $S_{\triangle ABC}=pr$,故 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABO_1}+S_{\triangle ACO_1}-S_{\triangle BCO_1}=\frac{1}{2}AB\cdot r_A+\frac{1}{2}AC\cdot r_A-\frac{1}{2}BC\cdot r_A=(p-a)\cdot r_A$.又 $r=\frac{S_{\triangle ABC}}{p}$,$r_A=\frac{S_{\triangle ABC}}{p-a}$,故 $RT^2=\frac{a^2}{p(p-a)}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p})^2}=$

$p(p-a)$.

2.(1)记 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则 $AP=p-b$, $PM=AM-AP=\frac{1}{2}c-(p-b)=\frac{1}{2}(b-a)$.(2)设圆 Γ 切 AB 边于点 N,则 $NB=p-b=AP$.当 $b>a$ 时,以点 A 为坐标原点,射线 AB 为 x 轴正向建立直角坐标系,则 $B(c,0)$, $C(b\cos A,b\sin A)$.显然 $AN=p-a$, $O(p-a,\frac{S_\triangle}{p})$, $M(\frac{c}{2},0)$, $P(p-b,0)$.设直线 CP 的斜率为 k_1,直线 MQ 的斜率为 k_2,则 $k_1=\frac{b\sin A}{b\cos A-(p-b)}=\frac{b\sin A}{b(1+\cos A)-p}$, $k_2=\frac{S_\triangle/p}{(p-a)-\frac{c}{2}}=\frac{2S_\triangle}{p(b-a)}$.又 $2S_\triangle=bc\cdot\sin A$,故 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{2S_\triangle[b(1+\cos A)-p]}{p(b-a)b\sin A}=\frac{c[b(1+\cos A)-p]}{p(b-a)}$.由于 $c[b(1+\cos A)-p]-p(b-a)=bc(1+\cos A)-\frac{1}{2}[(b+c)^2-a^2]=bc\cos A-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=0$,从而 $k_2=k_1$,因此 $CP/\!/MQ$.于是 $\frac{CB}{QB}=\frac{PB}{MB}=\frac{c-AP}{\frac{c}{2}}=\frac{b+c-a}{c}$,即 $BQ=\frac{ac}{b+c-a}$.　　(*)

当 $a=b$ 时,$\triangle ABC$ 是一个等腰三角形,点 P,N,M 三点重合,则点 Q 与点 C 重合,于是 $BQ=BC=a$,也满足(*)式,故(*)式给出了本题所求的 BQ 长.

3.设 $\triangle AED$ 的内切圆 $\odot O_1$ 交 ED 于 P,则 $ED=EP+PD=r_1(\cot\frac{1}{2}\angle AED+\cot\frac{1}{2}\angle ADE)$.显然 O 是 $\triangle AED$ 的旁心,由旁心性质1知 OE,OD 是 $\triangle AED$ 的两条外角平分线,由于 $\angle O_1EO=90°$,故可得 $ED=r(\cot\angle DEO+\cot\angle EDO)=r(\tan\frac{1}{2}\angle AED+\tan\frac{1}{2}\angle ADE)$.

于是 $\frac{r_1}{r}=\frac{\tan\frac{1}{2}\angle AED+\tan\frac{1}{2}\angle ADE}{\cot\frac{1}{2}\angle AED+\cot\frac{1}{2}\angle ADE}=\tan\frac{1}{2}\angle AED\cdot\tan\frac{1}{2}\angle ADE$.

又 $ED/\!/BC$,有 $\angle AED=\angle B$, $\angle ADE=\angle C$,从而 $\frac{r_1}{r}=\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$.

同理,$\frac{r_2}{r}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$, $\frac{r_3}{r}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$.

注意到在 $\triangle ABC$ 中,$\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}=1$,得 $r=r_1+r_2+r_3$.

4.设另一圆的圆心为 O, AD,BC 的延长线交于 M,则 $\odot O$ 为 $\triangle MCD$ 的旁切圆.设 $MC=a$, $MD=b$, $CD=c$, $\odot O$ 的半径为 r,则由旁心性质5,知 $S_{\triangle MCD}=(p-c)\cdot r=\frac{1}{2}(a+b-c)r$.又 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}(MA+MB)\cdot r$,而 $ABCD$ 是圆内切四边形,则 $\triangle MAB\backsim\triangle MCD$.于是 $\frac{MA}{a}=\frac{MB}{b}=\frac{AB}{c}=k$(常数),即 $AM=ak$, $BM=bk$, $AB=ck$.而 $S_{\triangle MAB}:S_{\triangle MCD}=k^2$,故 $\frac{MA+MB}{a+b-c}=k^2$,即 $\frac{ak+bk}{a+b-c}=k^2$.从而 $a+b=(a+b-c)k=ak+bk-ck=MA+MB-AB$,故 $AB=MA-b+MB-a=(MA-MD)+(MB-MC)=AD+BC$.

第十七章 关联三角形巧合点的性质及应用

习题 A

1. 作高 CF,易知 C 点是$\triangle ABH$ 的垂心.再取$\triangle ABH$ 的外心 O,由于 G 是$\triangle ABH$ 的重心,可知 O,G,C 三点共线(欧拉线).由$\angle B=30°$知$\angle BAH=60°$,亦即$\angle BOH=2\angle BAH=120°$.而$\angle BCH=90°-\angle B=60°$,知$\angle BOH+\angle BCH=120°+60°=180°$,故 O,B,C,H 四点共圆.此时,$\angle OCB=\angle OHB=\frac{1}{2}(180°-\angle BOH)=30°$.从而$\angle ANM=\angle CND=90°-\angle OCB=60°$,故知$\triangle AMN$ 为正三角形.

2. 连 OA,OC,IA,AH,CH. AH、CH 的延长线分别交 BC,AB 于 D,E.在 $Rt\triangle HAE$ 中,$\frac{AE}{AH}=\cos\angle HAE=\cos(90°-\angle B)$,$AH=\frac{AE}{\sin\angle B}$.因$\frac{AE}{AC}=\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$,从而 $AE=\frac{1}{2}AC$,$AH=\frac{AC}{2\sin\angle B}=\frac{2R\cdot\sin\angle B}{2\sin\angle B}=R$($R$ 为外接圆半径).

又$\angle OAC=\angle OCA=\frac{1}{2}(180°-\angle AOC)=90°-\angle B=\angle HAE$,$I$ 为$\triangle ABC$ 的内心,故$\angle IAO=\angle IAH$,$\triangle IAO\cong\triangle IAH$,于是有 $OI=IH$.

3. 若 G,I 两点重合,易断$\triangle ABC$ 为正三角形,此时 $S_{\triangle AGI}=0$,$S_{\triangle BGI}=0$,$S_{\triangle CGI}=0$,结论显然成立.

若 G,I 两点互异时,过 G,I 作直线 l.(i)如果 l 通过$\triangle ABC$ 的一个顶点,易断$\triangle ABC$ 为一等腰三角形,此时 $S_{\triangle AGI}$,$S_{\triangle BGI}$,$S_{\triangle CGI}$中,一个为零,其余两个相等,结论也成立.(ii)如果 l 与$\triangle ABC$ 的两边相交,不妨设与 AB,AC 相交.延长 AG 交 BC 于 E,E 必为 BC 的中点,连 EI.过 B,E,C 分别作到直线 l 的距离 BB',EE',CC'.易证 $BB'+CC'=2EE'$,从而 $S_{\triangle BGI}+S_{\triangle CGI}=2S_{\triangle EGI}$.又由重心性质,知 $AG=2GE$,从而 $S_{\triangle AGI}=2S_{\triangle EGI}$,故 $S_{\triangle AGI}=S_{BGI}+S_{\triangle CGI}$.

4. 设 F 为 AC 的中点,则 E 在 DF 上,且$\frac{DE}{DF}=\frac{2}{3}$.设 G 为 BC 的中点,AG 交 CD 于 H,则 H 为$\triangle ABC$ 的重心.连 FG 交 CD 于 I,则 I 为 CD 的中点,从而$\frac{DH}{DI}=\frac{2}{3}=\frac{DE}{DF}$,$EH/\!/FI/\!/AB$,从而 $DO\perp EH$.又 $HO\perp DF$,从而 O 为$\triangle DEH$ 的垂心,故 $OE\perp CD$.

5. 由心径公式(性质 15),有 $AM=R$,$AN=2R\cdot\cos A$.在$\triangle AMN$ 中用余弦定理,有 $MN^2=R^2+(2R\cos A)^2-2R\cdot 2R\cos A\cdot\cos A=R^2$,故 $MN=R$.

6. 设 BG,BH 的延长线交 AC 于 E,F,于是 $BF=AB\cdot\sin A=2R\sin A\cdot\sin C$,$\frac{BH}{BF}=-\frac{\cos(A+C)}{\sin A\cdot\sin C}=1-\cot A\cdot\cot C$.由 $2\tan B=\tan A+\tan C$ 及 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$,有 $\cot A\cdot\cot C=\frac{1}{3}$,从而$\frac{BH}{BF}=\frac{2}{3}=\frac{BG}{BE}$,故 $GH/\!/AC$.

7. 由$\angle OAI=\frac{1}{2}(C-B)$,$IA=4R\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=2R\cdot(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2})$及 $2BC=AC+AB$,即 $\cos\frac{B+C}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}$,有 $IA=R\cdot\cos\frac{B-C}{2}$.在$\triangle OAI$ 中,$\angle OAI=\frac{1}{2}(C-B)$及 $AO=R$,可得

$\angle OIA = 90°$.

8. 设$\triangle ABC$中,边CA,AB上的高的延长线分别交$\triangle ABC$的外接圆于B_1,C_1,则由性质16(2)有$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C} + S_{\triangle ABC'}$.又由性质16(3),(4)推导可知$S_{\triangle AB_1C} \leqslant S_{\triangle AB'C}$,$S_{\triangle ABC_1} \leqslant S_{\triangle ABC'}$,从而$S_{\triangle ABC} \leqslant S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C} + S_{\triangle ABC'}$,其中等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时成立.

9.(1)因AA_0,BB_0的交点I是$\triangle ABC$的内心,则$A_1I = A_1B$.又BB_0,BA_0分别是$\angle B$的内、外角平分线,则$BB_0 \perp BA_0$,$\angle A_1BA_0 = 90° - \angle BA_0I$,从而$A_1B = A_1A_0 = A_1I$,故$S_{\triangle A_0BI} = 2S_{\triangle A_1BI}$.同理,有类似这样的五个等式.将此六式相加,即有$S_{\triangle A_0B_0C_0} = 2S_{AC_1BA_1CB_1}$.

(2)由性质16(3)可知$S_{\triangle ABC} \leqslant S_{A_1BC} + S_{\triangle AB_1C} + S_{\triangle ABC_1}$,即$2S_{\triangle ABC} \leqslant S_{AC_1BA_1CB_1}$,故$S_{\triangle A_0B_0C_0} = 2S_{AC_1BA_1CB_1} \geqslant 2\cdot 2S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle ABC}$.

10. 由9题(1)可知$A_0A_1 = A_1I$,$C_0C_1 = C_1I$,得$A_1C_1 /\!/ A_0C_0$.又$BB_0 \perp BA_0$,从而$BB_0 \perp A_1C_1$.同理$AA_0 \perp B_1C$,故I为$\triangle A_1B_1C_1$的垂心.由性质16(2)可得$S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle AB_1C_1} + S_{\triangle BA_1C_1} + S_{\triangle CA_1B_1}$,就是$2S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{AC_1BA_1CB_1}$.再由9题(2)的结论可知$4S_{\triangle A_1B_1C_1} \geqslant 4S_{\triangle ABC}$,故$S_{\triangle A_1B_1C_1} \geqslant S_{\triangle ABC}$.

11. 设H是$\triangle ABC$的垂心,则$\angle BHC = 180° - \angle CAB = 180° - \angle C_1A_1B_1$,于是$H,B,A_1,C$四点共圆.同理,$H,C,B_1,A$;$H,A,C_1,B$分别四点共圆.从而$\angle B_1HC_1 = \angle B_1HA + \angle C_1HA = \angle B_1CA + \angle C_1BA = 360° - (\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_1B_1) - (\angle BAC_1 + \angle CAB_1) = \angle B_1A_1C_1 + \angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1$.同理,$\angle C_1HA_1 = 2\angle C_1B_1A_1$,$\angle A_1HB_1 = 2\angle A_1C_1B_1$,故$H$为$\triangle A_1B_1C_1$的外心.

分别过$\triangle ABC$的顶点作对边的平行线,围出$\triangle A_0B_0C_0$,可知H也是$\triangle A_0B_0C_0$的外心,并且A_1在以A_0H为直径的圆上.因而,可将$\triangle A_1B_1C_1$绕H逆时针方向旋转$\angle A_1HA_0$后,得到的三角形与$\triangle A_0B_0C_0$位似(以H为位似中心),所以$\angle HH_1H_0 = \angle HA_1A_0 = 90°$,这里$H_0$,$H_1$分别是$\triangle A_0B_0C_0$和$\triangle A_1B_1C_1$的垂心.所以,只需证明$\triangle ABC$的外心为线段$HH_0$的中点.事实上,利用$\triangle ABC$关于其重心$G$,以$-2$为位似比,所得的位似图形为$\triangle A_0B_0C_0$,可知$\overrightarrow{MH_0} = -2\overrightarrow{MH}$,而由性质4(欧拉线)可知$\overrightarrow{MH} = -2\overrightarrow{MO}$,于是$\overrightarrow{OH_0} = -\overrightarrow{OH}$,所以$O$为$HH_0$的中点.

习题 B

1. 设AI的延长线交$\odot O$于D,交BC于F,连OD交BC于E.显然A,G,E共线.

易证A,M,O,N四点共圆且OA的中点P必是$\triangle AMN$的外心.连PI,OI,由内心性质知$DI = DB = DC$.由托勒迷定理,有$AB\cdot BC + AC\cdot DB = AD\cdot BC$,即$DI(AB + AC) = AD\cdot BC$,从而$\frac{AD}{DI} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2$,亦即$I$为$AD$的中点,所以$OI \perp AD$.在$\mathrm{Rt}\triangle AOI$中,$PI = \frac{1}{2}OA$,故$I$在$\triangle AMN$的外接圆上.易证$PI /\!/ OD$,且$OD \perp BC$,所以$PI \perp BC$.

又$\frac{AG}{GE} = 2$,而$\frac{AI}{IF} = \frac{AB + AC}{BC} = 2 = \frac{AG}{GE}$,从而有$GI /\!/ EF$,即$GI /\!/ BC$,于是$GI \perp PI$,故$GI$与$\odot P$必相切.

2. 若$\triangle ABC$是等边的(点O与I重合),则结论显然成立.今设点O在点I与C之间.作高CE,则

$\angle EIB=90°-\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ODB=90°-\angle ABC$，故$\angle OIB+\angle ODB=180°$，因此，$B,I,O,D$ 四点共圆．于是$\angle IDB=\angle IOB$（同为$\overset{\frown}{IB}$所对的圆周角）．又$\angle IOB=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle ACB$，于是$\angle IDB=\angle ACB$，所以 $ID//AC$．

当点 I 在 O 与 C 之间时，证法同前．

3．设 $AB=c$，$CA=b$，$BC=a$，设半径为 r 的内切圆与$\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 分别切于点 D，E，F，则$\frac{ID}{BD}=\frac{r}{\frac{a+c-b}{2}}=\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$，所以 $r=\frac{\sqrt{2}-1}{2}(a+c-b)$．

由$\sqrt{2}OH=AB-AC$ 以及欧拉定理 $OI^2=R^2-2Rr$（R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径），有 $2(R^2-2Rr)=(c-b)^2$，即 $2R^2-2(\sqrt{2}-1)(a+c-b)R=(c-b)^2$．将 $a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$ 代入上式，化简得 $2-2(\sqrt{2}-1)\cdot(2\sin A+2\sin C-2\sin B)=(2\sin C-2\sin B)^2$，即 $1-2(\sqrt{2}-1)\cdot[\sin A+(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A)-\frac{\sqrt{2}}{2}]=2[(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A)-\frac{\sqrt{2}}{2}]^2$，亦即 $2\sin A\cdot\cos A+(\sqrt{2}-2)\cdot\sin A-\sqrt{2}\cos A+(\sqrt{2}-1)=0$，亦即$(\sqrt{2}\sin A-1)\cdot[\sqrt{2}\cos A-(\sqrt{2}-1)]=0$，则 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $\cos A=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$．由 $\cos A=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$，求得 $\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-2}$，故 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-2}$．

4．设 $ABCDE$ 是$\odot O$ 的一个内接五边形，G 为$\triangle ABC$ 的内心，P 是 DE 的中点，作 $GQ\perp DE$ 于 Q．在直线 GQ 上取一点 H，使$\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$，则$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{GH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})$．

由此可知，满足条件$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})$的唯一的点 H 在直线 GQ 上．同理，可以证明点 H 也在另外的九条直线上．

注：题中 H 点即为圆内接五边形的“垂心”．在圆内接五边形中，由任意三顶点构成的三角形的重心到圆内接五边形的“垂心”的距离，等于外心到“对边”距离的$\frac{2}{3}$．

第十八章　几何变换的性质及应用

习题 A

1．若 C 与 O 重合，则结论显然成立．今设 C 与 O 不重合，将半圆以直径为轴，对称变换成整圆，设 K'，M'为 K，M 关于 AB 的对称点，则 K'，C，M 共线，K，C，M'也共线．$\angle KCM\overset{M}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{KM}+\overset{\frown}{K'M'})=\angle KOM$．故 K，C，O，M 共圆．

2．等腰$\triangle ABC$ 的外心 O 在顶角平分线上，而顶角平分线又是$\triangle ABC$ 的对称轴，以 AO 为轴作$\triangle AOQ$ 的对称$\triangle AOR$，则$\angle OQA=\angle ORA$，$AQ=AR$．

由 $AB=AC$，有 $CR=AR-AC=AQ-AB=BQ=AP$．连 OC，OP，设 OM 是等腰$\triangle OAC$ 的对称轴，则 OM 垂直平分 AC（M 为垂足）．于是 $MR=MC+CR=MA+AP=MP$，从而$\triangle OMR$ 与$\triangle OMP$ 关于 OM 为轴对称，所以$\angle OPA=\angle ORA$．又已证$\angle ORA=\angle OQA$，所以$\angle OPA=\angle OQA$，故 O，A，P，Q 四点共圆．

3．设直线 AB 与 l 的交点为 P，过 P 作直线 $m\perp AB$，分别作出 A，B 关于 l 的对称点 A_1，B_1，则 A_1，B_1 在 m 上．连 AB_1 交 l 于 C，则 C 点为所求．设 CB，CA 与圆的交点为 E，D．由对称性，知$\angle A_1B_1C=\angle ABC$．又$\angle CDE=\angle ABC$，所以，$\angle A_1B_1C=\angle CDE$，$DC\parallel m$，从而 $DE\perp AB$．

4．将$\triangle ABP_i$ 绕 A 点逆时针旋转$\triangle ACP_i'$处，使 AB 重合于 AC．因$\angle AP_iC+\angle AP_i'C=180°$，故 A，P_i，C，P_i'共圆．设 AC，P_iP_i'交于 D 点．由$\triangle AP_iD\backsim\triangle ACP_i\backsim\triangle P_i'CD$，知 $AP_i^2=AD\cdot AC$，$P_i'C\cdot P_iC=DC\cdot AC$，于是 $m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC=(AD+DC)\cdot AC=AC^2=4$，故 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}=400$．

5．易知$\angle ABD=\angle ACD=90°$．分别过 P，Q 引 KL，MN 垂直于 BE 交 BE 于 K，N，交 CF 于 L，M．显然，它们也垂直于 CF，$MN=KL$．由$\triangle BKP\backsim\triangle AEB$，$\frac{KP}{BE}=\frac{BP}{AB}$；$\triangle ABP\backsim\triangle DCP$，$\frac{BP}{AB}=\frac{CP}{DC}$；$\triangle PCL\backsim\triangle CDF$，$\frac{CP}{DC}=\frac{PL}{CF}$．于是$\frac{KP}{BE}=\frac{PL}{CF}$，即$\frac{KP}{PL}=\frac{BE}{CF}$．又$\triangle BQE\backsim\triangle FQC$，有$\frac{BE}{CF}=\frac{MQ}{QN}$（相似三角形对应高的比等于相似比），于是$\frac{KP}{PL}=\frac{MQ}{QN}$，故$\frac{KP}{PL}+1=\frac{MQ}{QN}+1$，即$\frac{KL}{PL}=\frac{MN}{QN}$，故 $PL=QN$．因此 $PQ\perp AD$．

注：此题中，若 P 为直线 AB 与 DC 的交点，可类似证明，得到 $PQ\perp AD$．

6．设这两个等圆的对称中心为 O．从 O 引出的两条射线分别交圆周于 A_1，A_2 及 B_1，B_2，如图 18－19 所示．又 A_3，B_3 及 B_4 分别是 B_2，A_1 及 A_2 关于 O 点的对称点．由对称性知$\overset{\frown}{B_2B_3}=\overset{\frown}{A_1A_3}$，从而$\angle A_3A_2A_1=\angle B_3B_1B_2$，即$\angle A_1A_2B_2=\angle B_2B_1A_1$，所以 A_1，B_1，A_2，B_2 四点共圆．

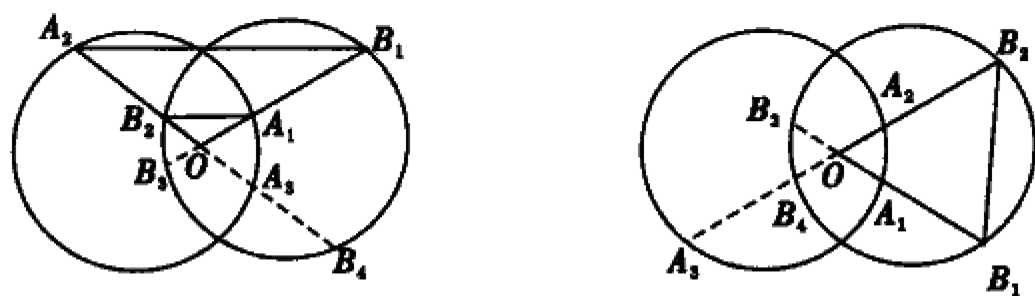


图 18－19

对于右图情形，有$\overset{\frown}{A_3A_1}=\overset{\frown}{B_2B_3}$，从而$\angle A_3A_2A_1=\angle B_2B_1B_3$．而$\angle A_1A_2B_2=180°-\angle A_3A_2A_1$，因此，$\angle B_3B_1B_2+\angle A_1A_2B_2=180°$，故 A_1，B_1，B_2，A_2 四点共圆．

7．由 $MN\parallel KL$，有$\angle MNO=\angle OLK$，$\angle NMO=\angle LKO$，从而$\triangle ONM\backsim\triangle OLK$，即有$\frac{MO}{OK}=\frac{NO}{OL}$．又$\angle OMD=\angle OKB$，$\angle OND=\angle OLB$，因此 $OMDN$ 和 $OKBL$ 关于 O 点为中心位似，所以点 D，O，B 在一直线上．结论证毕．

注：题中条件 $KM\perp NL$ 可省略；当 $ABCD$ 为平行四边形时结论亦成立．

8．以 C 为位似中心，2 为位似比作位似变换，则 $E\to B$，$F\to A$．四边形 $ECFM$ 的外接圆变为$\triangle ABC$ 的外接圆，并且点 M 变为点 G 在$\triangle ABC$ 的外接圆上．由 $CM:MD=2:1$，$CM=MG$，知 $MD=DG=$

$\frac{n}{3}$.由相交弦定理及 $BD=DA$,有 $BD\cdot DA=CD\cdot DG$,即 $BD^2=n\cdot\frac{n}{3}$,即 $BD=\frac{n}{\sqrt{3}}$,亦即 $AB=\frac{2}{3}\sqrt{3}n$.

9. 由 $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{NB}$ 知 $ANBK$ 是平行四边形.因此,等边三角形的边 AB,NK 互相平分于点 P,从而 $CP\perp PA$,$CD=\sqrt{3}PA$ 及 $PM\perp NP$,$PM=\sqrt{3}NP$.

今以 P 点为中心,先作按顺时针方向旋转 90°的变换,再作位似比为$\sqrt{3}$的位似变换,于是 A 点变为 C 点,N 点变为 M 点,从而线段 AN 变为线段 CM.因此 $AN\perp CM$ 且 $CM=\sqrt{3}AN$.

10. 设△ADE 在旋转过程中的任一位置如图 18-5.考虑这样两个位似旋转变换:$S(E,45°,\sqrt{2})$ 和 $S(C,45°,\frac{\sqrt{2}}{2})$.在前一个变换下,点 D 变到 A,EC 的中点 M 变到 M'.在第二个变换下,点 A 变到点 B,点 M' 变到 M.因此 M 是两个变换的复合的不变点.由于 $S(E,45°,\sqrt{2})\cdot S(C,45°,\frac{\sqrt{2}}{2})=S(M,90°,1)$.在这个复合变换下点 D 变到 B,所以 $\angle DMB=90°$.又 $DM=BM$,由此即证得命题成立.

11. 由于要证明的两角在两个三角形中,且题设中有线段的比内分不在一条直线上两线段,条件较分散,须作辅助线将条件集中.不妨连 BD,则 $C\xrightarrow{H(B,\frac{CD}{AB+CD})}F$, $A\xrightarrow{H(D,\frac{CD}{AB+CD})}E$.假设 $D\xrightarrow{H(B,\frac{AB}{AB+CD})}P$,则$\frac{BP}{BD}=\frac{AB}{AB+CD}$,$\frac{DP}{DB}=\frac{CD}{AB+CD}$.(*) 故 $B\xrightarrow{H(D,\frac{CD}{AB+CD})}P$.

因为在位似变换下,直线变成与它平行的直线,则 $PF\parallel CD$,$PE\parallel AB$,从而$\angle PEF=\angle BGF$,$\angle PFE=\angle FQC$.又$\frac{BF}{BC}=\frac{BP}{BD}=\frac{PF}{CD}$,$\frac{DE}{DA}=\frac{DP}{DB}=\frac{PE}{AB}$,由此两式相除,得$\frac{AB}{CD}\cdot\frac{PF}{PE}=\frac{BP}{DP}$.又$\frac{BP}{PD}=\frac{AE}{ED}=\frac{AB}{CD}$,则$\frac{PF}{PE}=1$,从而$\angle PEF=\angle PFE$.故$\angle BGF=\angle FQC$.

12. 设直线 QGO 交 AD 于 R,交 EB 于 P,作位似变换:$A,B,F\xrightarrow{H(E,\frac{ER}{EA})}R,P,Q$;$A,B,F\xrightarrow{H(C,\frac{CO}{CA})}O,P,G$;$A,B,F\xrightarrow{H(D,\frac{DB}{DA})}R,O,G$,则$\frac{RQ}{AF}=\frac{RP}{AB}$,$\frac{RO}{AB}=\frac{RG}{AF}$,$\frac{OP}{AB}=\frac{OG}{AF}$.

由$\frac{GQ}{AF}=\frac{RQ-RG}{AF}=\frac{RQ}{AF}-\frac{RG}{AF}=\frac{RP}{AB}-\frac{RO}{AB}=\frac{OP}{AB}=\frac{OG}{AF}$,故 $OG=GQ$.

习题 B

1. 连 AO_1,AO_2,BO_1,CO_2,DO_2,EO_3,FO_3,易知 AO_2DO_1 为平行四边形,即 $O_2D\mathrel{\underline{\parallel}}AO_1$.同理,有 $O_3E\mathrel{\underline{\parallel}}BO_1$,$O_3F\mathrel{\underline{\parallel}}CO_2$.于是,分别将⊙$O_2$,⊙$O_3$ 平移使之与⊙O_1 重合.设 $CD\xrightarrow{平移(\overrightarrow{O_2O_1})}C'D'$,$EF\xrightarrow{平移(\overrightarrow{O_3O_1})}E'F'$,则 A,O_1,D' 共线,B,O_1,E' 共线,C',O_1,F' 共线,由此即知$\angle AO_1B+\angle CO_2D+\angle EO_3F=\angle AO_1B+\angle C'O_1D'+\angle E'O_1F'=180°$.即证.

2. 将△$A_1B_1C_1$ 绕 A_1 点旋转 α 角到△$A_1B'C'$ 的位置,使 $A_1C'\parallel AB$,则 $C_1E=C'E'+A_1C_1\cdot$

$\sin\alpha$，$B_1D=B'D'-A_1B_1\sin\alpha$，于是 $A_1F\cdot BC+B_1D\cdot AC+C_1E\cdot AB=A_1F\cdot BC+(B'D'-A_1B_1\sin\alpha)\cdot AC+(C'E'+A_1C_1\cdot\sin\alpha)\cdot AB=A_1F\cdot BC+B'D'\cdot AC+C'E'\cdot AB+(A_1C_1\cdot AB-A_1B_1\cdot AC)\cdot\sin\alpha$. 由 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，有 $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$，即 $A_1C_1\cdot AB-A_1B_1\cdot AC=0$. 又因为 $B'D'=A_1D''$，$E'C'=A_1E''$，从而 $A_1F\cdot BC+B_1D\cdot AC+C_1E\cdot AB=A_1F\cdot BC+A_1D''\cdot AC+A_1E''\cdot AB=2S_{\triangle ABC}$（其中 $C'E'\perp AB$ 于 E'，$A_1E''\perp AB$ 于 E''，$A_1D''\perp AC$ 于 D''，$B'D'\perp AC$ 于 D'）.

3.(1)由 $\angle ADB=\angle ACB+\angle CAD+\angle CBD$，知 $\angle CAD+\angle CBD=90°$.

将 D、B 旋转 $90°$ 到 E，则由 $\angle ADB=\angle CAD+\angle CBD+\angle ACB$ 及已知 $\angle ADB=\angle ACB+90°$ 知 $\angle CBE=90°-\angle CBD=\angle CAD$. 又 $\frac{BC}{BE}=\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}$（因 $AC\cdot BD=AD\cdot BC$），知 $\triangle BCE\backsim\triangle ACD$，从而 $\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CE}$，$\angle ACD=\angle BCE$，则 $\angle ACB=\angle DCE$，于是又有 $\triangle ABC\backsim\triangle DEC$，即有 $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CD}$，而 $BE=\sqrt{2}BD$，则 $AB\cdot CD=AC\sqrt{2}BD$，故 $\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}=\sqrt{2}$.

(2)$\triangle ACD$ 的外接圆在 C 点的切线与 CD 夹角等于 $\angle CAD$（弦切角与圆周角），$\triangle BCD$ 的外接圆在 C 点的切线与 CD 夹角等于 $\angle CBD$，且两切线在 CD 不同侧，故它们的夹角等于 $\angle CAD+\angle CBD=90°$，即两切线互相垂直.

4. 若证明类似结论：对于以 B 为位似中心，与以 BK 为直径的圆位似的圆也有类似的性质，则原命题的结论即可成立.

设 $\triangle ABC$ 的三条高 AM，BK，CL 相交于点 H，则以 BH 为直径的 $\odot O$ 与以 BK 为直径的圆位似，且 $\odot O$ 过点 M，L. 由 $OM=OM$，有 $\angle OMB=\angle OBM=90°-\angle ACB$.

设 N 为 AC 的中点，连 MN，则 $\angle AMN=\angle MAN=90°-\angle ACB$，从而 $\angle AMN=\angle OMB$. 于是 $\angle OMN=\angle OMA+\angle AMN=\angle OMA+\angle OMB=\angle AMB=90°$，所以 MN 是 $\odot O$ 的切线.

同理可证 LN 也是 $\odot O$ 的切线.

由位似图形性质的对称性，以 BK 为直径的圆也有同样的性质.

5. 将 $\triangle BCB'$ 沿 $\overrightarrow{DC}$ 平移至 $\triangle EFG$，那么以 D 为中心，位似比为 2，将 BC，$B'C$ 和 $A'D$ 的中点变到 E，G 到 A'. 由图形的对称性可知 $EC=CA$，$\angle ECB=\angle CAD=\angle BCA$，所以 $BC\perp EA$，从而 $EA\perp EF$.

$$\angle AEG=\frac{1}{2}(180°-2\angle FEC)\quad(\text{因 } EA\perp EF)=\frac{1}{2}\angle EFG\quad(\text{因 } EF=BC=B'C=GF)$$

$$=\frac{1}{2}\angle BCB'=\frac{1}{2}\angle ACA'\quad(\text{因}\angle BCB'+\angle B'CA=\angle ACA'+\angle B'CA)$$

$$=\angle AEA'(\text{因 } E,A,A'\text{ 在以 } C \text{ 为圆心的同一圆上}).$$

所以 E，G，A' 共线，因而在上述位似变换下，它们的原象：BC 的中点，$B'C$ 的中点，DA' 的中点也共线.

6. 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，由 $\angle BA_1H=\angle BC_1H=\angle CB_1H=90°$，知 A_1，B，C_1，H 和 A_1，C，B_1，H 分别四点共圆. 因此，$\angle BA_1C_1=\angle BHC_1=\angle B_1HC=\angle B_1A_1C$，从而 $\angle C_1A_1H=90°-\angle BA_1C_1=90°-\angle B_1A_1C=\angle B_1A_1H$，即 A_1H 平分 $\angle B_1A_1C_1$. 同理，B_1H，C_1H 也平分 $\angle A_1B_1C_1$，$\angle A_1C_1B_1$，故 H 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的内心（此可由垂心性质直接得 H 为其内心）. 从而 H 也是 $\triangle A_2B_2C_2$ 的外心.

由 A_1B_2，A_1C_2 分别是 $\triangle A_1B_1C_1$ 内切圆的切线，B_2H，C_2H 分别是内切圆的半径，所以 $A_1B_2 = A_1C_2$，$B_2H = C_2H$，从而 $A_1H \perp B_2C_2$，但 $A_1H \perp BC$，从而 $B_2C_2 /\!/ BC$．同理，$A_2B_2 /\!/ AB$，$A_2C_2 /\!/ AC$．

由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的边对应平行，因此它们是位似形．于是这两个三角形的欧拉线（对应的线）或者平行或者重合．由于 $\triangle ABC$ 的垂心即 $\triangle A_2B_2C_2$ 的外心，而这一点分别在这两个三角形的欧拉线上，所以这两个三角形的欧拉线重合．

7．过点 A 引 $AK /\!/ CB$，交圆 S 于点 K，延长 KD，交圆 S 于点 P_0．现证明：对每一个符合条件的点 M，点 P 和 P_0 重合．

（i）当点 $N \neq P_0$ 时，设点 N 在 $\overset{\frown}{P_0B}$（$\overset{\frown}{CP_0}$）内，由 A, K, N, P_0 共圆，知 $\angle ANP_0$ 与 $\angle AKP_0$ 相等（相补），由 $CB /\!/ AK$，有 $\angle MDP_0 = \angle AKP_0$，则 $\angle MNP_0$ 与 $\angle MDP_0$ 相等（相补），因此，M, D, N, P_0 共圆，$P = P_0$．

（ii）当点 $N = P_0$ 时，以点 P_0 为位似中心，将点 K 变为点 D，直线 AP_0 变换为自身．由 $CB /\!/ AK$，所以线段 AK 变换为线段 MD，即点 A 变换为点 M，于是圆 S 就变换为三角形 NMD 的外接圆，因为 P_0 为位似中心，所以这两圆只有一个公共点，$P = P_0$．

所以，所要求的点 M 的位置应是点 P_0 在 BC 的射影．因为 $\angle A$ 是锐角，所以该射影在线段 BC 内．又因为 $\angle KDC > \angle KBC = \angle ACB$，所以 $\angle KDC$ 为钝角，故点 P_0 在 BC 上的射影不会与点 D 重合．

8．题中条件及结论均满足伸缩变换的不变特性．设 AB 中点为 R，将 $\triangle AMR$ 变换为以 R 为直角顶点的等腰直角三角形，建立仿射坐标系，$M(0,0)$．可设 $A(2,2)$，$R(2,0)$，$B(2,-2)$，$C(-a,-2)$，$D(a,2)$，则 $P(1,1)$，$Q(1,-1)$．由直线 $DP: y-1=\frac{2-1}{a-1}(x-1)$ 和 $CQ: y+1=\frac{-2-(-1)}{-a-1}(x-1)$ 的方程联立，解得 $N(2-a^2,-a)$，点 N 在 $\triangle ABM$ 之外的充要条件是：

$$\begin{cases} x_N \leqslant x_R \\ y_N \leqslant x_N \\ y_N \geqslant -x_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-a^2 \leqslant 2 \\ -a \leqslant 2-a^2 \\ -a \geqslant a^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant a \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{2-a}{2-(-a)} \leqslant 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{|AD|}{|BC|} \leqslant 3.$$
结论获证．

9．可设 $AF = a$，$AE = 2a$，则 $\frac{AF}{AC} = \frac{a}{16}$，$\frac{AE}{AB} = \frac{2a}{12} = \frac{a}{6}$．

再将 $\triangle ABC$ 变换成直角三角形，建立仿射坐标系，设 $B(6,0)$，$C(0,16)$，$A(0,0)$，则 $E(a,0)$，$F(0,a)$，$M(3,8)$．由直线 $AM: y = \frac{8}{3}x$，直线 $EF: x+y=a$ 的方程联立，解得 $G(\frac{3a}{11},\frac{8a}{11})$，故 $\frac{EG}{GF} = \frac{y_G}{y_F - y_G} = \frac{\frac{8}{11}}{1-\frac{8}{11}} = \frac{8}{3}$ 为所求．

10．要证三点共线，若能证其中两点是以第三点为位似中心的一对对应点即可．易知 $\triangle O_1O_2O_3 \backsim \triangle ABC$．又 AO_1，BO_2，CO_3 分别为 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的平分线，应交于一点，即 $\triangle ABC$ 的内心 I，因此 I 是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle O_1O_2O_3$ 的位似中心．又 $QO_1 = QO_2 = QO_3$，即 Q 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外心，且 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，由此即证．

11．由 $M_1M_2 /\!/ A_2A_1$，希望有 $S_1S_2 /\!/ A_1A_2$．由题设，T_1 与 S_1，T_2 与 T_3 都关于 A_1B_1 对称，则 $\overset{\frown}{T_1T_2} =$

$\overset{\frown}{T_3S_1}$.又 T_2 与 S_2,T_3 与 T_1 关于 A_2B_2 对称,则 $\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_2}$,于是 $T_3I\perp S_1S_2$,故 $S_1S_2/\!/A_2A_1$.

同理,$S_2S_3/\!/A_3A_2$,$S_3S_1/\!/A_1A_3$.

又 $M_1M_2/\!/A_2A_1$,$M_2M_3/\!/A_3A_2$,$M_3M_1/\!/A_1A_3$.于是$\triangle M_1M_2M_3$ 和$\triangle S_1S_2S_3$ 的对应边两两平行,故这两三角形或全等或位似.由于$\triangle S_1S_2S_3$ 内接于内切圆 I,而$\triangle M_1M_2M_3$ 内接于九点圆,且$\triangle A_1A_2A_3$ 为不规则三角形,故内切圆与九点圆不重合,从而$\triangle S_1S_2S_3$ 与$\triangle M_1M_2M_3$ 位似.这就证明 M_1S_1,M_2S_2,M_3S_2 共点于位似中心.

12. 由对称性,知 O_1,O_2,M_1,M_2 共线.延长 O_1O_2 与 P_1P_2 相交于 P.取 P 点为反演中心,反演幂 $k=PP_1\cdot PP_2$,则圆 C_1 与 C_2 互为反形.因 A 为两圆的交点,所以 A 的反点仍为 A,即 $PA^2=k$.

又$\angle O_1P_1P_2=\angle P_2M_2O_1=90°$,则 O_1,P_1,P_2,M 共圆,即 $PO_1\cdot PM_2=PP_1\cdot PP_2=k=PA^2$,亦即直线 PA 与$\odot O_1M_2A$ 相切,故$\angle AO_1M_2=\angle PAM_2$.①

同理,$\angle O_2M_1P_1=\angle P_1P_2O_2=90°$,故$\angle AM_1O_2=\angle PAO_2$.②

由②-①得$\angle O_1AM_1=\angle O_2AM_2$,即$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

13. 以 P 为圆心,过 C_1,C_2 的切点作圆 C_3,可知圆 C_3 分别与 C_1,C_2 直交(交点处切线垂直),设 C_1 与 C_2 的两条公切线为 l_1,l_2(l_1,l_2 不过 C_1,C_2 的切点).

作图形关于 C_3 的反演,圆 C_1 和 C_2 因与 C_3 直交而保持不变,l_1,l_2 分别交成圆 B_1,B_2,且均通过反演中心 P,因 l_1,l_2 与 C_1,C_2 相切,所以,B_1,B_2 亦与这两个圆相切.

B_1,B_2 是具有上述性质的仅有两个圆,若还有另外一个圆通过关于 C_3 的反演,可得到三条 C_1,C_2 的公切线,且均不是根轴,这是不可能的,故 B_1,B_2 即为所求.

14. 首先考察点 Q 和 B_1 分别位于直线 BK 的两侧,点 P 和 B_1 分别位于直线 BM 的两侧的情形(其余情形可作类似讨论).直线 QK 与 PM 相交于点 N,因此点 Q 和 P 分别是点 K 和 M 在以 N 为中心的位似变换之下的象(切线变为与自己平行的、切点在弧的中点的切线),从而$\angle NQB+\angle NPB=180°$,并且亦有$\angle KB_1B+\angle KQB=180°$和$\angle MB_1B+\angle MPB=180°$.因此,$\angle KB_1B+\angle MB_1B=180°$,亦即点 B_1 位于直线 KM 之上.进而,$\angle BQB_1=\angle BKB_1=\angle KNM=\angle B_1MB=\angle B_1PB$.又因$\angle QBP+\angle QNP=180°$,故知在四边形 BPB_1Q 中,一组对角相等,且两个邻角之和为 180°,因此,BPB_1Q 为平行四边形.

15. 为确定起见,设点 O 在线段 AB 延长线上 B 的外侧.将 KL 与圆 ω 的交点记作 P 和 Q,将边 BC 和 AD 与 ω 的切点分别记作 M 和 N.过点 P,Q 分别作 ω 的切线 l_1 和 l_2,将切线 l_1(或 l_2)与弦 PQ 的夹角记为 α.

在以 O 为中心,将 ω_1 变为 ω 的位似变换下,过点 K 的切线 BC 变为 l_2,再将 ω_2 变为 ω 的位似变换下,直线 AD 变为 l_1.故知 $BC/\!/l_2$,$AD/\!/l_1$,及$\angle LKC=\angle KLD=\alpha$.又由弦与切线之夹角关系式知$\angle BMN=\angle ANM$.由此可知四边形 $KLNM$ 为等腰梯形,因而 $PQ/\!/MN$,它们在 ω 上截出相等的弧$\overset{\frown}{PQ}$和$\overset{\frown}{MN}$,其数值为 2α.因此该梯形的中位线经过 ω 的圆心,但 KM 的中点与 BC 的中点重合(因三角形的边与内切圆的切点同它与旁切圆的切点关于边的中点对称).同时,LN 的中点也与 AD 的中点重合.故结论获证.

第十九章　空间射影图的性质及应用

习题 A

1. 设 B,M,C,P,N,Q 在过 A 与 PQ 平行的直线上的射影即证.

2. 分别设 A,B,C,P 在对边上的射影即证.

3. 设 P,A 在 OB 所在直线上的射影为 K,D,设 Q,B 在 OA 所在直线上射影为 T,C,所求轨迹为线段 CD.

4. 求得 $\frac{60}{\sqrt{769}}$.

5. 找 C_1B,A_1C 在面 ABB_1A_1 内的射影.

6. 利用性质 8,求得截面面积为 $28\sqrt{34}$.

7. 过 D 作平面 α 的垂线交 α 于 H,由 $\alpha /\!/ \beta, AB\perp\alpha$,得 $DH \mathrel{\underline{\parallel}} AB$.连 AH,HC,在 Rt$\triangle DHC$ 中,$DH=12,DC=13,DH\perp HC$,从而 $HC=5,AH=5,\angle HCA=60°$.

显然 E 在 α 上的射影为 A,F 在 α 上的射影为 CH 的三等分点 P,即 $CP=\frac{1}{3}CH=\frac{5}{3}$.利用余弦定理,求得 $AP=\frac{5}{3}\sqrt{7}$.故 $EF=\frac{5}{3}\sqrt{7}$.

8. 设 $\angle DCA=\theta_1,\angle ECB=\theta_2,\angle DCE=\theta$,所求二面角为 φ.由 $\sin\theta_1=\frac{1}{3},\sin\theta_2=\frac{2}{3}$ 及 $\theta=60°$,由性质 9 的推论 1,求得 $\sin^2\varphi=\frac{4}{9}$.故平面 CDE 与平面 ABC 所成的二面角为 $\arcsin\frac{2}{3}$.

9. 由题设知 $\angle EA_1B_1,\angle CA_1C_1$ 分别是 A_1C,A_1E 与底面 $A_1B_1C_1$ 所成的角,$\angle B_1A_1C_1$ 为 $\angle EA_1C$ 在平面 $A_1B_1C_1$ 上的射影.设 $\angle EA_1B_1=\theta_1,\angle CA_1C_1=\theta_2,\angle B_1A_1C_1=\alpha$,令 $EB_1:BB_1=k$,则 $\tan\theta_1=\frac{EB_1}{A_1B_1}=\frac{EB_1}{BB_1}=k,\tan\theta_2=1$,显然 $\alpha=60°$.由性质 9 的推论 2,有 $\tan^2 45°=(k^2+1-k)/(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$,即 $4k^2-4k+1=0$,亦即 $k=\frac{1}{2}$,从而 $BE=EB_1$.故当点 E 为 BB_1 的中点时,平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的二面角为 $45°$.

10. 过 R 作平面 $ABCD$ 的垂线,则垂足 R' 在线段 CD 内,且 $CR'=1$.

由于 $\triangle AR'B$ 是 $\triangle PRQ$ 在平面 $ABCD$ 上的射影,又可求得 $S_{\triangle ABR'}=\frac{1}{2}AB^2=\frac{9}{2},PQ=\sqrt{10},PR=\sqrt{14},QR=\sqrt{14}$,等腰 $\triangle PQR$ 底边上的高为 $\frac{\sqrt{46}}{2}$,有 $S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\sqrt{115}$.于是 $\cos\alpha=\frac{9}{2}/\frac{\sqrt{115}}{2}=\frac{9}{115}\sqrt{115}$.故 $\alpha=\arccos\frac{9\sqrt{115}}{115}$ 为所求.

习题 B

1. 设二面角 $A-DC-B,A-DB-C,A-BC-D$ 的大小分别为 α,β,γ,而二面角 $C-AB-D$,$B-AC-D,C-AD-B$ 的大小分别为 x,y,z.由性质 8,有

$$S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}\cdot\cos\alpha+S_{\triangle ADB}\cdot\cos\beta+S_{\triangle ABC}\cdot\cos\gamma.$$

结合题目条件，有 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.

同理可证如下等式：$\cos x+\cos y+\cos\gamma=1,\cos x+\cos\beta+\cos z=1,\cos\alpha+\cos y+\cos z=1$.

注意到 $\alpha,\beta,\gamma,x,y,z$ 都属于区间 $(0,\pi)$，由上述等式可得 $\cos\alpha=\cos x,\cos\beta=\cos y,\cos\gamma=\cos z$，从而 $\alpha=x,\beta=y,\gamma=z$.

利用 $\gamma=z$，过 A 作面 BCD 的垂线 AE，过 E 作 $EF\perp AC$，F 为垂足，则 $\angle AFE=\gamma$. 类似地作出 $\angle BGH=z$.

由于 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}AE\cdot S_{\triangle BCD},V_{B-ACD}=\frac{1}{3}BH\cdot S_{\triangle ACD}$. 结合 $V_{A-BCD}=V_{B-ACD}$，以及 $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}$，可知 $AE=BH$，而 $AE=AF\cdot\sin\gamma,BH=BG\cdot\sin z,\gamma=z$，故 $AF=BG$.

再利用 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AF\cdot BG,S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BG\cdot AD,S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BAD}$，可得 $BC=AD$. 类似可证 $AB=CD$，$AC=BD$.

2. 由题设条件知 E 为 SC 的中点，$SB=BC$，可知 $BE\perp SC$. 结合 $DE\perp SC$，可知 $SC\perp$ 面 BDE. 这表明 $\triangle BDE$ 是 $\triangle BDC$ 在平面 BDE 上的射影. 设所求的二面角的度数为 α，则由性质 8，有 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BDC}\cdot\cos\alpha$.

由 $SC\perp$ 面 BDE 及 $SE=EC$，可知 $V_{S-BDE}=V_{C-BDE}$，即 $V_{C-BDE}=\frac{1}{3}SE\cdot S_{\triangle BDE}$. 注意到 $SA\perp$ 面 ABC，E 为 SC 的中点，可知点 E 到面 BCD 的高等于 $\frac{1}{2}SA$. 于是 $V_{E-BCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}SA\cdot S_{\triangle BDC}$，而 $V_{C-BDE}=V_{E-BCD}$，所以 $\frac{1}{3}SE\cdot S_{\triangle BDE}=\frac{1}{6}\cdot SA\cdot S_{BDC}$，故 $\cos\alpha=\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BDC}}=\frac{SA}{2SE}=\frac{SA}{SC}$.

由条件 $SA\perp$ 面 ABC，故 $SA\perp BC$. 结合 $BC\perp AB$，可知 $BC\perp$ 面 SAB，从而 $BC\perp AB$，于是 $SC=\sqrt{2}SB=\sqrt{2}(\sqrt{2}SA)=2SA$，故 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，即 $\alpha=30°$.

3. 过 P 作 $PO\perp$ 面 $ABCD$，过 C 作 $CF\perp DP$，设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，侧棱长 $PC=b$.

注意到 $\triangle CPF$ 与 $\triangle APF$ 中，$PC=PA$，PF 公用，$\angle FPA=\angle CPF$，则 $\triangle CPF\cong\triangle APF$. 又 $CF\perp PD$，可知 $AF\perp DP$，则 $\angle AFC=\beta$，从而 $\cos\beta=\frac{AF^2+CF^2-AC^2}{2AF\cdot CF}=1-\frac{a^2}{CF^2}$.

又 $\cos\alpha=\frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{a^2}{4S_{\triangle PCD}}=\frac{a^2}{2b\cdot CF}$.

又在 $\triangle PCD$ 中，有 $\frac{1}{2}b\cdot CF=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-(\frac{a}{2})^2}$，知 $CF=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$.

于是 $\cos\beta=1-\frac{4b^2}{4b^2-a^2}=\frac{-a^2}{4b^2-a^2}$，$-\cos^2\alpha=\frac{-a^2}{4b^2-a^2}$，故 $\cos\beta=-\cos^2\alpha$.

第二十章　空间向量法及应用

习题 A

1. 选 B. 理由：由 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 形成的平行四边形的面积为 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\sin60°=\frac{3}{2}$，若过点 C 作 $CE\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}$

AB,则 $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$,且以$\triangle CDE$为底面,$BC$为侧棱作的棱柱$ABF-ECD$的体积为$V_{ABCD}$的3倍,而$V_{ABF-ECD}=S_{\triangle CDE}\cdot 2=\frac{3}{2}$,故$V_{ABCD}=\frac{1}{2}$.

2. 选A.理由:因$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=3^2+11^2=130=7^2+9^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{DA}^2$.

由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$,得$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$,两边平方得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$,故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$,于是 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

故$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$只有一个值0.

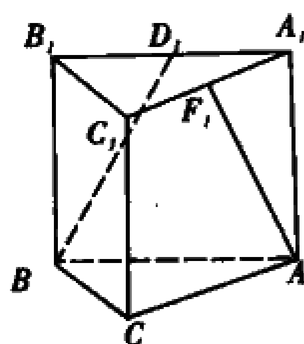


图 20－16

3. 选A.理由:如图20－16,设$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CC_1}|=a$,由$\angle BCA=90^\circ\Rightarrow|B_1D_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,$|\overrightarrow{BD_1}|=\frac{\sqrt{6}}{2}a$,$|\overrightarrow{AF_1}|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$,又设向量$\overrightarrow{BD_1}$与$\overrightarrow{AF_1}$的夹角为$\theta$.

因$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AF_1}=(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1D_1})(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1F_1})=\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{A_1F_1}+\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{A_1F_1}$.

由向量$\overrightarrow{BB_1}\parallel\overrightarrow{AA_1}$且同向,$\overrightarrow{BB_1}\perp\overrightarrow{A_1F_1}$,$\overrightarrow{B_1D_1}\perp\overrightarrow{AA_1}\Rightarrow\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=a^2$,$\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{A_1F_1}=\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$.

而$\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{A_1F_1}=|\overrightarrow{B_1D_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1F_1}|\cos 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})a^2=-\frac{1}{4}a^2$,

则$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AF_1}=a^2+0+0-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$,故$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AF_1}}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{AF_1}|}=\frac{\frac{3}{4}a^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}a^2}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

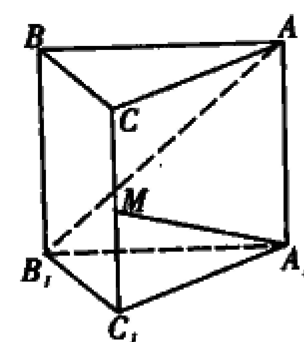


图 20－17

4. 如图20－17,因$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})(\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1M})=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{C_1M}+\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{C_1M}$,

由向量$\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{A_1C_1}$,$\overrightarrow{AA_1}\parallel\overrightarrow{C_1M}$且反向,$\overrightarrow{A_1B_1}\perp\overrightarrow{C_1M}\Rightarrow\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$,$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{C_1M}=|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{C_1M}|\cos 180^\circ=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times(-1)=-3$,$\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{C_1M}=0$,

又由$\angle BAC=30^\circ$,$\angle ACB=90^\circ$,$BC=1\Rightarrow\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=|\overrightarrow{A_1B_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1C_1}|\cos 30^\circ=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$,故$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0-3+3+0$,所以$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{A_1M}$.

5. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{SF}=(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SE})\cdot(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BF})=\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{BF}$,

因为$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{SB}=-a^2$,$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}a^2\cos 60^\circ=\frac{1}{4}a^2$,$\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}a^2\cos 60^\circ=\frac{1}{4}a^2$,

$\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{SA}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AB})=0$

所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{SF}=-a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2=-\frac{1}{2}a^2$,

所以$\cos<\overrightarrow{BE},\overrightarrow{SF}>=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{SF}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{SF}|}=\frac{-\frac{1}{2}a^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=-\frac{2}{3}$,

所以异面直线 BE 和 SF 所成角为 $\arccos\frac{2}{3}$.

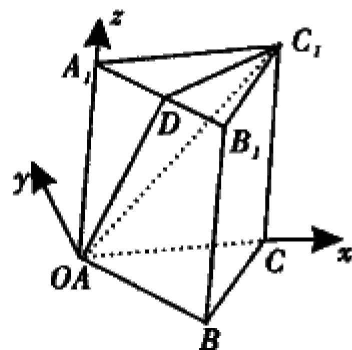


图 20－18

6. 如图 20－18，以 A 为原点，AC 所在直线为 x 轴，AA_1 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系．据题意，有关点的坐标为：$A(0,0,0,)$，$B(\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2}a)$，$C_1(a,0,\sqrt{2}a)$；取 A_1B_1 的中点 D，连结 AD，C_1D.

因为 $C_1D\perp A_1B_1$，所以 $C_1D\perp$ 面 ABB_1A_1.

AC_1 与 AD 所成的角，即 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

由 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{a}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}a,\sqrt{2}a\right)$，$\overrightarrow{AC_1}=(a,0,\sqrt{2}a)$，

得 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AD}\rangle=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故 $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 所成的角，即 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为 30°.

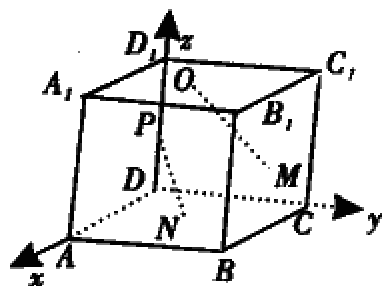


图 20－19

7. 如图 20－19，取 D 为原点，DA，DC，DD_1 为 x，y，z 轴建立直角坐标系，取正方体棱长为 2，则 $P(0,0,1)$，$N(1,1,0)$，$M(1,2,1)$，$O(1,1,2)$.

因 $\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{OM}=(1,1,-1)\cdot(0,1,-1)=2$，

$|\overrightarrow{PN}|\cdot|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$，

所以 PN 与 OM 所成的角 θ 满足 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{PN}|\cdot|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{PN}||\overrightarrow{OM}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\theta=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

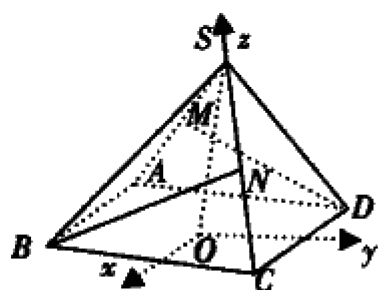


图 20－20

8. 如图 20－20，以底面正方形的中心 O 为原点，以平行于底边的直线及 OS 为 x，y，z 轴建立直角坐标系，则 $B(2a,-2a,0)$，$D(-2a,2a,0)$，$M(-a,-a,\sqrt{14}a)$，$N(a,a,\sqrt{14}a)$，

因为 $\overrightarrow{BN}=(-a,3a,\sqrt{14}a)$，$\overrightarrow{DM}=(a,-3a,\sqrt{14}a)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为 DM 与 BN 公垂线的一个方向向量，则由 $\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{n}=x-3y-\sqrt{14}z=0$，$\overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}=x-3y+\sqrt{14}z=0$ 得 $\boldsymbol{n}=(3,1,0)$，

因为 $\overrightarrow{MN}=(2a,2a,0)$ 所以异面直线 DM 与 BN 之间的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{10}a}{5}$.

9. 以 B 为原点，BC，BA，BP 分别为 x，y，z 轴建立直角坐标系，设 $P(0,0,b)$，依题意有 $A(0,a,0)$，$C(a,0,0)$，$D(a,a,0)$.

因 $\overrightarrow{PA}=(0,a,-b)$，$\overrightarrow{PC}=(a,0,-b)$，$\overrightarrow{PD}=(a,a,-b)$，

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 是面 PAD 的一法向量，

则 $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PA}=ay-bz=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PD}=ax+ay-bz=0$，解得 $\boldsymbol{n}_1=(0,b,a)$；

又设 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$ 是面 PCD 的一法向量，

则 $\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PC}=ax-bz=0$，$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PD}=ax+ay-bz=0$，解得 $\boldsymbol{n}_2=(-b,0,-a)$；

因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-a^2<0$，所以 $\cos\theta<0$，即无论四棱锥的高怎样变化，面 PAD 与面 PCD 所成的二面角 θ 恒大于 $90°$.

10. 建立如图 20－21 的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$、$A_1(1,0,1)$、$B(1,1,0)$、$E\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，于是 $\overrightarrow{DE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DB}(1,1,0)$，$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$.

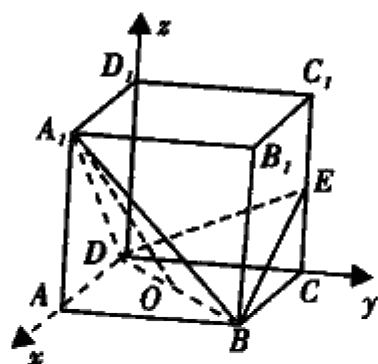


图 20－21

设平面 EBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$.

由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DB}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DE}$，得 $y_1+\frac{1}{2}z_1=0$，$x_1+y_1=0$.

令 $x_1=1$，则 $y_1=-1$，$z_1=2$，所以，$\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

由 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{DA_1}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{DB}$，得 $x_2+z_2=0$，$x_2+y_2=0$.

令 $x_2=1$，则 $y_2=z_1=-1$，所以，$\boldsymbol{n}_2=(1,-1,-1)$.

故 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=(1,-1,2)\cdot(1,-1,-1)=0$，

因此 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$ 故面 $A_1BD\perp$面 EBD.

另证 设 BD 的中点为 $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，则 $\overrightarrow{OA_1}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，平面 EBD 的法量为 $n_1=(1,-1,2)$. 易知 $\boldsymbol{n}_1=2\,\overrightarrow{OA_1}$，这说明 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$ 共线，且 $OA_1\subset$平面 A_1BD. 所以，$OA_1\perp$平面 EBD. 故 $A_1BD\perp$平面 EBD.

第二十一章　平行六面体的性质及应用

习题 A

1. 连 AD_1，AC，设 E 为 OA 的中点，则 $O_1E\parallel D_1O$，于是 $\angle EO_1B$ 即为 D_1O 与 BO_1 所成的角，且 $O_1E=\frac{1}{2}D_1O$. 不妨设正方体棱长为 1，则 $BO_1=D_10=\sqrt{AB^2+AO_1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$O_1E=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$BE=\sqrt{OE^2+BO^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$. 在 $\triangle BO_1E$ 中，$\cos\angle BO_1E=\frac{5}{6}$ 为所求.

2. 问题的难度在于不易确定该平面与正方体的位置. 由条件，设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB，AC，AD 与所给平面的夹角相同，可知所给平面与面 BCD 平行. 进一步，面 BCD 与此正方体的 12 条棱的夹角都相同，因而，只需求出棱 AD 与面 BCD 所成的角. 为此，过 A 作 $AH\perp$面 BCD，H 为在面 BCD 上的射影，连 DH，就有 $\angle ADH=\alpha$. 注意到 $\triangle BCD$ 为正三角形，可证 H 为 $\triangle BCD$ 的外心，重心. 设正方体棱长为 a，则 $DH=\frac{2}{3}\cdot CD\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，而 $\angle AHD=90°$，于是 $\cos\alpha=\cos\angle ADH=\frac{DH}{AD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. 可以用一个平面截正方体得截面为凸五边形. 设点 I 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1 延长线上一点，使得 $IB=\frac{1}{2}BB_1$，E 为 A_1D_1 的中点，F 为 A_1A 上的点，$\frac{AF}{A_1F}=\frac{1}{3}$，则由 $\triangle EAF\backsim$

$\triangle C_1B_1I$,知 $EF/\!/C_1I$,从而 C_1,E,F,I 共面.设此截面交 AB 于 G,交 BC 于 H,连 GH,则截面 C_1EFGH 为凸五边形.

用一个平面去截一个正方体所得截面不能是一个正五边形.若截面可以为一个正五边形,则此五边形的五条边分属于此正方体的五个不同的面,过相对的两个面的截线平行,而正五边形中没有平行的边.结论获证.

4. 由第3题,知截面交棱 BB_1 的延长线于 I,则 $BI=\frac{1}{2}BB_1$,可证 $\frac{AG}{GB}=\frac{AF}{BI}=\frac{1}{2}$,$\frac{BH}{B_1C_1}=\frac{BI}{B_1I}=\frac{1}{3}$,于是 $BG=\frac{2}{3}$,$BH=\frac{1}{4}$,从而可求得 $GH=\frac{\sqrt{5}}{3}$,$C_1H=\frac{\sqrt{13}}{3}$,$FG=\frac{5}{12}$,$EF=\frac{\sqrt{13}}{4}$,$C_1E=\frac{\sqrt{5}}{2}$,故周长为 $\frac{5}{12}+\frac{5\sqrt{5}}{6}+\frac{7\sqrt{13}}{12}$.

5. 将正方体 $PQRS-P'Q'R'S'$ 的各个面依次展开,从正方形 $PQQ'P'$ 出发,依次为 $PP'Q'Q$,$Q'QRR'$,$Q'R'S'P'$,$R'S'SR$,$S'SPP'$,$PSRQ$.从上述展开图可知截面六边形的周长 $\geqslant AA'$,而 $AA'=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,即证.

6. 作出正方体 $AS'BC'-A'SB'C$,则图中三棱锥 $S-ABC$ 符合题设条件.连 $S'C'$,则 $EF/\!/SS'$,EF 与 SA 所成的角即为 SS' 与 SA 所成的角,而 $\angle S'SA=45°$,故异面直线 EF 与 SA 成45°的角.

7. 将题给直三棱柱补成正方体 $ABPC-A_1B_1P_1C_1$.分别取 BP,CF_1 的中点 E,H,连 EF_1,CE,EH,则 $BD_1/\!/EF$,故 $\angle EF_1H$ 为 BD_1 与 CF_1 所成的角.设正方体棱长为2,则 $EF_1=BD_1=\sqrt{5}$,$F_1H=\frac{1}{2}\sqrt{C_1C^2+C_1F_1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,且 $EH\perp CF_1$,故 $\cos\angle EF_1H=\frac{F_1H}{EF_1}=\frac{\sqrt{30}}{10}$ 为所求.

8. 以正方体 $ABCD$ 为底面,GC 为棱,补作长方体 $ABCD-A'B'GD'$.由 $BD/\!/$面 EFG,则 B 到面 EFG 的距离等于直线 BD 到面 EFG 的距离,即 $ABCD$ 的中心 O 到面 EFG 的距离.

过 O 作 $OK\perp GH$ 于 K(H 为 EF 与 AC 的交点),则 $OK\perp$面 EFG,线段 OK 是点 O 到面 EFG 的距离.由题设有 $GC=2$,$CH=3\sqrt{2}$,$OH=\sqrt{2}$,则 $GH=\sqrt{GC^2+CH^2}=\sqrt{22}$.又 $\frac{OK}{GC}=\frac{OH}{GH}$,故

$$OK=\frac{OH\cdot GC}{GH}=\frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

9. 作四面体的外接平行六面体,使四面体的棱成为外接平行六面体的侧面对角线.由于四面体三对对棱相等,则此平行六面体为长方体.设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z,则由

$$\begin{cases}x^2+z^2=a^2\\y^2+z^2=b^2\\x^2+y^2=c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2-b^2)},\\y=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)},\\z=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)}.\end{cases}$$

而 $V_{长方体}=xyz$,$V_{四面体}=\frac{1}{3}V_{长方体}$,故 $V_{四面体}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

10.(Ⅰ)作四面体的外接平行六面体,使四面体的棱成为平行六面体的侧面对角线.设长度分别

为 m_1,m_2 的线段成 α 角，长度为 m_i 的线段所在直线与过相应对棱的两平行平面成 β_i 角，则 $3V=m_1\cdot m_2\cdot\sin\alpha\cdot m_3\cdot\sin\beta_3$，故 $m_1\cdot m_2\cdot m_3=\dfrac{3V}{\sin\alpha\cdot\sin\beta_3}\geqslant 3V$.

(Ⅱ)由四面体重心定义，知 G 将 m_1,m_2,m_3 互相平分. 设棱 A_iA_j 的中点为 B_{ij}，由三角形中线长公式，有 $A_1G^2=\frac{1}{2}A_1B_{24}^2+\frac{1}{2}A_1B_{13}^2-\frac{1}{4}m_2^2=\frac{1}{4}(A_1A_2^2+A_1A_4^2)-\frac{1}{8}(A_2A_4^2-A_1A_3^2)-\frac{1}{4}m_2^2$.

同理，$A_2G^2=\frac{1}{4}(A_2A_3^2+A_2A_1^2)-\frac{1}{8}(A_3A_1^2-A_2A_4^2)-\frac{1}{4}m_2^2$，

$A_3G^2=\frac{1}{4}(A_3A_4^2+A_3A_2^2)-\frac{1}{8}(A_4A_2^2-A_3A_1^2)-\frac{1}{4}m_2^2$，

$A_4G^2=\frac{1}{4}(A_4A_1^2+A_4A_3^2)-\frac{1}{8}(A_1A_3^2-A_4A_2^2)-\frac{1}{4}m_2^2$.

于是 $\sum\limits_{i=1}^{4}A_iG^2=\frac{1}{2}(A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_1^2)-m_2^2$.

同理，$\sum\limits_{i=1}^{4}A_iG^2=\frac{1}{2}(A_1A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_2^2+A_2A_1^2)-m_3^2$，

$\sum\limits_{i=1}^{4}A_iG^2=\frac{1}{2}(A_1A_4^2+A_4A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_1^2)-m_1^2$.

故 $3\sum\limits_{i=1}^{4}G_iA=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}A_iA_j-(m_1^2+m_2^2+m_3^2)$，而 $m_1^2+m_2^2+m_3^2\geqslant 3\sqrt[3]{9V^2}$，$A_iG=\frac{3}{4}A_iG_i$，由此即证.

(Ⅲ)由斯特瓦尔特定理，有

$$A_1G_1^2=\frac{1}{3}A_1A_2^2+\frac{2}{3}A_1B_{34}^2-\frac{2}{9}A_2B_{34}^2$$

$$=\frac{1}{3}A_1A_2^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A_1A_4^2+\frac{1}{2}A_1A_3^2-\frac{1}{4}A_3A_4^2\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}A_2A_3^2+\frac{1}{2}A_2A_4^2-\frac{1}{4}A_3A_4^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}(A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_1A_4^2)-\frac{1}{9}(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_4^2).$$

同理，$A_2G^2=\frac{1}{3}(A_2A_3^2+A_2A_4^2+A_2A_1^2)-\frac{1}{9}(A_3A_4^2+A_3A_1^2+A_4A_1^2)$，

$A_3G_3^2=\frac{1}{3}(A_3A_4^2+A_3A_1^2+A_3A_2^2)-\frac{1}{9}(A_4A_1^2+A_4A_2^2+A_1A_2^2)$，

$A_4G_4^2=\frac{1}{3}(A_4A_1^2+A_4A_2^2+A_4A_3^2)-\frac{1}{9}(A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_2A_3^2)$.

于是，$\sum A_iG_i^2=\frac{2}{3}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}A_iA_j-\frac{2}{9}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}A_iA_j=\frac{4}{9}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}A_iA_j\geqslant\frac{16}{3}\sqrt[3]{9V^2}$.

11. 作长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，使 $\angle ABD_1=\alpha$，$\angle B_1BD_1=\beta$，$\angle CBD_1=\gamma$. 令 $AB=a$，$BC=b$，$B_1B=c$.

(Ⅰ)由 $\tan\alpha=\dfrac{AD_1}{AB}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$，$\tan\beta=\dfrac{B_1D_1}{B_1B}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$，$\tan\gamma=\dfrac{D_1C}{BC}=\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}$，有

$\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma\geqslant\dfrac{\sqrt{2bc}}{a}\cdot\dfrac{\sqrt{2ab}}{b}\cdot\dfrac{\sqrt{2ac}}{b}=2\sqrt{2}$.

（Ⅱ）在三面角 $B-AD_1C$ 中，有 $\alpha+\gamma>\angle ABC=\frac{\pi}{2}$. 同理 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$，$\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$，故 $\frac{3\pi}{4}<\alpha+\beta+\gamma$.

在三面角 $O-ACD_1$ 中，$\angle AOD_1+\angle COD_1+\angle AOC<2\pi$，即 $2\alpha+2\beta+2\gamma<2\pi$，故 $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. 由此结论获证.

注：若令 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha_1$，$\beta=\frac{\pi}{2}-\beta_1$，$\gamma=\frac{\pi}{2}-\gamma_1$，则知 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 均为锐角，且 $\sin^2\alpha_1+\sin^2\beta_1+\sin^2\gamma_1=1$，有 $\frac{\pi}{2}<\alpha_1+\beta_1+\gamma_1<\frac{3}{4}\pi$.

12. 设 $a=\cos^2\alpha$，$b=\cos^2\beta$，$c=\cos^2\gamma$，且 α,β,γ 为锐角.

作长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，使 $\angle ABD_1=\alpha$，$\angle B_1BD_1=\beta$，$\angle CBD_1=\gamma$. 令 $AB=x$，$BC=y$，$B_1B=z$，$BD_1=l$，则 $\cos\alpha=\frac{x}{l}$，$\cos\beta=\frac{z}{l}$，$\cos\gamma=\frac{y}{l}$.

由 α,β,γ 均为锐角，则 $\cos\alpha>0$，$\cos\beta>0$，$\cos\gamma>0$，于是 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{x+y+z}{l}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}}{l}\leqslant\frac{\sqrt{l^2+2(x^2+y^2+z^2)}}{l}=\sqrt{3}$.

注：由上可知 α,β,γ 均为锐角，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，则有 $0<\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\sqrt{3}$.

习题 B

1. 因 x 表示立方体的棱长，则题中所说的体积差为

$$f(x)=\begin{cases}abc-x^3, & \text{当 } 0<x\leqslant a \text{ 时},\\ abc+(x-a)x^2-ax^2, & \text{当 } 0<x\leqslant b \text{ 时},\\ x^3+ab(c-x)-abx, & \text{当 } b<x\leqslant c \text{ 时},\\ x^3-abc, & \text{当 } c<x \text{ 时}.\end{cases}$$

注意到当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 是连续的，且它的系数为

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2, & \text{当 } 0<x<a \text{ 时},\\ 3x^2-4ax, & \text{当 } 0<x<b \text{ 时},\\ 3x^2-2ab, & \text{当 } b<x<c \text{ 时},\\ 3x^2, & \text{当 } x>c \text{ 时}.\end{cases}$$

因此，当 $0<x<a$ 时，函数 $f(x)$ 是递减的. 当 $x>b$ 时，则是逆增的，而在区间 (a,b) 上，因为 $3x^2-4ax<3b^2-4ab\leqslant0$，所以如果 $b<\frac{4}{3}a$，则 $f(x)$ 是递减的；如果 $b>\frac{4a}{3}$，则 $f(x)$ 在 $x=\frac{4a}{3}$ 处有极小值. 于是，函数 $f(x)$ 的最小值要么在 $x=b$ 处取到（当 $b\leqslant\frac{4a}{3}$ 时），要么在 $x=\frac{4a}{3}$ 处取到（当 $b>\frac{4a}{3}$ 时），从而所求的 $x_{\min}$ 为 $\{b,\frac{4a}{3}\}$.

2. 过给定的立方体 $A_1A_2A_3A_4-A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的中心 O 作垂直于对角线 $A_1A'_3$ 的平面，它分别过棱 $A'_1A'_4$，$A_2A'_2$，A_3A_4 的中点 B_1,B_2,B_3. 又点 B_1,B_2,B_3 到顶点 A_1 与 A'_3 的距离相等，都是 $\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

且 $B_1O=B_2O=B_3O$, $B_1B_2=B_2B_3=B_1B_1=\sqrt{\frac{3}{2}}a>\frac{\sqrt{5}}{2}a$,所以正棱锥 $A_1B_1B_2B_3$ 及 $A'_3B_1B_2B_3$(它们没有公共内点)各含有一个正四面体,其高为$\frac{\sqrt{3}}{2}a=A_1O=A'_3O$,而其底面$\triangle B'_1B'_2B'_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 关于中心 O 是位似的.最后,所求的正四面体分别在 $A_1B'_1B'_2B'_3$ 与 $A'_3B'_1B'_2B'_3$ 的内部,它们关于其中心是位似的,其位似系数为$\frac{2\sqrt{2}}{3}<1$,而高为$\sqrt{\frac{2}{3}}a$,从而其棱长即为 a.

第二十二章　一般四面体的性质及应用

习题 A

1. 由于过不在同一平面上的四点 A,B,C,A_1 可确定一个球面,设该球面分别与棱 SB,SC 交于 B'_1,C'_1,四边形 $A_1B'_1BA$ 和 $A_1C'_1CA$ 分别内接于侧面 SAB 及 SAC 与球面的交线的圆,由圆的割线定理,有 $SA_1\cdot SA=SB_1\cdot SB$, $SA_1\cdot SA=SC'_1\cdot SC$.于是 $SB'_1=\frac{SA_1\cdot SA}{SB}=SB_1$, $SC'_1=\frac{SA_1\cdot SA}{SC}=SC_1$.

因此,B'_1,C'_1 分别重合于 B_1,C_1,即 B_1,C_1 在所确定的球面上,亦即 A,B,C,A_1,B_1,C_1 共在一个球面上.

2. 在线段 CD 上取点 Q,使 $CQ:QD=\delta:r$;在线段 BQ 上取一点 R,使 $BR:RQ=(\gamma+\delta):\beta$;在线段 AR 上取一点 P,使 $AP:PR=(\beta+\gamma+\delta):\alpha$,则点 P 为所求的点.

事实上,$\frac{V_{PBCD}}{V_{ABCD}}=\frac{RP}{RA}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$,

$$\frac{V_{PCDA}}{V_{BCDA}}=\frac{V_{PCDA}}{V_{RCDA}}\cdot\frac{V_{RCDA}}{V_{BCDA}}=\frac{PA}{RA}\cdot\frac{RQ}{BQ}=\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\cdot\frac{\beta}{\beta+\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},$$

$$\frac{V_{PDAB}}{V_{CDAB}}=\frac{V_{PDAB}}{V_{RDAB}}\cdot\frac{V_{RDAB}}{V_{QDAB}}\cdot\frac{V_{QDAB}}{V_{CDAB}}=\frac{AP}{AR}\cdot\frac{BR}{BQ}\cdot\frac{DQ}{DC}=\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\cdot\frac{\gamma+\delta}{\beta+\gamma+\delta}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+\delta}$$

$$=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},$$

$$\frac{V_{PABC}}{V_{DABC}}=\frac{V_{PABC}}{V_{RABC}}\cdot\frac{V_{RABC}}{V_{QABC}}\cdot\frac{V_{QABC}}{V_{DABC}}=\frac{AP}{AR}\cdot\frac{BR}{BQ}\cdot\frac{CQ}{CD}=\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\cdot\frac{\gamma+\delta}{\beta+\gamma+\delta}\cdot\frac{\delta}{\delta+\gamma}$$

$$=\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

故　$V_{PBCD}:V_{PCDA}:V_{PDAB}:V_{PABC}=\alpha:\beta:\gamma:\delta$,故点 P 为所求.

3. 由 $BE=EF=FC$,则 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AFC}$,

即　$V_{ABED}=V_{AEFD}=V_{AFCD}=V'$,

而　$\frac{V}{V'}=\frac{V_{ARGQ}}{V'}+\frac{V_{AGHQ}}{V'}+\frac{V_{AHPQ}}{V'}$

$$=\frac{AR\cdot AG\cdot AQ}{AB\cdot AE\cdot AD}+\frac{AG\cdot AH\cdot AQ}{AE\cdot AF\cdot AD}+\frac{AH\cdot AP\cdot AQ}{AF\cdot AC\cdot AD}\geqslant3\left(\frac{AR\cdot AG\cdot AQ}{AB\cdot AE\cdot AD}\cdot\frac{AG\cdot AH\cdot AQ}{AE\cdot AF\cdot AD}\cdot\frac{AH\cdot AP\cdot AQ}{AF\cdot AC\cdot AD}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=3\left(\frac{AR\cdot AP\cdot AQ}{AB\cdot AC\cdot AD}\cdot\frac{AG\cdot AH\cdot AQ}{AE\cdot AF\cdot AD}\cdot\frac{AH\cdot AG\cdot AQ}{AF\cdot AE\cdot AD}\right)^{\frac{1}{3}}=3\left(\frac{V_1}{V'}\cdot\frac{V_1}{V'}\cdot\frac{V_1}{V'}\right)^{\frac{1}{3}}$$,从而 $V\geqslant3V_1$.

由证明过程易知,当且仅当$\frac{AR\cdot AG\cdot AQ}{AB\cdot AE\cdot AD}=\frac{AG\cdot AH\cdot AQ}{AE\cdot AF\cdot AD}=\frac{AH\cdot AP\cdot AQ}{AF\cdot AC\cdot AD}$,即 $RP\parallel BC$ 或 RP 与 BC 重合时,取得等号.

4. 连 OA,OB,OC,OD 延长分别交对面于 A_1,B_1,C_1,D_1. 令 $V_{ABCD}=V$, $V_{OBCD}=V_1$, $V_{OACD}=V_2$, $V_{OABC}=V_3$, $V_{OABD}=V_4$, 则$\frac{V_1}{V}+\frac{V_2}{V}+\frac{V_3}{V}+\frac{V_4}{V}=1$,从而$\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}+\frac{OD_1}{DD_1}=1$,亦即

$$\frac{OA_1}{R+OA_1}+\frac{OB_1}{R+OB_1}+\frac{OC_1}{R+OC_1}+\frac{OD_1}{R+OD_1}=1. \qquad (*)$$

不妨设 $OA_1\leqslant OB_1\leqslant OC_1\leqslant OD_1$,下证 $OA_1\leqslant\frac{R}{3}=R_0$. 因$\frac{t_2}{R+t_2}\geqslant\frac{t_1}{R+t_1}$,当 $t_2\geqslant t_1>0$ 时成立.若 $OA_1>\frac{R}{3}=R_0$,则$\frac{OA_1}{R+OA_1}>\frac{R_0}{R+R_0}=\frac{1}{4}$,则(*)式左边$>1$,矛盾.从而 $OA_1\leqslant R_0$.

作 $OO_1\perp$面 BCD,则 O_1 为$\triangle BCD$ 的外心,$O_1B=O_1C=O_1D=R_A=\sqrt{R^2-OO_1^2}\geqslant\sqrt{R^2-OA_1^2}\geqslant\sqrt{R^2-R_0^2}=2\sqrt{2}R_0$.

设$\triangle BCD$ 的最大边长为 BC,则$\angle BO_1C\geqslant120°$,从而 $BC\geqslant2R_A\cdot\sin60°\geqslant2\sqrt{6}R_0=\frac{2}{3}\sqrt{6}R$.证毕.

5. 设 E 为 AB 的中点,A 在面 DEC 的射影为 H,连 HE,则由 $V_{ADEC}=V_{BDEC}$ 有 $AH\cdot S_{(CD)}=\frac{3}{2}V$.

在 Rt$\triangle AHE$ 中,$AH\leqslant AE=\frac{1}{2}AB$,故$\frac{1}{S_{(CD)}}=\frac{2AH}{3V}\leqslant\frac{AB}{3V}$.

同理,可得$\frac{1}{S_{(BC)}}\leqslant\frac{AD}{3V}$等五式,相加即证.其中等号当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时取得.

6. 设四面体 $KLMN$ 的面 KLM 具有最大的周长,又设 A_1,B_1,C_1,D_1 分别是点 A,B,C,D 在平面 KLM 上的射影,而且设折线 Γ 是四面体 $KLMN$ 在这个平面上的射影,再设 P_{RSTQ} 是联结点 R,S,T,Q 中任意两点所得到的六条线段长度的和,则有① $P_{KLMN}\leqslant2P_{KLM}$;② $P_{KLM}\leqslant P_\Gamma$;③ $P_\Gamma\leqslant\frac{2}{3}P_{A_1B_1C_1D_1}$;④ $P_{A_1B_1C_1D_1}\leqslant P_{ABCD}$.由此即证.

7. 设 A_1,B_1,X_1,Y_1 分别是面 BXY,XYA,YAB,ABX 与球面的切点,于是$\triangle XY_1B\cong\triangle XA_1B$, $\triangle AY_1B\cong\triangle AB_1X$ 等等.利用这两个等式,则可以说明空间四边形 $AXBY$ 的角之和等于$\angle AY_1B+\angle AX_1B=2\angle AX_1B$,而且可以证明$\angle AY_1B+\angle AX_1B$ 不依赖于 X,Y.

8. 过 D 作 $DP\perp$面 ABC 于 P,作 $DH\perp BC$ 于 H.连 PH,则 $PH\perp BC$,$\angle DHP=30°$,由已知 $S_{\triangle BCD}=80$, $BC=10$,得 $DP=\frac{1}{2}DH=8$,从而 $V_{ABCD}=\frac{1}{3}DP\cdot S_{\triangle ABC}=320$.

9. 设 V 为四面体 $ABCD$ 的体积,则有$\frac{V}{V_{OBCD}}=\frac{AA_1}{OA_1}=\frac{AO}{A_1O}+\frac{OA_1}{OA_1}=k+1$,同理$\frac{V}{V_{OACD}}=\frac{V}{V_{OABD}}=\frac{V}{V_{OABC}}=k+1$.由此得 $k+1=\frac{4V}{V_{OBCD}+V_{OACD}+V_{OABD}+V_{OABC}}=\frac{4V}{V}=4$,求得 $k=3$.

10. 答案是否定的.设通过长为 d 的线段 AB 的两个端点各作一条与 AB 垂直的直线,而且这两条直线也互相垂直,在这两条直线上分别截取以 A,B 为中点、长为 a 的线段,以这两条线段的端点

为四面体的顶点，该四面体的每个面的面积等于$\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{a}{2})^2+d^2}=\frac{1}{4}a\sqrt{a^2+4d^2}$，由性质15知其体积为$\frac{1}{6}a^2d$.

因此，分别具有 $a_1=3,d_1=2$ 与 $a_2=1,d_2=\sqrt{56}$的两个四面体的界面面积相等(因 $a_1\cdot\sqrt{a_1+4d_1^2}=a_2\cdot\sqrt{a_1^2+4d_2^2}=15$)，而其体积不等，因为 $a_1^2d_1=18\neq\sqrt{56}=a_2^2d_2$.

11. 为使连接点 B,C 与$\triangle ACD$，$\triangle ABD$ 内切圆中心的两条直线相交，其必要充分条件是，它们在同一个平面上. 而这等价于，$\angle ABD$ 和$\angle ACD$ 的平分线与棱 AD 交于同一点. 根据三角形平分线的性质，后一条件当且仅当$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$，即 $AB\cdot CD=AC\cdot BD$ 时成立. 于是，如果在题中所说的四条直线交于一点，则它的对棱长度的乘积相等. 反之，如果所说的三个乘积相等，则四条直线中任意两条都相交，且任意三条不共面. 因此所有直线交于同一点.

12. 可以证明所有直线 K_nL_n 都过某个固定点 O，而点 O 在过顶点 A 且平行于直线 BC 的直线上，其中 $n\in\mathbf{N}^+$. 事实上，如果直线 K_nL_n 与直线 BC 交于点 P(位于射线 CB 上)，则由于$\triangle K_nBP$ 与$\triangle K_nAO$ 相似，所以$\frac{PB}{OA}=\frac{BK_n}{AK_n}=n-1$；由$\triangle L_nCP$ 与$\triangle L_nAO$ 相似，有$\frac{PC}{OA}=\frac{CL_n}{AL_n}=n$. 因而 $OA=nOA-(n-1)OA=PC-PB=BC$.

同理，对于 $n\in\mathbf{N}^+$，所有直线 L_nM_n 都过某个固定点 Q，而点 Q 在过顶点 A 且平行于 CD 的直线上. 因此，对 $n\in\mathbf{N}^+$，所有平面 $K_nL_nM_n$ 都过直线 OQ.

13. 因 V、S 与 r 分别表示四面体的体积、表面积与内切球的半径，在四面体被平面截成的两个部分中有一个是底面在该平面上的棱锥，用 V_1、S_1 与 r_1 分别表示该棱锥的体积、侧面积与球心在该平面上且和侧面相切的球面的半径. 棱锥的底面过四面体内切球的球心的充要条件是 $r=r$. 又由 $V=\frac{1}{3}Sr,V_1=\frac{1}{3}S_1r_1$，因而 $r=r_1$ 等价于$\frac{V}{V_1}=\frac{S}{S_1}$，即$\frac{V-V_1}{V_1}=\frac{S-S_1}{S_1}$.

14. 设点 O 在四面体 $ABCD$ 的内部，用 P 表示直线 DO 与平面 ABC 的交点，Q 表示直线 BP 与边 AC 的交点，由三面角性质，有$\angle AOB+\angle AOC=\angle AOB+\angle AOQ+\angle QOC>\angle BOQ+\angle QOC=\angle BOP+\angle POQ+\angle QOC>\angle BOP+\angle POC=180^\circ-\angle BOD+180^\circ-\angle COD$，从而$\angle AOB+\angle AOC+\angle BOD+\angle COD>360^\circ$. 同理，$\angle AOB+\angle BOC+\angle AOD+\angle COD>360^\circ$，$\angle AOC+\angle BOC+\angle AOD+\angle BOD>360^\circ$. 上述三个不等式相加后除以2，即得要证的不等式.

15. 用 V 与 S 表示四面体的体积与表面积，用 S_i 表示第 i 个面的面积，这个面上的四面体的高记为 h_i，旁切球半径为 r_i，则 $3V=h_1S_1=r_1(S_2+S_3+S_4-S_1)=r_1(S-2S_1)$. 同理，$3V=h_iS_i=r_i\cdot(S-2S_i)$，因此$\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i}=\frac{1}{3V}(S-2S_1+S-2S_2+S-2S_3+S-2S_4)=\frac{2S}{3V}=\frac{2}{3V}\sum\limits_{i=1}^{4}S_i=2\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}$.

16. 在$\triangle ABC$ 中应用中线公式，可以算出 $CN^2=\frac{1}{4}(2AC^2+2BC^2-AB^2)=\frac{1009}{4}$. 同理 $DN^2=\frac{1}{4}(2AD^2+2BD^2-AB^2)=\frac{425}{4}$. 在$\triangle NCD$ 中有 $a^2=MN^2=\frac{1}{4}(2DN^2+2CN^2-CD^2)=\frac{548}{4}=137$.

17. 由 Weitzenbock 不等式，有 $a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$，$c^2+d^2+e^2\geqslant4\sqrt{3}S_{\triangle DAB}$，$a^2+e^2+f^2\geqslant$

$4\sqrt{3}S_{\triangle DBC}$，$b^2+f^2+d^2\geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle DCA}$，将此四个不等式两边相加并整理即证．

18．由三角形任意两边之差小于第三边，则由题设含有一边长为2的三角形的其他两边边长只能有下面四种情形：①3，3；②5，5；③4，5；④3，4．对题中四面体，以2为公共棱的两侧面三角形又可能有三种情形：(1)①与②，(2)①与③，(3)②与④．由(1)令 $AC=BC=3$，$AD=BD=5$，这样的四面体只有一个，$V_1=\frac{1}{3}CD\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$；(2)这样的四面体有两个，$V_2=\frac{1}{3}h_2\cdot S_{\triangle ABC}<\frac{1}{3}DB\cdot S_{ABC}=V_1$；(3)这样的四面体也有两个，$V_3=\frac{1}{3}h_3\cdot S_{\triangle ACD}<\frac{1}{3}AB\cdot S_{\triangle ACD}=\frac{5}{6}\sqrt{11}$．比较 V_1,V_2,V_3 知最大为 $V_1=\frac{8\sqrt{2}}{3}$．

19．在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，设其重心 G 到四面$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的距离分别为 d_1,d_2,d_3,d_4，相应的面积记为 S_1,S_2,S_3,S_4．设四面体的内切球半径为 r，则内心到四面距离之和为 $4r$．

连 A_1G 并延长交面 $A_2A_3A_4$ 于点 Q，则 $GQ:A_1Q=1:4$．

$V_{GA_2A_3A_4}=\frac{1}{4}V_{A_1A_2A_3A_4}=\frac{1}{4}V$．同理 $V_{GA_1A_2A_4}=V_{GA_1A_2A_3}=\frac{1}{4}V$．于是 $d_1=\frac{1}{4}V/\frac{1}{3}S_1=\frac{3V}{4S_1}$，同理 $d_2=\frac{3V}{4S_2}$，$d_3=\frac{3V}{4S_3}$，$d_4=\frac{3V}{4S_4}$．故 $d_1+d_2+d_3+d_4=\frac{3}{4}V(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4})=\frac{1}{4}r(S_1+S_2+S_3+S_4)(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_4})\geqslant 4r$．

20．点 M,N,L 既在截面上，又在侧面 ABC 上，所以它们在这两个面的交线上，即它们共线．

同理 A',B',M 共线；B',C',M 共线；A',C',M 共线．而 $S_{\triangle ANL}=\frac{1}{2}AL\cdot NL\cdot\sin\angle ALN$，$S_{\triangle LMB}=\frac{1}{2}LB\cdot LM\cdot\sin\angle ALN$．

于是 $\frac{S_{\triangle ANL}}{S_{\triangle LMB}}=\frac{AL\cdot NL}{LB\cdot LM}$．同理 $\frac{S_{\triangle BMB'}}{S_{\triangle B'CP}}=\frac{B'B\cdot MB'}{B'C'\cdot B'P}$，$\frac{S_{PC'A'}}{S_{\triangle A'NA}}=\frac{PA'\cdot A'C'}{A'A\cdot A'N}$．故 $\frac{S_{\triangle ANL}}{S_{\triangle LMB}}\cdot\frac{S_{\triangle BMB'}}{S_{\triangle B'CP}}\cdot\frac{S_{\triangle PC'A'}}{S_{\triangle A'NA}}=\frac{AL\cdot NL}{LB\cdot LM}\cdot\frac{B'B\cdot MB'}{B'C'\cdot B'P}\cdot\frac{PA'\cdot A'C'}{A'A\cdot A'N}=\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BB'}{B'P}\cdot\frac{VA'}{A'A}\cdot\frac{NL}{LM}\cdot\frac{MB'}{B'C'}\cdot\frac{L'A'}{A'N}$．

因直线 $A'B'P$ 同时为$\triangle PAB$ 和$\triangle MC'N$ 的截线，故由梅涅劳斯定理，得$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BB'}{B'P}\cdot\frac{PA'}{A'A}=1$，$\frac{NL}{LM}\cdot\frac{MB'}{B'C'}\cdot\frac{C'A'}{A'N}=1$．由此结论可证．

21．设截面交 AB 于 L．由一般四面体性质20，有$\frac{AK}{KZ}\cdot\frac{ZM}{MC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BL}{LA}=1$，即$\frac{BL}{LA}=\frac{3}{2}$．连 MA,ML,AP，设 $S_{\triangle ABC}=S$，过点 Z 引四面体 $ZABCD$ 的高 h，则$\frac{1}{3}Sh=5$，过 M 引四面体 $MALP$ 的高为$\frac{3}{5}h$，则 $V_{MALP}=\frac{1}{3}S_{\triangle ALP}\cdot\frac{3}{5}h=\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle ABC})\cdot\frac{3}{5}h=\frac{3}{25}\cdot\frac{1}{3}Sh=\frac{3}{5}$．

设 $S_{\triangle ZAB}=S_1$，过 C 作四面体 $CZAB$ 的高为 h_1，则 $V_{MAKL}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}S_1)\cdot\frac{2}{5}h_1=\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{3}S_1h_1=$

$\frac{2}{5}$, $V_{AKMPL} = V_{MALP} + V_{MAKL} = 1$.

又 $V_{AKMPL} = \frac{1}{3} S_{KMPL} \cdot 1$,故 $S_{KMPL} = 3$ 为所求.

22. 因 $AF = DE$,有 $AE = DF$. 由一般四面体性质 22,有 $S^2_{\triangle BCF} = \frac{DF}{AD} \cdot S^2_{\triangle ABC} + \frac{AF}{AD} \cdot S^2_{\triangle BCD} - \frac{1}{4} BC^2 \cdot AF \cdot DF = \frac{AE}{AD} \cdot S^2_{\triangle ABC} + \frac{DE}{AD} \cdot S^2_{\triangle BCD} - \frac{1}{4} BC^2 \cdot AE \cdot DE$. 又面 BCE 平分二面角 $A-BC-D$,由性质 22 推论 3,有 $S^2_{\triangle BCE} = S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle BCD} - \frac{1}{4} BC^2 \cdot AE \cdot DE$.

以上两式两边相减,注意到 $\frac{AE}{AD} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD}}$ 及 $\frac{DE}{AD} = \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD}}$,即证.

习题 B

1. 由点 P 作平面 ABC 的垂线,假设点 Q 是四面体 $ABCD$ 的在这个垂线上离平面 ABC 最远的点. 显然,点 Q 属于界面 ABD, ACD, BCD 中的一个界面,为确定起见,假设 Q 属于界面 ABD. 在平面 ABD 上,过点 Q 作直线和棱 AB 垂直,假设 R 是这个垂线上离 AB 最远而又属于 $\triangle ABD$ 的点,点 R 属于一条棱 AD 或 BD. 例如,假设点 R 属于棱 AD.

如果点沿着平面或直线的垂线作背离平面或直线的移动,那么这个点和平面或直线的任一点的距离增加. 因此 $PA \leqslant QA \leqslant RA \leqslant DA$.

每一个不等式可以单个地变成严格的等式,因为允许点之间两两重合: $P \equiv Q$, $Q \equiv R$, $R \equiv D$. 但是所有的不等式不可能同时变成严格的等式,因为根据本题条件,点 P 不和顶点 D 重合. 因此,至少有一个不等式即使在所有其他的不等式都变成等式的情况下仍保持不等号,于是有 $PA < DA$.

2. 由于 $EH /\!/ FG$, BD 为平面 ABD, CBD 的交线,所以 $BD /\!/ EH$. 同理 $AC /\!/ EF$. 又切线 $AE = AH$, $EH /\!/ BD$,则 $AB = AD$. 同理 $AB = BC = CD = DA$.

设球与 AC 切于点 I,则过 E, F, I 的圆是球与平面 ABC 的交线,从而这圆是等腰 $\triangle ABC$ 的内切圆,因此 I 为 AC 的中点. 由 $\frac{EH}{BD} = \frac{AE}{AB}$, $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$ 及 $EH = EF$, $AC = 2AI = 2AE$,易得 $BD = 2BE$.

取 BD 的中点 J,则 $\triangle JAC$ 为等腰三角形,于是 IJ, AC, BD 互相垂直并且平面 ACJ 平分二面角 $B-AC-D$,球心 O 在这个二面角的平分面上,从而在 IJ 上. 又 $OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{OB^2 - BJ^2} = OJ$. 所以该球与棱 BD 相切于 J(并且 O 为 IJ 的中点).

3. 设四个球的球心为 A, B, C, D,依题意有 $AB = 6$, $CD = 4$, $AC = BC = AD = BD = 5$.

又设 AB, CD 的中点分别为 F 和 E,小球的球心为 O,则由对称性,O 在线段 EF 上,并且易知 $EF \perp AB$, $EF \perp CD$,于是 $EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{AC^2 - CE^2 - AF^2} = \sqrt{12}$, $OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{r^2 + 4r}$, $OF = \sqrt{OA^2 - AF^2} = \sqrt{r^2 + 6r}$,其中 r 为小球 O 的半径,于是得 $\sqrt{r^2 + 4r} + \sqrt{r^2 + 6r} = \sqrt{12}$,即有 $\sqrt{r+4} + \sqrt{r+6} = \sqrt{\frac{12}{r}}$. 又 $(\sqrt{r+6})^2 - (\sqrt{r+4})^2 = 2$,从而 $\sqrt{r+6} - \sqrt{r+4} = \sqrt{\frac{r}{3}}$. 于是 $2\sqrt{r+6} = \frac{1}{\sqrt{3r}}(r+6)$. 而 $r > 0$,从而 $2\sqrt{3}r = \sqrt{r+6}$,即 $12r = r + 6$,故 $r = \frac{6}{11}$ 为所求.

4. 设 S 表全面积，S_i 表顶点 A_i 所对的面的面积（$i=1,2,3,4$），设 α,β,γ 分别是以 A_2A_3，A_2A_4，A_3A_4 为棱的二面角的大小；并设 h_1 为顶点 A_1 到对面的高，$h'_1=A_1E$ 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 边 A_2A_3 上的高，则 $h_1=h'_1\cdot\sin\alpha=\dfrac{2S_4}{A_2A_3}\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=\dfrac{2}{A_2A_3}\sqrt{(S_4+S_4\cos\alpha)(S_4-S_4\cos\alpha)}$.

同理，$h_1=\dfrac{2}{A_2A_4}\sqrt{(S_3+S_3\cos\beta)(S_3-S_3\cos\beta)}$，$h_2=\dfrac{2}{A_3A_4}\sqrt{(S_2+S_2\cos\gamma)(S_2-S_2\cos\gamma)}$.

由上即有 $h_1=\dfrac{2}{A_2A_3+A_2A_4+A_3A_4}\cdot Q$，其中 $Q=\sum\limits_{i=1}^{4}\sqrt{(S_k+S_k\cos\theta_k)(S_k-S_k\cos\theta_k)}$，$\theta_2=\gamma$，$\theta_3=\beta$，$\theta_4=\alpha$.

再由柯西不等式及性质5，可得

$$Q\leqslant[(S_4+S_4\cos\alpha)+(S_3+S_3\cos\beta)+(S_2+S_2\cos\gamma)]^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$[(S_4-S_4\cos\alpha)+(S_3-S_3\cos\beta)+(S_2-S_2\cos\gamma)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=(S_4+S_3+S_2+S_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(S_4+S_3+S_2-S_1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{S(S-2S_1)}.$$

从而 $h_1\leqslant\dfrac{2\sqrt{S(S-2S_1)}}{A_2A_3+A_2A_4+A_3A_4}$.

再注意到 $r\cdot S=h_1\cdot S_1=3V$，则 $r=\dfrac{h_1S_1}{S}\leqslant\dfrac{2S_1}{A_2A_3+A_2A_4+A_3A_4}\cdot\dfrac{\sqrt{S(S-2S_1)}}{S}=r_1\cdot\sqrt{\dfrac{S-2S_1}{S}}$.

同理，有 $r\leqslant r_i\cdot\sqrt{\dfrac{S-2S_i}{S}}$（$i=2,3,4$）.

故 $\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{r_i^2}\leqslant\dfrac{1}{r^2}\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{S-2S_i}{S}=\dfrac{2}{r^2}$.

5. 由切线长定理知，必要性显然. 仅证充分性：设 l 是过 $\triangle ACD$ 的内心 O_1 且垂直于面 ACD 的直线，则 l 到 $\triangle ACD$ 的三边等距离. 设 g 是过 $\triangle BCD$ 的内心 O_2 且垂直于面 BCD 的直线，则 g 到 $\triangle BCD$ 的三边也等距离.

设 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 的内切圆 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别切 CD 边上于 E，F 两点，设 $\odot O_1$ 切 AD 于 H，切 AC 于 G，$\odot O_2$ 切 BD 于 M，切 BC 于 N. 由 $AD+BC=AC+BD$，知有 $(AH+HD)+(BN+CN)=(AG+GC)+(BM+MD)$，即 $HD+CN=GC+MD$. 将 $HD=DE$，$MD=DF$，$CG=CE$，$CN=CF$ 代入上式，得 $DE+CF=CE+DF\Leftrightarrow CD+EF=CD-EF\Leftrightarrow 2EF=0$. 这表明 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 分别切于 CD 上同一点 E，所以 l 与 g 相交. 若设 l 与 g 交于点 O，则 O 到除棱 AB 外的其余各棱等距离. 再考虑其他任何两面过内心的垂线，同理可证他们两两相交.

再根据立体几何结论："空间三直线两两相交且不共面则必交于一点。"知这样的四条过各面内心的垂线交于一点 O，O 到六棱距离相等，此即为棱切球球心.

注：用完全类似的方法可证：四面体 $SABC$ 存在与 $\triangle ABC$ 三边及其余各棱相切的旁切球的充要条件是 $SA+AB=SC+BC$，$SA+AC=SB+BC$，$SA+AB=SC+AC$.

6.（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 所在平面内，过 A 作 $AG/\!/BC$，过 D 作 $DE\perp BC$ 于 E，作 $AF\perp BC$ 于 F，作 $EG/\!/FA$ 与 AG 交于 G，连 DG，则 $EG=FA$. 在 $\triangle DEG$ 中，有 $DG^2=DE^2+EG^2-2DE\cdot EG\cdot\cos\theta_{BC}$，又 $DG=$

$DA\cdot\sin\alpha=a'\cdot\sin\alpha$，从而$(a'\cdot\sin\alpha)^2=DE^2+EG^2-2DE\cdot EG\cdot\cos\theta_{BC}$，即$(aa'\cdot\sin\alpha)^2=(BC\cdot DE)^2+(BC\cdot EG)^2-2(BC\cdot DE)(BC\cdot EG)\cdot\cos\theta_{BC}=4S_A^2+4S_D^2-8S_A\cdot S_A\cos\theta_{BC}$，即 $S_A^2+S_D^2-2S_A\cdot S_D\cdot\cos\theta_{BC}=\frac{1}{4}(aa'\cdot\sin\alpha)^2$.

同理，$S_B^2+S_D^2-2S_B\cdot S_D\cdot\cos\theta_{CA}=\frac{1}{4}(bb'\cdot\sin\beta)^2$，$S_C^2+S_D^2-2S_C\cdot S_D\cdot\cos\theta_{AB}=\frac{1}{4}(cc'\cdot\sin\gamma)^2$.

再注意到射影定理，上述三式相加即证.

（Ⅱ）在$\triangle ABC$所在平面内，过A,B,C分别作对边的平行线得$\triangle ABC$的外接$\triangle A'B'C'$，则$B'C'=2a$，$C'A'=2b$，$A'B'=2c$.由（Ⅰ）有 $S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2=\frac{1}{4}[(aa'\cdot\sin\alpha)^2+(bb'\cdot\sin\beta)^2+(cc'\cdot\sin\gamma)^2]=\frac{1}{4}[(\frac{1}{2}B'C'\cdot DA\sin\alpha)^2+(\frac{1}{2}C'A'\cdot DB\sin\beta)^2+(\frac{1}{2}A'B'\cdot DC\cdot\sin\gamma)^2]=\frac{1}{4}(S_{A'}^2+S_{B'}^2+S_{C'}^2)$.

设DC'与平面$A'B'D$成角θ，四面体$A'B'C'D$的体积为V'，则$S_{A'}\cdot S_{B'}\cdot S_{C'}\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta_{DC'}=\frac{9}{2}V'=72V$，即$S_{A'}\cdot S_{B'}\cdot S_{C'}\geqslant 72V$.故$S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2=\frac{1}{4}(S_{A'}^2+S_{B'}^2+S_{C'}^2)\geqslant\frac{3}{4}(S_{A'}\cdot S_{B'}\cdot S_{C'})^{\frac{2}{3}}\geqslant 9(3V^4)^{\frac{1}{3}}$.

注：由（Ⅰ）即得$(aa')^2+(bb')^2+(cc')^2\geqslant 4(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2)$；由（Ⅱ）即得 $P=(aa')\cdot(bb')\cdot(cc')=(\frac{1}{2}B'C'\cdot DA)\cdot(\frac{1}{2}C'A'\cdot DB)\cdot(\frac{1}{2}A'B'\cdot DC)\geqslant S_{A'}\cdot S_{B'}\cdot S_{C'}\geqslant 72V^2$.

7. 过A,B,C分别作BC,CA,AB的平行线，得新四面体$DA'B'C'$，则 $V'=\frac{2}{3}S_{\triangle DA'B'}\cdot d_1=\frac{2}{3}S_{\triangle D'B'C}\cdot d_2=\frac{2}{3}S_{\triangle DA'C'}\cdot d_3$，从而 $64V^2=V'^2=(\frac{2}{3})^3\cdot S_{\triangle DB'C'}\cdot S_{\triangle DA'B'}\cdot d_1d_2d_3\geqslant(\frac{2}{3})^3\cdot 72V^2\cdot d_1d_2d_3$，故 $d_1d_2d_3\leqslant 3V$（其中用到上题结论 $S_{\triangle DB'C'}\cdot S_{\triangle DA'B'}\cdot S_{\triangle DA'B'}\geqslant 72V^2$）.

又设AB与CC'交于E，DC的中点为F，则$EF=m_1$，$DC'=2EF=2m_1$.同理$DA'=2m_2$，$DB'=2m_3$，而$d_1\leqslant m_1$，则$4V=V'=\frac{2}{3}S_{\triangle DA'B'}\cdot d_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}DA'\cdot DB'\cdot\sin\angle A'DB'\cdot d_1\leqslant\frac{1}{3}\cdot 2m_2\cdot 2m_3\cdot m_1=\frac{4}{3}m_1m_2m_3$，故$3V\leqslant m_1m_2m_3$.

注：由此不等式可推得①$\theta_1,\theta_2,\theta_3$分别为三组对棱所成的角，$abcdef\cdot\sin\theta_1\cdot\sin\theta_1\cdot\sin\theta_3\geqslant 72V$；② $\frac{\sqrt{2}}{24}(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3)\geqslant m_1m_2m_3\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{abcdef}\geqslant 3V\geqslant d_1d_2d_3$.

8. 设E,F,D分别为四面体$ABCP$的棱AC,BP,AB的中点，则$\triangle DEF$为其中点三角形，由于对棱AP,BC与中点$\triangle DEF$平行，从而这对对棱到面DEF的距离相等，且等于这双对棱距离的一半，则A,P,B,C四点到面DEF等距，故$V_{A-EFD}=V_{P-EFD}=V_{B-EFD}=V_{C-EFD}=\frac{1}{8}V_{PABC}$.其余同理可证.

9.（Ⅰ）有 $OA=OB=OC$，$PA=PB=PC$.令$PA=a$，则在$\triangle PBC$中由余弦定理，知 $BC=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}a=2a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.同理 $AC=2a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$，$AB=2a\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.在$\triangle ABC$中用余弦定理，即得

$$\cos\angle BAC=\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

(Ⅱ)在Rt△APO中,$\angle APO=\varphi$,$AO=a\cdot\sin\varphi=R$(△ABC的外接圆半径),在△ABC中由正弦定理$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2R$即证.

10.(Ⅰ)有$PT_1=PT_2=PT_3=m$,且$PT_1\perp AB$,$PT_2\perp BC$,$PT_3\perp AC$,由Rt△PBT_1≌Rt△PBT_2,有$\angle PBA=\angle PBC=\delta$.同理$\angle PCB=\angle PCA$,$\angle PAB=\angle PAC$.又在△$PCA$中由内角定理有$\delta=90°-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)$,于是$BT_1=PT_1\cdot\cot\delta=m\cdot\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)$.又$\angle PAT_1=90°-\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$,则$AT_1=PT_1\cdot\cot\angle PAT_1=m\cdot\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$.于是$AB=m[\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)+\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)]=b$.同理得$BC$,$AC$两式.而$r=OT_1=PT_1\cdot\sin\theta=m\cdot\sin\theta$,且$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$,由上述各式即证.

(Ⅱ)在△ABC中,由半角定理即得$\tan\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{r}{p-a}=\frac{\sin\theta}{\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}$.

11. 连AI交△BCD于M,连BM,CM,DM并延长分别交CD,BD,BC于H,F,E.记$\frac{BE}{EC}=\lambda$,$\frac{BF}{FD}=\mu$,则可推知$\frac{AM}{AI}=\frac{\frac{AB}{AP}+\lambda\cdot\frac{AC}{AQ}+\mu\cdot\frac{AD}{AR}}{1+\lambda+\mu}$. (*)

由点I为四面体的内心,且△AED经过点I,易知△AED为二面角$B-AD-C$的平分面,故$\frac{BE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{S_C}{S_B}=\lambda$.

同理,$\frac{BF}{FD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{S_D}{S_B}=\mu$.

于是$\frac{\frac{AB}{AD}+\lambda\cdot\frac{AC}{AQ}+\mu\cdot\frac{AD}{AR}}{1+\lambda+\mu}=\frac{\frac{AB}{AP}+\frac{S_C}{S_B}\cdot\frac{AC}{AQ}+\frac{S_D}{S_B}\cdot\frac{AD}{AR}}{1+\frac{S_C}{S_B}+\frac{S_D}{S_B}}=\frac{S_B\cdot\frac{AB}{AP}+S_C\cdot\frac{AC}{AQ}+S_D\cdot\frac{AD}{AR}}{S_B+S_C+S_D}$.

综合(*)式,得$S_B\cdot\frac{AB}{AP}+S_C\cdot\frac{AC}{AQ}+S_D\cdot\frac{AD}{AR}=\frac{AM}{AI}(S_B+S_C+S_D)$.

由于$\frac{AM}{AI}\cdot S_B=(1+\frac{IM}{AI})\cdot S_B$,再注意到四面体$ADCM$中,△$DIC$为二面角$A-DC-M$的平分面,有$\frac{IM}{AI}=\frac{S_{\triangle MPC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{S_{\triangle MDC}}{S_B}$.从而$\frac{AM}{AI}\cdot S_B=(1+\frac{IM}{AI})S_B=S_B+S_{\triangle MDC}$.

同理$\frac{AM}{AI}S_C=S_C+S_{\triangle MBD}$,$\frac{AM}{AI}\cdot S_D=S_D+S_{\triangle MBC}$.此三式相加即得结论.

第二十三章 特殊四面体的性质及应用

习题 A

1. 设四面体 $ABCD$ 有面 BCD 的棱旁切球，由例 6 结论知 $AB + CD = AC + BD$. 由例 6 注中说明有 $AC + CD = AB + BD$，两式相加得 $CD = BD$.

同理有 $BC = BD$，即 $\triangle BCD$ 为正三角形.

又由 $AB + CD = AC + BD$ 及 $CD = BD$，有 $AB = AC$.

同理 $AC = AD$. 从而四面体 $ABCD$ 为正三棱锥.

反之，若四面体为正三棱锥，显然有：对棱之和相等，且从顶点 A 引出的任意两棱之和等于对棱之和. 由例 6 及其中注即知结论成立.

2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 设等腰直角三角形 ABC 中斜边 AB 的中点为 D，则 D 为 $\triangle ABC$ 的外心. 由 $SA = SB = SC = 2$，知 S 在底面 ABC 上的射影为 D，球心即为 O. 而 $\triangle SAB$ 为等边三角形，则 $SD = \sqrt{3}$. 故 O 到平面 ABC 的距离 $OD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$. 设正四面体 $ABCD$ 的球心为 O，球半径为 r，体积为 V，面 BCD 的中心为 O_1，棱 BC 的中点为 E，则 $AO_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}a$，$OB = \frac{\sqrt{6}}{4}a$，$r = \frac{\sqrt{2}}{4}a$，故 $V = \frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$.

4. 3. 作 $CE \perp AD$，连 EF，则 $EF \perp AD$，$\angle CEF$ 为面 ADF 与面 ACD 所成二面角的平面角. 设 G 为 CD 的中点，则$\angle AGB$ 为面 ACD 与面 BCD 所成二面角的平面角，且$\angle CEF = \angle AGB$. 设底面$\triangle CDF$ 的边长为 $2a$，侧棱 AC 的长为 b，由 $CE \cdot b = AG \cdot 2a$，有 $CE = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \cdot 2a$. 在$\triangle ABC$ 中，求得 $AB = 2\sqrt{b^2 - \frac{4}{3}a^2}$. 由$\triangle CEF \backsim \triangle AGB$，有$\frac{AB}{CF} = \frac{AG}{CE}$，求得 $b = \frac{4}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 2a$，即 $AC < CD$. 由题设 $b = 2$，$2a = 3$，$AB = 2$，则 $AC = AC < CD$. 由此即得结果.

5. (D). 由 $AC \perp BD$，作 $EG // AC$ 交 BC 于 G，连 GF，则 $\alpha_\lambda = \angle GEF$，且$\frac{CG}{GB} = \frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}$，有 $GF // BD$，故 $GF \perp EG$ 且 $\beta_\lambda = \angle EFG$，所以 $f(\lambda) = \alpha_\lambda + \beta_\lambda = \angle GEF + \angle EFG = 180° - \angle EGF = 90°$.

6. (D). 作 $EE_1 \perp$ 面 BCD 于 E_1，则 $EE_1 \perp BG$. 又 $AC \perp BD$，$EF // AC$，$FG // BD$，则 $EF \perp FG$，即 $E_1F \perp FG$，从而$\angle EFE_1$ 是二面角 $E - FG - B$ 的平面角.

设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，则其高 $AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$，$EE_1 = \frac{1}{2}AH = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 又 $EF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$，则 $\sin\angle EFE_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$，故二面角 $C - FG - E$ 的大小为 $\pi - \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = \pi - \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 所给四面体各面是全等的三角形，设这些三角形的内角是 α, β, γ，则 $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. 若其中有一非锐角，例如 $\alpha \geqslant 90°$，则 $\beta + \gamma \leqslant 90°$，但由三面角的性质知 $\alpha < \beta + \gamma \leqslant 90°$，这和 $\alpha \geqslant 90°$矛盾，所以 α, β, γ 都是锐角.

8. 设 $PA=a, PB=b, PC=c$,则 $S=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 及 $V=\frac{1}{6}abc$,利用不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 及 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$,有 $S\geqslant a+b+c+\sqrt{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})\geqslant 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc}=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}\geqslant 3(1+\sqrt{2})(6V)^{\frac{1}{3}}$,由此得 $V_{\max}=\frac{1}{162}(5\sqrt{2}-7)S^2$.

9.(Ⅰ)连 FD,在平面 AFD 内,过 E 作 $EG/\!/AF$ 交 ED 于 K,则 $\angle CEG$ 是异面直线 AF 与 CE 所成的平面角(或补角).设正四面体棱长为 a,则 $EG=\frac{1}{2}AF=\frac{\sqrt{3}}{4}a$, $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $CG=\frac{\sqrt{7}}{4}a$,所求角为 $\arccos\frac{2}{3}$.

(Ⅱ)在平面 AFD 内作 $EH\perp FD$,则 $\angle ECH$ 为 CE 与平面 BCD 所成的平面角(注意面 $AFD\perp$ 面 BCD),可求得 $EH=\frac{\sqrt{6}}{6}a$,故所求角为 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

10. 以正四面体的棱为正方体的侧面对角线正四面体内接于一正方体,该正方体也内接于该球,且该正方体的对角线即为该球的直径.连 $C'D'$ 交 AB 于 M,连 MC,则 $MC\perp AB$, $MD'\perp AB$,即 $\angle CMD'$ 为平面 ABC 与平面 $AC'D'$ 所成的平面角.设正方体棱长为 a,在 $\triangle CMD'$ 中可求 $\sin\angle CMD'=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.故平面 ABC 与平面 $AC'D'$ 所成的角为 $\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

11. 由题设知正四面体的外接球半径为 a,则该正四面体的外接正方体的对角线长为 $2a$,其棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$,其体积 $V_{正方体}=\frac{8}{9}\sqrt{3}a^3$.而正面体体积为该正方体体积的 $\frac{1}{3}$,则所求体积为 $\frac{8}{27}\sqrt{3}a^3$.

12.15 部分.11 个四面体(1 个在顶部,8 个在中部,7 个在下部)和 4 个八面体(1 个在中部,3 个在下部).

13. 由于所作的任意一个平面都包含连接四面体对棱中点的线段之一,故所有这些平面都通过这些线段的交点,而这个交点是在四面体内部(重心的性质),因此,所作的 6 个平面将整个空间分解成具有公共顶点的多面角.这表明,这些小四面体的任何一个必定有一个面属于原四面体的一个面.另一方面,原四面体的两个面绝不可能成为一个小四面体的两个面.这是因为它的两个面一定被通过它们的公共棱的平面互相分离.这样一来,小四面体的个数就等于原四面体表面被分成的块数.由于原四面体每个面被分成 6 块(被它的中线所分),整个的块数就是 $6\cdot 4=24$.考虑到关于六个平面中任何一个的对称性,可以得知,所有的小四面体彼此相等,因而每一个的体积都等于 $\frac{1}{24}$.

14. 为确定起见,设点 M 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上,设 $\angle MDB=\varphi$,则 $S=c+a\cdot\cos\varphi+b\cdot\sin\varphi$, $d=a\cdot\cos\varphi+b\cdot\sin\varphi$.

令 $\theta=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,则 $d=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cdot\cos\theta+\sin\varphi\cdot\sin\theta)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(\varphi-\theta)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$,当且仅当 $\varphi=\theta$ 时,即 $\cos\varphi=\frac{AD}{AB}=\cos\angle DAB$,也即 $DM\perp AB$ 时等式成立.其次,由平均值不等式,有 $S=c+d\leqslant\sqrt{2(c^2+d^2)}$,其中等式当且仅当 $c=d$ 时成立.故 $S\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$,其中

等式当且仅当 AD,BD,CD 是某个直角三角形的三条边，而 DM 是$\triangle ABC$ 的最小边上的高时成立.

15. 可以.设 M 和 N 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1 和 DD_1 的中点，由于直线 AA_1 与 MN 之间的距离等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，这刚好与棱长为 l 的正四面体的相对棱之间的距离相等，于是可在线段 MN 上找到两个点 K 和 L，它们关于 MN 的中点 O 对称，并使得 AA_1KL 为正四面体，分别用棱 B_1C_1 和 DC 取代 AA_1，并作相应的讨论，又可得到两个四面体，这三个四面体具有唯一的公共点 O(正方体中心).

习题 B

1. 记正四面体为 $ABCD$，高 AH 是属于以 AB,AC,AD 为直径的三个球，$AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$，取 AH 的中点 P，$PH=\frac{\sqrt{6}}{6}$，P 到 BC 中点的距离为$\frac{1}{2}$，因此，P 在 BC 为直径的球面上.类似可证 P 亦在 BD,CD 为直径的球面上，因此 $PH\in S$.

2. 只需证明 $V_{OEFG}=V_{OEGH}=V_{OEHF}$(这时 EO 与$\triangle GFH$ 的交点 Q 使 $S_{\triangle GFG}=S_{\triangle GQH}=S_{\triangle QHF}$).设正四面体的二面角为 α，棱与高的夹角为 β，又设 E 到 BC,CA,AB 的距离分别为 x,y,z，则$\angle FEG=\pi-\alpha$，$EF=z\cdot\sin\alpha$，$EG=y\cdot\sin\alpha$，$S_{\triangle EGF}=\frac{1}{2}yz\cdot\sin^3\alpha$.由于面 $EGF\perp AD$，则 O 到面 EGF 的距离等于 OE 在 AD 上的射影.设 E 在 BC 上的射影为 P，则 OE 在 AD 上的射影即 EP 在 AD 上的射影，则 $EP=x$，且与 AD 的夹角为 β，所以在 AD 上的射影为 $x\cdot\cos\beta$，则 $V_{OEFG}=\frac{1}{3}x\cdot\cos\beta\cdot\frac{1}{2}yz\cdot\sin^3\alpha=\frac{1}{6}xyz\cdot\sin^3\alpha\cdot\cos\beta$.同理得其他两式即证.

3. 设给定的正四面体是 $ABCD$，分别过 A,B,C,D 作平行于它们的相对面的平面，这四个平面围成了四面体 $A'B'C'D'$，易知 $A'B'C'D'$ 也是正四面体.

由于四面体 $ABCD$ 的高交于一点，记它为 H，则 M 与外接球球心重合，并且线段 HA,HB,HC,HD 恰好是自 H 到四面体 $A'B'C'D'$ 各面的垂线长，而它们的长度之和等于四面体 $A'B'C'D'$ 的高(正四面体性质)，即有 $HA+HB+HC+HD=h$.

现考虑在四面体 $A'B'C'D'$ 的内部或其面上的任意一点 P(异于点 H)，对于此点，线段 PA,PB,PC,PD 中至少有三条比自 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 的对应面的垂线要长.因此 $PA+PB+PC+PD>HA+HB+HC+HD$.(*)

注意到结论：设 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 各侧面距离为 h_1,h_2,h_3,h_4，其高为 h，则

$h_1+h_2+h_3+h_4>h$.

于是(*)式显然成立.

4. 引入四面体各侧面的垂线 OK_i 和 GH_i($i=1,2,3,4$)，并注意平面几何中结论：O 点是等边$\triangle ABC$ 内一点，G 是$\triangle ABC$ 的重心，直线 OG 与$\triangle ABC$ 的三边(或其延长线)分别交于 A',B',C'，则 $\frac{A'O}{A'G}+\frac{B'O}{B'G}+\frac{C'O}{C'G}=3$.事实上，由 O 点到 G 点向三边引垂线 OK_i 和 GH_i，而 $GH_1=GH_2=GH_3=a$，OK_1+

$OK_2+OK_3=GH_1+GH_2+GH_3=3a$，由此即证.

5. 首先证明，如果点 M 到棱长为 2 的正四面体各顶点的距离都是整数，则一定有一个距离是 0（其逆命题无疑是正确的）. 注意，如果点 M 在四面体的棱所在直线上，不妨设在以 H 为中点的棱 AB 的直线上. 记 $MH=x$，$MC=y$，则有 $y>x\geqslant 0$ 且 $x^2+(\sqrt{3})^2=y^2$，从而 $(y-x)(y+x)=3$. 由此得 $y-x=1$，$y+x=3$，因而 $x=1$. 这表明，点 M 与顶点 A 或 B 重合. 如果 M 不在上面所说的那些直线上，则 M 到四面体各顶点的最短距离 $x>0$，而其他的距离与 x 之差小于 2，即它们要么为 x，要么为 $x+1$. 此考虑四种情形：

(ⅰ)所有距离都为 x，此时 M 是四面体的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的外接球面的球心，但因 $x\in\mathbf{N}^+$，故不可能.

(ⅱ)三个距离为 x，一个为 $x+1$. 为确定起见，设 $MA=MB=MC=x$，$MD=x+1$，并设点 O 是 $\triangle ABC$ 的中心. 此时 M 在射线 DO 上，且 $x\geqslant AO=\frac{2}{\sqrt{3}}>1$，即 $DM=x+1>2>2\sqrt{\frac{2}{3}}=DO=DM-MO=x+1-\sqrt{x^2-\frac{4}{3}}$，由此得到 $x+1=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{x^2-\frac{4}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+x-\frac{19}{12}}>\frac{3}{2}+x-\frac{1}{2}=x+1$，不可能.

(ⅲ)三个距离为 $x+1$，一个为 x，与情形(ⅱ)类似，可设 $MD=x\geqslant 1$，$MA=MB=MC=x+1\geqslant 2$. 此时点 M 在直线 OD 上且点 O 不能在 M 与 D 之间，否则有 $x=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{(x+1)^2-\frac{4}{3}}>1+x$. 因此，点 M 在射线 OD 上，且 $2\sqrt{\frac{2}{3}}=OD=OM-MD=\sqrt{(x+1)^2-\frac{4}{3}}-x<(x+1)-x=1<2\sqrt{\frac{2}{3}}$ 也不可能.

(ⅳ)两个距离为 x，另两个为 $x+1$. 为确定起见，设 $MA=MB=x\geqslant 1$，$MC=MD=x+1\geqslant 2$. 注意 $x\neq 1$（前面已证 M 不能在直线 AB 上），所以 $x\geqslant 2$. 设点 E 与 F 分别是线段 AB 与 CD 的中点，此时 M 在射线 EF 上，且 $MF=\sqrt{(x+1)^2-1}\geqslant\sqrt{3}>\sqrt{2}=EF$，从而有 $\sqrt{(x+1)^2-1}-\sqrt{x^2-1}=MF-ME=EF=\sqrt{2}$. 但因当 $1<x\in\mathbf{N}^+$ 时，$\sqrt{(x+1)^2-1}-\sqrt{x^2-1}<\sqrt{2}$，所以也不可能.

于是结论完全得证.

6. 因面 ABD，BCD，ACD 是全等的三角形，且都与平面 ABC 交成相等的角. 题目中所述及的 3 个球的球心到各相应侧面的距离相等，所以这些球心到底平面 ABC 的距离只能取两个可能值. 因此必有两个球的球心处于平面 ABC 之上的同一高度上. 由射影的对称性，知点 M 应当落在 $\triangle ABC$ 的某一条高上，设此高为 AP. 由于 $\triangle AMC$ 是钝角三角形，所以其外接圆圆心位于直线 AC“之外”. 四面体 $AMCD$ 的外接球的球心在平面 ABC 上的投影是 $\triangle AMC$ 的外心，另外两个球心也具有类似的性质. 下面计算 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BMC$ 的外接圆半径 R_1 和 R_2. 由于 $R_1=\frac{2CM}{\sin\angle MAC}=CM=\frac{BC}{2\sin\alpha}$，$R_2=\frac{BC}{2\sin 2\alpha}$，且因棱锥 $ABMD$ 的外接球球心的位置不低于棱锥 $BCMD$ 的外接球球心，亦即 $R_1\leqslant R_2$，再而 $\sin\alpha\geqslant\sin 2\alpha$，而这仅当 $2\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时才有可能，故知 $\angle BMC$ 为钝角. 这表明 $\triangle BMC$ 的外心位于 $\triangle ABC$ 之外. 这样一

来，便知3个球的球心都位于平面 ABC 上方的同一高度上. 由此推知，当把棱锥 $ABCD$ 绕着它的自顶点 D 的高线旋转时，3个球便从一个变成另一个，因而点 M 作为3个球的公共点，是一个不动点. 于是可知 DM 是四面体 $ABCD$ 的高.

第二十四章　三面角的性质及应用

习题 A

1. $60°$.

2. $28\sqrt{34}$.

3.（略）　4.（略）

5. $\arccos\frac{3\sqrt{46}}{46}$.

习题 B

1. 不妨设面角 $\angle APB=\alpha<\frac{\pi}{2}$，在棱 PA，PB 上分别取点 A_1，B_1，使 $PA_1=PB_1=a$，再在棱 PC 上取点 C_1，使 PC_1 的长度 d 同时满足 $\arcsin\frac{d}{a}<\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{4}$，$\arcsin\frac{d}{a}<\frac{\pi}{4}$.

作二面角 $P-A_1B_1-C_1$ 的平分面，设与 PC_1 相交于点 Q，且 C_1 关于此平分面的对称点为 C'_1，C'_1 在平面 PA_1B_1 内，易知 $\triangle A_1B_1C'_1\cong\triangle A_1B_1C_1$，且 $QC'_1=QC_1$，故平面 PA_1B_1 上的线段 $PC'_1<PQ+QC'_1=PQ+QC=PC_1=d$.

在平面 PA_1B_1 上以 P 为圆心，d 为半径作圆，则点 C'_1 在 $\odot P$ 内，过 A_1 作 A_1A_0 与 $\odot P$ 相切于 A_0，过 B_1，作 B_1B_0 与 $\odot P$ 相切于 B_0. 显然 $\angle PA_1C'_1<\angle PA_1A_0$，$\angle PB_1C'_1<\angle PB_1B_0$，且在 $\mathrm{Rt}\triangle PA_1A_0$ 中，$\angle PA_1A_0=\arcsin\frac{d}{a}<\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{4}$.

同理，$\angle PB_1B_0=\arcsin\frac{d}{a}<\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{4}$. 故

$$\begin{aligned}\angle A_1C'_1B_1&=\angle A_1PB_1\pm\angle PA_1C'_1\pm\angle PB_1C'_1<\angle A_1PB_1+\angle PA_1A_0+\angle PB_1B_0\\&<\alpha+\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{4}+\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{4}=\alpha+\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

又 $\angle C'_1A_1B_1\leqslant\angle PA_1B_1+\angle PA_1C'_1$，而 $\angle PA_1B_1=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$，$\angle PA_1C'_1<\angle PA_1A_0=\arcsin\frac{d}{a}<\frac{\alpha}{4}$，故 $\angle C'_1A_1B_1<\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4}<\frac{\pi}{2}$.

同理 $\angle C'_1B_1A_1<\frac{\pi}{2}$，故 $\triangle A_1B_1C'_1$ 为锐角三角形，即 $\triangle A_1B_1C_1$ 为锐角三角形.

2. 不妨设面角$\angle APB=\alpha<\frac{\pi}{2}$,在 PA 上取一点 A_1,且在$\angle APB$内作$\angle PA_1B_1=\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}$,交 PB 于 B_1(设 $PB_1=b$),则在$\triangle PA_1B_1$中,$\angle PB_1A_1=\pi-\alpha-\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}$为钝角,在棱 PC 上取点 C_1,使 PC_1 的长度 d 满足 $\arcsin\frac{d}{b}<\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{4}$.

作二面角 $P-A_1B_1-C_1$ 的平分面,设与 PC_1 相交于点 Q,且 C_1 关于此平分面的对称点为 C'_1,则 C'_1 在平面 PA_1B_1 内,易知$\triangle A_1B_1C'_1\cong\triangle A_1B_1C_1$,且 $QC'_1=QC_1$,故平面 PA_1B_1 上的线段 $PC'_1<PQ+QC'_1=PQ+QC_1=PC_1=d$.

在平面 PA_1B_1 上以 P 为圆心,d 为半径作圆,则点 C'_1 在$\odot P$内,过 B_1 作 B_1B_0 与$\odot P$相切于 B_0,显然$\angle PB_1C'_1<\angle PB_1B_0$,且在 $\mathrm{Rt}\triangle PB_1B_0$ 中,$\angle PB_1B_0=\arcsin\frac{PB_0}{PB_1}=\arcsin\frac{d}{b}<\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{4}$.故 $\angle A_1B_1C'_1=\angle A_1B_1P\pm\angle PB_1C'_1>\angle PB_1A_1-\angle PB_1B_0>\frac{\pi}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{4}>\frac{\pi}{2}$,从而 $\angle A_1B_1C_1>\frac{\pi}{2}$,即$\triangle A_1B_1C_1$是钝角三角形.

3. 不妨设$\angle APB$是锐角,分别在 PA,PB 上取点 A_0,B_1,使$\angle B_1A_0P$为钝角.还设 $A_0B_1=l$, $PA_0=m$, $PB_1=n$,在 PC 上取点 C_1,使 PC_1 的长度 d 同时满足 $d<n$, $d<\frac{n^2-l^2-m^2}{2(m+n)}$.在$\triangle PA_0C_1$和$\triangle PB_1C_1$中,易知 $A_0C_1<m+d$, $B_1C_1>n-d$,故在$\triangle A_0B_1C_1$中由余弦定理有 $\cos\angle B_1A_0C_1=\frac{A_0B_1^2+A_0C_1^2-B_1C_1^2}{2A_0B_1\cdot A_0C_1}<\frac{l^2+(m+d)^2-(n-d)^2}{2l\cdot A_0C_1}=\frac{l^2+m^2-n^2+2(m+n)d}{2l\cdot A_0C_1}<0$,故$\angle B_1A_0C_1$为钝角.

以 B_1C_1 为直径作球,则点 A_0 必在球内,故 PA_0 的延长线必与球面相交,设交点为 A_1,则在过 A_1,B_1,C_1 的大圆上,直径上的圆周角$\angle B_1A_1C_1$是直角,故$\triangle A_1B_1C_1$是直角三角形.

第二十五章　一般圆锥曲线的性质及应用

习题 A

1. 由渐近线方程 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$,可设双曲线方程为$\frac{x^2}{3m}-\frac{y^2}{2m}=1$.把 $y=2x+\frac{\sqrt{210}}{3}$代入双曲线方程,整理得 $5x^2+2\sqrt{210}x+35+3m=0$.由性质 1,$4=\frac{1}{5}\sqrt{(1+2^2)[(2\sqrt{210})^2-20(35+3m)]}$,求得 $m=1$,故所求双曲线方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$.

2. 双曲线方程配方得$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$,焦点在 y 轴上,$a=4$, $b=3$, $c=5$, $e=\frac{5}{4}$, $ep=\frac{9}{4}$,斜率 $k'=$

$\frac{2}{21}\sqrt{21}$,取 $k=\frac{1}{k'}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.由性质 2,求得 $l=\frac{2ep(1+k^2)}{(1+k^2)-e^2}=6$.

3. 设点 $P(x_0,y_0)$ 为线段 P_1P_2 的中点,则 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 关于点 P 对称的曲线方程为 $(2x_0-x)^2-\frac{1}{2}(2y_0-y)^2=1$.上述两方程相减得 $2x_0x-y_0y-2x_0^2+y_0^2=0$.又点 $A(2,1)$ 在此直线上,有 $2x_0^2-y_0^2-4x_0+y_0=0$,故所求中点轨迹方程为 $2x^2-y^2-4x+y=0$.

4. 记 $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=x+y$.注意性质 9,又 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2=t^2f(x,y)$, $g(tx,ty)=tx+ty=t\cdot g(x,y)$,从而 Q 点的轨迹方程为 $x^2+y^2=x+y(x+y>0)$,即 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$(除去原点)为所求.

5. 由 $(x-2y-1)(2x-y-2)=0$,有 $2x^2-5xy+2y^2-4x+5y+2=0$.运用性质 8,在上述方程中,以 $2x$ 代 x, $\frac{2y-x}{2}$ 代 xy, $-y$ 代 y^2, $\frac{x+2}{2}$ 代 x, $\frac{y-1}{2}$ 代 y,得到方程 $x-y-1=0$.

过点 Q 与直线 l_1 相交,与直线 l_2 平行的直线是 $2x-y-5=0$,它与直线 $x-y-1=0$ 的交点 $(4,3)$,显然不是所求轨迹上的点.同样,过点 Q 与直线 l_1 平行的直线是 $x-2y-4=0$,与直线 $x-y-1=0$ 的交点 $(-2,-3)$ 也不是所求轨迹上的点.直线 l_1 和 l_2 与直线 $x-y-1=0$ 的交点 $(1,0)$ 也不是所求轨迹上的点.

P 点的轨迹是直线 $x-y-1=0$ 除去点 $(3,4)$, $(-2,-3)$, $(1,0)$ 以外的部分.

6. 设 $l:px+qx=1$(p,q 不同时为零),由性质 12 得齐次方程:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=(px+qx)^2$.设 $\frac{y}{x}=t$,得 $(q^2-\frac{1}{b^2})t^2+2pqt+p^2-\frac{1}{a^2}=0$.由 $OA\perp OB$ 知 $t_1\cdot t_2=-1$,得 $p^2+q^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$,于是原点到直线 l 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 为定值,故 l 恒与定圆 $L:x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 相切.

7. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,因 P 是其通径的端点,由性质 13 推论 2,知过 P 的切线必经过准线与焦点轴的交点 $K(\frac{a^2}{c},0)$,点 P 的坐标为 $(c,\frac{b^2}{a})$, B' 的坐标为 $(0,-b)$.由 $PB'\perp PK$,有 $\frac{\frac{b^2}{a}-(-b)}{c}=-\frac{c-\frac{a^2}{c}}{\frac{b^2}{a}}$,即 $\frac{b^4}{a^2}+\frac{b^3}{a}=a^2-c^2=b^2$,即 $\frac{b^2}{a^2}+\frac{b}{a}-1=0$,而 $\frac{b}{a}>0$,则 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.故 $e=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}$ 为所求.

8. 直线 PP(即切线)的方程为 $x-2y+3=0$,直线 QQ(即切线)的方程为 $5x+2y-6=0$,直线 PQ 的方程为 $y-1=\frac{-2-1}{2+1}(x+1)$,即 $x+y=0$.

因为 P,Q 都是切点,即都是二重点,因此可把 PQ 直线看作一条二重直线,则可设所求的二次

曲线方程为$(x-2y+3)(5x+2y-6)+\lambda(x+y^2)=0$.

又曲线过点 $R(1,0)$,由此求得 $\lambda=4$,故所求二次曲线为 $x^2+x+2y-2=0$.

习题 B

1. 设圆锥曲线的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$.设 $A_i(\rho_i,\theta+\dfrac{2(i-1)}{n}\pi)(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FA_i|^2}=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1-e\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})}{ep}\right]^2=\frac{1}{e^2p^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[1-e\cdot\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right]^2$$

$$=\frac{1}{e^2p^2}\left[n-2e\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})+e^2\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\cos^2(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right].$$

注意 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\cos(\theta+\dfrac{2i\pi}{n})=0$ 及 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left[\dfrac{1-e\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})}{ep}\right]^2=\dfrac{\lambda}{e^2p^2}(1+\dfrac{e^2}{2})$,

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{|FA_i|^2}=\dfrac{n}{2e^2p^2}(2+e^2)$ 为定值.

2. 提示:显然当 A 点在 Γ 的对称轴时,结论成立,当 A 不在 Γ 的对称轴上时,且不妨设 Γ 在直角坐标系下的方程为标准方程,并用参数方程表示(为椭圆时设 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),为双曲线时设 $\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),为抛物线时设 $\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$($t$ 为参数)),可以知道△ABC 的三边及过 A 点的切线 l 的斜率 k_{AB}, k_{AC}, k_{BC} 及 k_l 均存在且都不为零.此时可以等价转化为证明:$k_{AB}=-k_{AC}$ 的充要条件为 $k_{BC}=-k_l$,分三种情况证明即可.

3. 取焦点轴为 x 轴,并设其方程为 $\alpha x^2+\beta y^2=1$,其中 $\alpha\neq\beta$,圆与有心锥线的两公共弦 AC, BD 的方程为 $l_1x+m_1y+n_1=0$, $l_2x+m_2y+n_2=0$,则过 A,B,C,D 四点的圆锥曲线系为

$$\alpha x^2+\beta y^2-1=\lambda(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2).$$

即 $$(\alpha-\lambda l_1l_2)x^2-\lambda(l_1m_2+l_2m_1)xy+(\beta-\lambda m_1m_2)y^2+\cdots=0.$$

因圆也过 A,B,C,D,则圆也是上述曲线系中的一条曲线,而此方程为圆的方程的充要条件是:$\alpha-\lambda l_1l_2=\beta-\lambda m_1m_2$, $\lambda(l_1m_2+l_2m_1)=0$.

因 $\lambda\neq0$,则 $l_1m_2+l_2m_1=0$,若 $m_1m_2\neq0$,则 $\dfrac{l_1}{m_1}+\dfrac{l_2}{m_2}=0$,即 AC, BD 的倾斜率互为相反数,即证.

若 $m_1m_2=0$,不妨设 $m_1=0$,则 $l_1\neq0$.从 $l_1m_2+l_2m_1=0$ 可知 $m_2=0$, $l_2\neq0$,则 AC, BD 均与 y 轴平行,与题设不符.

4. 取 PQ 所在直线为 y 轴,PQ 的中点 O 为原点建立直角坐标系,设 $|OP|=|OQ|=a$,则 $P(0,a)$, $Q(0,-a)$.过 P,Q 两点的任意二次曲线方程为 $Ax^2+Bxy+y^2+Dx-a^2=0$,过点 O 的任意两弦 AB, CD(不与 PQ 重合)的方程分别为 $y=k_1x$, $y=k_2x$,过 A,B,C,D 四点的圆锥曲线系方程为

$$F(x,y)=Ax^2+Bxy+y^2+Dx-a^2+\lambda(y-k_1x)(y-k_2x)=0. \quad ①$$

由于曲线在 y 轴上截距为 OR, OS 为上述方程的根,则 $F(0,y)=(1+\lambda)y^2-a^2=0$. ②

于是曲线①与直线 PQ 交于两点,从而方程②有两实根 OR, OS,且 $OR+OS=0$,即 $OR=-OS$,故 $|OR|=|OS|$.

5.(Ⅰ)在以 F 为极点,圆锥曲线的对称轴为极轴的极坐标系中,设 P, Q 的极角分别为 $\gamma+\delta$, $\gamma-\delta$,其中 γ 为参数,则过 P, Q 的切线方程为 $\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\gamma-\delta)-e\cos\theta$,①

$\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\gamma+\delta)-e\cos\theta$.②

从①,②得 $\cos(\theta-\gamma-\delta)=\cos(\theta-\gamma+\delta)$.由于 $\delta\neq0$,则 $\theta=\gamma$.以 $\gamma=\theta$ 代入①得 $\frac{ep\cdot\sec\delta}{\rho}=1-e\sec\delta\cdot\cos\theta$,轨迹为以 F 为焦点, $e\sec\delta$ 为离心率,通径长为 $2ep\sec\delta$ 的圆锥曲线.当 $\cos\delta>e$ 时是椭圆;当 $\cos\delta=e$ 时是抛物线;当 $\cos\delta<e$ 时是双曲线.

(Ⅱ) P, Q 的连线方程为 $\frac{ep}{\rho}=\sec\delta\cdot\cos(\theta-\gamma)-e\cos\theta$,即 $\frac{ep\cdot\cos\delta}{\rho}=\cos(\theta-\gamma)-e\cos\delta\cdot\cos\theta$.③

与 $\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\alpha)-e\cos\theta$ 对比,可知③为圆锥 $\frac{ep\cos\delta}{\rho}=1-e\cos\delta\cdot\cos\theta$ 的切线,从而③与以 $e\cos\delta$ 为离心率, $2ep\cos\delta$ 为通径长, F 为焦点的圆锥曲线相切.

6.按 AB, BC, …的顺序,设六边形六条边的方程分别为 $f_i(x,y)=0(i=1,2,\cdots,6)$,直线 AD 的方程为 $\varphi(x,y)=0$,则过 A, B, C, D 四点,过 D, E, F, A 四点的圆锥曲线系分别为: $l\cdot f(x,y)\cdot f_3(x,y)+mf_2(x,y)\cdot\varphi(x,y)=0$, $l'\cdot\varphi(x,y)\cdot f_5(x,y)+m'f_4(x,y)\cdot f_6(x,y)=0$.

由上述两方程消去 $\varphi(x,y)$,得 $l\cdot l'\cdot f_1\cdot f_3\cdot f_5-m\cdot m'f_2\cdot f_4\cdot f_6=0$.

此方程表示的曲线过 A, B, C, D, E, F, M, N, P 九点,而又是三次方程,可以分解为一个一次因式与一个二次因式之积.因此,上述方程除表示过 A, B, C, D, E, F 六个点的圆锥曲线外,还表示一条过 M, N, P 的直线.这就证明了 M, N, P 三点共线.

第二十六章 圆锥曲线的相关性质及应用

习题 A

1.若过双曲线一焦点的两条弦(仅与一支相交) MN 和 PQ 互相垂直,则 $\frac{1}{|MN|}+\frac{1}{|PQ|}$ 为定值;

若过抛物线焦点的两条弦 MN 和 PQ 互相垂直,则 $\frac{1}{|MN|}+\frac{1}{|PQ|}$ 为定值.

2.双曲线上任意一点的切线,平分该点两焦半径的夹角;抛物线上任意一点的法线平分过此点的焦半径和过此点的直径(即过该点与对称轴平行的射线)所夹的角.

3.椭圆的焦点在其切线上的射影的轨迹是以椭圆的长轴为直径的圆;双曲线的焦点在其切线上的射影的轨迹是以双曲线的实轴为直径的圆.对于椭圆命题的证明如下:

设 Q 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点, F_1, F_2 为其左、右焦点, PQ 是切线, F_1 在 PQ 上的射影为 P.

延长 F_2Q 与 F_1P 的延长线相交于点 M,由第2题结论知 PQ 平分 $\angle F_1QM$,则 $\angle F_1QP=$

$\angle PQM=\frac{1}{2}\angle F_2QE$（$E$ 在 F_1Q 的延长线上）．由 $PQ\perp F_1M$，有 $\triangle PF_1Q\cong\triangle PQM$，有 $QM=QF_1$．

又 $|QF_1|+|QF_2|=2a$，则 $|QM|+|QF_2|=2a$．在 OP，由 P 是 F_1M 的中点，O 是 F_1F_2 的中点，则 $OP/\!/F_2M$，$PO=\frac{1}{2}F_2M=a$．由圆的定义可知，P 点的轨迹是以 O 为圆心，以 a 为半径的圆，去掉两点 $(-a,0)$，$(a,0)$，其轨迹方程是 $x^2+y^2=a^2(x\neq\pm a)$．

第二十七章　圆的解析性质及应用

习题 A

1．面积最小的圆是以 PQ 为直径的圆，由 $2x+y+4=0$ 与 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 分别消去 y，x，得 $g(x)=x^2+\frac{26}{5}x+\frac{33}{5}=0$，$h(y)=y^2-\frac{12}{5}y+\frac{4}{5}=0$，故所求圆的方程为 $x^2+y^2+\frac{26}{5}x-\frac{12}{5}y+\frac{4}{5}=0$．

2．将 $y=x-1$ 代入椭圆方程，得 $g(x)=x^2-\frac{2a^2}{2a^2-1}x+\frac{2a^2-a^4}{2a^2-1}=0$．将 $x=y+1$ 代入椭圆方程，得 $h(y)=y^2+\frac{2a^2-2}{2a^2-1}y+\frac{2a^2-a^4}{2a^2-1}=0$．从而以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2-\frac{2a^2}{2a^2-1}+\frac{2a^2-2}{2a^2-1}y+\frac{4a^2-2a^4-1}{2a^2-1}=0$．

因为此圆过椭圆的左焦点 $(-1,0)$，由此代入上述方程得 $a^4-4a^2+1=0$．而 $a>1$，从而求得 $a=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$．

3．由 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{24}=\frac{x}{12}+\frac{y}{8}$ 整理，得 $(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{13}{4}$，此即为以 $(1,\frac{3}{2})$ 为圆心，$\frac{\sqrt{13}}{2}$ 为半径的圆．

4．因为点 $P(1,4)$ 在抛物线上，所以由圆锥曲线的一般性质，知过点 P 与抛物线相切的切线方程为 $\frac{y+4}{2}=4x$，即 $8x-y-4=0$．

视点 $(1,4)$ 为点圆曲线 $\Gamma_0:(x-1)^2+(y-4)^2=0$，设所求圆方程为

$(x-1)^2+(y-4)^2+\lambda(8x-y-4)=0$．

此圆过点 $(3,0)$，从而求得 $\lambda=-1$．于是有 $x^2+y^2-10x-7y+21=0$．

将上述方程与 $y=4x^2$ 联立，消去 y，得

$16x^4-27x^2-10x+21=0$，即 $(x-1)^2(16x^2+32x+21)=0$．

易知此方程的实根有且仅有二重根 $x=1$，从而推知抛物线 $y=4x^2$ 与圆 $x^2+y^2-10x-7y+21=0$ 有且仅有公共点 $(1,4)$，也即它们相切于点 $(1,4)$，因此 $x^2+y^2-10x-7y+21=0$ 为所求的圆的方程．

5．令 $u=\cos x$，$v=\sin x$，则 $l:u+yv+(3-2y)=0$，$\odot O:u^2+v^2=1$，由已知 l 与 $\odot O$ 有公共点，有 $\frac{|3-2y|}{\sqrt{1+y^2}}\leqslant1$，即 $3y^2-12y+8\leqslant0$，解得 $2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

6. 令 $l:x+y+(z-\sqrt{3})=0$，$\odot O:x^2+y^2=1-z^2$.

由已知 l 与 $\odot O$ 有公共点，知 $\frac{|z-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{1-z^2}$，即 $(\sqrt{3}z-1)\leqslant 0$，故 $z=\frac{\sqrt{3}}{3}$，由此求得 $x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. 令 $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2=u$，$a+\frac{1}{b}=x$，$b+\frac{1}{a}=y$，则 $l:x+y-(1+\frac{1}{ab})=0$，$\odot O:x^2+y^2=u$. 由已知条件知 l 与 $\odot O$ 有公共点，有 $\frac{|-(1+\frac{1}{ab})|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{u}$，即 $u\geqslant\frac{1}{2}(1+\frac{1}{ab})^2$. 又由已知 $a+b=1$ 得 $ab\leqslant\frac{1}{4}$，由此知 $u\geqslant\frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}$.

8. 令 $x=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta}$，$y=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta}$，则 $l:\cos\beta\cdot x+\sin\beta\cdot y-1=0$，$\odot O:x^2+y^2=1$（由已知所设）. 又 l 与 $\odot O$ 有公共点，从而有 $\frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}}\leqslant 1$，即 $\cos^2\beta+\sin^2\beta\geqslant 1$，而 $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，这说明 l 与 $\odot O$ 有且只有一个公共点，而 $P(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta},\frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta})$ 与点 $Q(\cos\beta,\sin\beta)$ 均是 l 与 $\odot O$ 上的点，从而 $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta}=\cos\beta$，亦即 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，又 α,β 均为锐角，故 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

9. 由已知得 $(1+\cos\beta-\sin\beta)\cdot\sin\alpha+(\sin\beta+\cos\beta)\cdot\cos\alpha=\sqrt{3}$. 令 $u=\sin\alpha$，$v=\cos\alpha$，则 $l:(1+\cos\beta-\sin\beta)\cdot u+(\sin\beta+\cos\beta)\cdot\cos\alpha-\sqrt{3}=0$. $\odot O$: $u^2+v^2=1$. 由 l 与 $\odot O$ 有公共点，知 $\frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{(1+\cos\beta-\sin\beta)^2+(\sin\beta+\cos\beta)^2}}\leqslant 1$，即 $\cos\beta\geqslant\sin\beta$，而 $\beta\in[\frac{\pi}{4},\pi]$，从而 $\cos\beta=\sin\beta$，故 $\beta=\frac{\pi}{4}$.

习题 B

1. 已知圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$，它关于 x 轴的对称圆方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$. 此圆与直线 l 相切，设切点 $B(x_1,y_1)$，l 上任一点为 $M(x,y)$，B 分 MA 为定比 λ，则 $x_1=\frac{x-3\lambda}{1+\lambda}$，$y_1=\frac{y+3\lambda}{1+\lambda}$. 又 B 在圆上有 $49\lambda^2+2(5y-5x+19)\lambda+(x^2+y^2-4x+4y+7)=0$，又 l 与圆相切有 $\triangle=0$，即 $-8(3x+4y-3)(4x+3y+3)=0$，故所求两条光线方程为 $3x+4y-3=0$，$4x+3y+3=0$.

2. 取正 $\triangle ABC$ 的顶点 A 为原点，BC 边上的高 DA 所在直线为 y 轴建立直角坐标系，则 AB，AC 的方程分别为 $\sqrt{3}x-y=0$，$\sqrt{3}x+y=0$. 若正 $\triangle ABC$ 的高为 r，则与边 BC 相切而滚动的圆的方程为 $(x-m)^2+y^2=r^2$. 设圆与 AB，AC 分别交于 Q，R 两点，则 Q，R 两点的横坐标 x_Q，x_R 为方程 $(x-m)^2+3x^2=r^2$，即 $4x^2-2mx+m^2-r^2=0$ 的根. 即有 $x_Q+x_R=\frac{m}{2}$，$x_Q\cdot x_R=\frac{1}{4}(m^2-r^2)$. 又 $y_Q=\sqrt{3}x_Q$，$y_R=\sqrt{3}x_R$，则 $|RQ|^2=(x_Q-x_R)^2+(y_Q-y_R)^2=x_Q^2-2x_Qx_R+x_R^2+3(x_Q^2+2x_Qx_R+x_R^2)=4[(x_Q+x_R)^2-$

$x_Qx_R]=4(\frac{m^2}{4}-\frac{m^2-r^2}{4})=r^2$.

从而$|RQ|=r$,故RQ在圆心所张的角恒为60°的圆上.

3. 以垂心为原点,$\triangle ABC$的高AD所在直线为y轴建立直角坐标系.设$A(0,2a)$,$B(2b,2d)$,$C(2c,2d)$,则三边中点的坐标分别为$P(b+c,2d)$,$Q(c,a+d)$,$R(b,a+d)$,垂心与三顶点连线的中点分别为$J(0,a)$,$K(b,d)$,$L(c,d)$.因AD,BE,CF是$\triangle ABC$的三条高,则$\triangle JPD$,$\triangle KQE$,$\triangle LRF$都是直角三角形,故它们的外接圆直径分别为JP,KQ,LR.又因这三条线段的中点坐标均为$(\frac{b+c}{2},\frac{a+2d}{2})$,故三外接圆的圆心重合.而$|JP|^2=(b+c)^2+(2d-a)^2$,$|KQ|^2=|LR|^2=(b-c)^2+a^2$,且从$BE\perp AC$可得$d(2d-2a)+b\cdot 2c=0$,即$a=\frac{d^2+bc}{d}$,故$|JP|^2-|KQ|^2=(b+c)^2+(2d-a)^2-(b-c)^2-a^2=0$,故$|JP|=|KQ|=|LR|$,即三圆直径相等,由此得$\triangle JPD$,$\triangle KQE$,$\triangle LRF$的三外接圆重合,故九个点共圆.

第二十八章　椭圆的性质及应用

习题 A

1. 设$\angle F_1PF_2=2\theta$,由性质5(Ⅱ)知$(\tan\theta)_{\max}=\frac{c}{b}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,得$3c\geqslant\sqrt{3}b$,$3c^2\geqslant b^2=a^2-c^2$,故$e^2\geqslant\frac{1}{4}$,故$\frac{1}{2}\leqslant e\leqslant 1$为所求.

2. 设F_1,F_2是椭圆的两焦点,则$|F_1F_2|=2c$,且由题设$|PF_1|\cdot|PF_2|=4c^2$,由性质8,知$4c^2+|OP|^2=b^2+a^2$,即$|OP|^2=b^2+a^2-4c^2$.又$b^2\leqslant|OP|^2\leqslant a^2$,即$b^2\leqslant b^2-4c^2+a^2\leqslant a^2$,由此有$4c^2\leqslant a^2$且$a^2\leqslant 5c^2$,故$e\leqslant\frac{1}{2}$且$e\geqslant\frac{\sqrt{5}}{5}$,即$e$的范围是$[\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{1}{2}]$.

3. 设这两条弦长度分别为m,n,由$a=2,c=1$,则$b^2=3$.由性质11(Ⅱ),知$\frac{2}{2}(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$,故$mn=\frac{12}{7}(m+n)=\frac{12}{7}\cdot\frac{48}{7}=\frac{576}{49}$.

4. 设椭圆为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则由性质11(Ⅰ),有$a^2+b^2=2a^2b^2$.

将$y=x+1$代入椭圆方程,得$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0$,即为$2b^2x^2+2x+(1-b^2)=0$.于是,$x_1+x_2=-\frac{1}{b^2}$,$x_1x_2=\frac{1-b^2}{2b^2}$.从而$|PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2=\frac{2}{b^4}-\frac{4}{b^2}+4=(\frac{\sqrt{10}}{2})^2$,求得$b^2=2$或$\frac{2}{3}$,即$a^2=\frac{2}{3}$或2.故所求椭圆方程为$x^2+3y^2=2$或$3x^2+y^2=2$.

5. 设三角形三顶点$A(a\cos\theta_1,b\sin\theta_1)$,$B(a\cos\theta_2,b\sin\theta_2)$,$C(a\cos\theta_3,b\sin\theta_3)$,则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot$

$\begin{vmatrix} 1 & a\cos\theta_1 & b\sin\theta_1 \\ 1 & a\cos\theta_2 & b\sin\theta_2 \\ 1 & a\cos\theta_3 & b\sin\theta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}ab$.单位圆内接三角形面积$\leqslant ab\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

6. 由对称性知矩形的边必与对称轴平行.可设 $P(x,y)$为第一象限椭圆上的点,则 $S_{ABCD}=2x\cdot 2y=\frac{4(bx)\cdot(ay)}{ab}\leqslant\frac{4}{ab}\cdot\frac{(bx)^2+(ay^2)}{2}=2ab$.当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}a,y=\frac{\sqrt{2}}{2}b$ 时,$bx=ay=\frac{\sqrt{2}}{2}ab$,故矩形面积的最大值为 $2ab$.

7. 设 Q 为另一焦点,连 AQ,BQ 得平行四边形 $AFBQ$,于是 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AFQ}\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=bc$.

8. 设椭圆为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,准线 $l:x=\frac{a^2}{c}$,则 $P(\frac{a^2}{c},0)$.当 $AB\perp x$ 轴时,$A(c,\frac{a^2}{b})$,且 PA,PB 恰为两切线,这时$\angle APF=\arctan e$,即$\angle APB=2\arctan e$.当 AB 不垂直 x 轴时,PA 与 PB 均不为切线,显然$\angle APB<2\arctan e$.

9. 延长 F_1P 交 F_2Q 的延长线于 R,因点 Q 在椭圆上,则$|RF_2|=|QR|+|QF_2|=|QF_1|+|QF_2|=2a$,即$|OP|=\frac{1}{2}|RF_2|=a$.反之可证,以原点为圆心,$a$ 为半径的圆(除点$(-a,0)$,$(a,0)$)上的点满足条件.

10. 原方程等价于$\begin{cases}\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=8,\\ y^2=3.\end{cases}$

作椭圆:以$(-1,0)$为中心,$F_1(-3,0)$,$F_2(1,0)$为焦点,$2a=8$,得椭圆方程$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.令 $y^2=3$,得 $x_{1,2}=-1\pm2\sqrt{3}$为所求.

11. 设线段 AB 的中点 $Q(x',y')$,$A(x'+d_1,y'+d_2)$,$B(x'-d_1,y'-d_2)$,则直线 PQ 的方程为 $y-y'=-\frac{d_1}{d_2}(x-x')$.令 $y=0$,得 $x_0=x'+\frac{d_2}{d_1}y'$.又$\frac{(x'+d_1)^2}{a^2}+\frac{(y'+d_2)^2}{b^2}=1$,$\frac{(x'-d_1)^2}{a^2}+\frac{(y'-d_2)^2}{b^2}=1$,此两式相减,得$\frac{d_2}{d_1}y'=-\frac{b^2}{a^2}x$,则 $x_0=\frac{a^2-b^2}{a^2}x'$.又$-a<x'<a$,故$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

12. 令$\sqrt{x+1}=u\geqslant0$,$\sqrt{4-2x}=v\geqslant0$,消去 x,得$\frac{u^2}{3}+\frac{v^2}{6}=1(u\geqslant0,v\geqslant0)$,其图像是椭圆$\frac{u^2}{3}+\frac{v^2}{6}=1$在第一象限的部分.由 $y=u+v$ 知$v=-u+y$表示坐标系 uov 平面内直线,y 为其在 v 轴上的截距.

因直线与椭圆部分有公共点,可知当且仅当直线与椭圆部分相切时 y 最大,此时用判别式法求得 $y_{max}=3$.又当且仅当 $v=-u+y$ 过点$(\sqrt{3},0)$时 $y_{min}=3$.故 y 的取值范围是$[\sqrt{3},3]$.

13. 令 $f(x)=m$,$y=-2x-3+m$,则 $y=\sqrt{-2x^2+12x-14}\geqslant0$,整理得$\frac{y^2}{4}+\frac{(x-3)^2}{2}=1(y\geqslant$

0).由于 $y=-2x+m-3$ 为斜率是 -2 的一组平行线，$y=\sqrt{-2x^2+12-14}$ 是长轴平行于 y 轴的椭圆在 x 轴的上方部分.

由作图知直线过点 $(3-\sqrt{2},0)$ 时，m 取最小值 $9-2\sqrt{2}$；直线和椭圆相切时，m 最大.由 $-2x+m-3=\sqrt{-2x^2+12-14}$ 有等根，即 $6x^2-4mx+m^2-6m+23=0$ 有等根，故 $\Delta=m^2-18m+69=0$，得 $m=9+2\sqrt{3}$（舍去较小值），值域为 $[9-2\sqrt{2},9+2\sqrt{3}]$.

习题 B

1. 设 F_1,F_2 为其左、右焦点，则 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，平方得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4a^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|$.又由余弦定理，$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\dfrac{2b^2}{|PF_1|\cdot|PF_2|}-1\geqslant\dfrac{2b^2}{(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2})^2}-1=\dfrac{2b^2}{a^2}-1$.其中等号当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时成立.又 $\angle F_1PF_2\in(0,\pi)$，故 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\arccos(\dfrac{2b^2}{a^2}-1)$.

2. 设 $P(x_0,y_0)$，$P_1(x_1,y_1)$，则 $P_2(-x_1,-y_1)$.由 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ 与 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ 相减，有 $\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，而 $k_1=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$，$k_2=\dfrac{y_0+y_1}{x_0+x_1}$，故 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

注：（ⅰ）此命题的逆命题也是成立的；（ⅱ）将题中椭圆改为双曲线，结论也成立.

3.（1）设 $A(m,0)$，$B(\dfrac{a^2}{m},0)$，$P(x,y)$，$Q(x_2,y_2)$，显然 $y_1y_2<0$，$\tan\angle PBA=\left|\dfrac{y_1}{x_1-\frac{a^2}{m}}\right|$，$\tan\angle QBA=\left|\dfrac{y_2}{x_2-\frac{a^2}{m}}\right|$.

又 P,Q 在椭圆上，有 $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$，$bx_2^2+ay_2^2=a^2b^2$，两式相除，有 $\dfrac{y_1^2}{y_2^2}=\dfrac{a^2-x_1^2}{a^2-x_2^2}$，则

$$a^2(y_2^2-y_1^2)=x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2. \quad ①$$

又直线 PQ 的方程为 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$，由 $A(m,0)$ 在 PQ 上，有

$$-y_1(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(m-x_1)，即\ m(y_2-y_1)=x_1y_2-x_2y_1. \quad ②$$

①÷②得 $a^2m(y_1+y_2)=x_1y_2+x_2y_1$，再代入 $|\tan\angle PBA-\tan\angle QBA|=0$，从而得 $\angle PBA=\angle QBA$.

（2）延长 QA 交椭圆于 R，连 BR，有 $\angle PBA=\angle RBA$，即直线 PB 与直线 RB 关于 x 轴对称.又由椭圆的对称性，知点 P,R 关于 x 轴对称，故 $\angle PAB+\angle QAB=\angle RAB+\angle QAB=180°$.

注：（ⅰ）此题的逆命题亦成立；（ⅱ）将椭圆改为双曲线结论亦成立.

4. 不妨设 $P(x,y)$ 在 x 轴上方，$E_1(-\dfrac{a^2}{c},0)$，$E_2(\dfrac{a^2}{c},0)$，$k_{PE_1}=\dfrac{y}{x-\frac{a^2}{c}}$，$k_{PE_2}=\dfrac{y}{x+\frac{a^2}{c}}$，代入 $\tan\alpha=$

$\frac{k_{PE_2}-k_{PE_1}}{1+k_{PE_2}\cdot k_{PE_1}}$,得 $\tan\alpha=\frac{2a^2cy}{c^2x^2+c^2y^2-a^4}$. 又由椭圆方程得 $x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2$,代入上式得 $\tan\alpha=\frac{-2a^2b^2cy}{c^4y^2+a^2b^4}<0$(其中 $y>0$). 于是 $0<-\tan\alpha\leqslant\frac{2a^2b^2cy}{2ac^2b^2y}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$. (*) 从而 $\cot\alpha\geqslant e$,即 $\cot\alpha\leqslant -e$.

在(*)式中等号当且仅当 $c^4g^2=a^2b^2$,即 $|y|=\frac{ab^2}{c^2}$ 时成立,而 $|y|<b$,故 $\frac{ab^2}{c^2}\leqslant b\Rightarrow ab\leqslant c^2\Rightarrow a^2(a^2-c^2)\leqslant c^4\Rightarrow c^4+c^2a^2-a^4\leqslant 0\Rightarrow e^4+e^2-1\geqslant 0\Rightarrow e^2\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

注:此问题中将椭圆改为双曲线,则 α 改为锐角且 $\cot\alpha\geqslant e$,即得双曲线中的命题.

5. 设 F_1,F_2 为其左、右焦点,由于 $|PF_1|+|PA|=(|PF_1|+|PF_2|)+(|PA|-|PF_2|)=4\sqrt{2}+(|PA|-|PF_2|)$,易见 $-|AF_2|\leqslant|PA|-|PF_2|\leqslant|AF_2|$,仅当 P,A,F_2 共线时分别取等号. 因此,$|PF_1|+|PA|$ 的最大值为 $2a+|AF_1|=5\sqrt{2}$,最小值是 $2a-|AF_2|=3\sqrt{2}$.

6. 设 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,则由 $\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1$,$\frac{x_B^2}{a^2}+\frac{y_B^2}{b^2}=1$,得 $x_A^2+(\frac{a}{b}y_A)^2=a^2$,$x_B^2+(\frac{a}{b}y_B)^2=a^2$,由此可知点 $(x_A,\frac{a}{b}y_A)$,$(x_B,\frac{a}{b}y_B)$ 都在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上. 这两点的横坐标分别与 A、B 两点的横坐标相同,纵坐标同号. 于是 A',B' 的坐标分别为 $(x_A,\frac{a}{b}y_A)$,$(x_B,\frac{a}{b}y_B)$. 当 $x_A\neq x_B$ 时,因弦 AB 经过定点 $M(p,q)$,则 $k_{AM}=\frac{y_A-q}{x_A-p}=\frac{x_B-q}{x_B-p}=k_{BM}$,$k_{A'M'}=\frac{\frac{a}{b}y_A-\frac{a}{b}q}{x_A-p}=\frac{a}{b}k_{AM}$,$k_{B'M'}=\frac{\frac{a}{b}y_B-\frac{a}{b}q}{x_B-p}=\frac{a}{b}k_{BM}$. 因 $k_{AM}=k_{BM}$,则 $k_{A'M'}=k_{B'M'}$. 因此,弦 $A'B'$ 必经过定点 $M'(p,\frac{a}{b}q)$,当 $x_A=x_B=q$ 时,弦 $A'B'$ 显然经过定点 $M'(p,\frac{a}{b}q)$.

7. 记 OB 的倾斜角为 φ,$|OA|=r_1$,$|OB|=r_2$,则 $A(-r_1\sin\varphi,r_1\cos\varphi)$,$B(r_2\cos\varphi,r_2\sin\varphi)$,代入椭圆方程,得 $b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi=\frac{a^2b^2}{r_1^2}$,$b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi=\frac{a^2b^2}{r_2^2}$,两式相加得 $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$. 又 $(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2})\cdot(r_1^2+r_2^2)\geqslant 4$,从而 $|AB|^2=r_1^2+r_2^2\geqslant\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$,$AB\geqslant\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

又 $|AB|^2=r_1^2+r_2^2=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(\frac{a^2-b^2}{2})^2\cdot\sin^2 2\varphi}\leqslant a^2+b^2$.

8. 设 Γ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 因 l 不过原点,可设 l 的方程为 $Ax+By=1$(A,B 不全为0),设 $P(x_P,y_P)$ 为 l 上任一点,相应地,$R(x_R,y_R)$,$Q(x_Q,y_Q)$.

首先证明 l_P 的方程为 $\frac{x_P}{a^2}x+\frac{y_P}{b^2}y=1$.

当 $x_P\neq 0$ 时,直线 OP 的方程为 $y=\frac{y_P}{x_P}x$,代入 Γ 的方程,有 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}(\frac{y_P}{x_Px^2}x)^2=1$,即 $x_R^2=x_P^2/(\frac{x_P^2}{a^2}+$

$\frac{y_P^2}{b^2})$.

再由 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$ 及 x_Q,x_R 都与 x_P 同号，知 $x_P\cdot x_Q=x_R^2$，从而 $x_Q=x_P/(\frac{x_P^2}{a^2}+\frac{y_P^2}{b^2})$，故 $y_Q=y_P/(\frac{x_P^2}{a^2}+\frac{y_P^2}{b^2})$.

由于 $x_P\neq0$ 时必有 $x_Q\neq0$，故 l_P 必不平行于 y 轴，故可设其方程为 $y=kx+y_Q-kx_Q$. 代入 Γ 的方程，得 $(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2})x^2+\frac{2k}{b^2}(y_Q-kx_Q)x+\frac{1}{b^2}(y_Q-kx_Q)^2-1=0$，此为 l_P 与 Γ 的两交点的横坐标满足的方程. 由 Q 为这两交点之中点，有 $-\frac{2k}{b^2}(y_Q-kx_Q)/(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2})=2x_Q$. 由此可得 $k=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_Q}{y_Q}$，故 l_P 的方程为 $\frac{1}{a^2}x_Qx+\frac{1}{b^2}y_Qy=\frac{x_Q^2}{a^2}+\frac{y_Q^2}{b^2}$. 将 x_P,y_P 代入，得 $\frac{x_P}{a^2}x+\frac{y_P}{b^2}y=1$.

当 $x_P=0$ 时，P,Q,R 均在 y 轴上，且知 $y_Q=\frac{b^2}{y_P}$，此时 l_P 的方程为 $y=y_Q$，即 $\frac{y_P}{b^2}\cdot y=1$，显然适合 $\frac{x_P}{a^2}x+\frac{y_P}{b^2}y=1$，同时 $y_P=0$ 时也有此形式.

又由于 P 在 l 上，故 $Ax_P+By_P=1$，从而易验证所有 $l_P(P\in l)$ 都过一定点 $M(Aa^2,Bb^2)$.

9. 若 $A=0$，则弦 PQ 在直线 $y=h$，$h=-\frac{C}{B}\in(-b,b)$ 上. $S_{\triangle OPQ}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\cdot|h|\leq\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{2}(h^2+b^2-h^2)=\frac{1}{2}ab$，其中等号当且仅当 $2h^2=b^2$ 即 $b^2B^2=2C^2$ 时取得.

当 $A\neq0$，PQ 的方程可写成 $\lambda y+x+m=0$，$\lambda=\frac{B}{A}$，$m=\frac{C}{A}$，代入椭圆方程消去 x，得

$$(a^2+b^2\lambda^2)y^2+2\lambda mb^2y+b^2(m^2-a^2)=0,$$

于是 $$y_1+y_2=-\frac{2\lambda mb^2}{a^2+b^2\lambda^2},\ y_1y_2=\frac{b^2(m^2-a^2)}{a^2+b^2\lambda^2},$$

$$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=\frac{4a^2b^2(a^2+b^2\lambda^2-m^2)}{(a^2+b^2\lambda^2)^2}.$$

记 $a^2+b^2\lambda^2=\frac{1}{\lambda}$，又 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|m|\cdot|y_1-y_2|$，于是

$$\frac{S_{OPQ}^2}{a^2b^2m^2}=-m^2t^2+t=-m^2(t-\frac{1}{2m^2})^2+\frac{1}{4m^2}\leq\frac{1}{4m^2}.$$

当且仅当 $t=\frac{1}{2m^2}$，即 $a^2+b^2\lambda^2=2m^2$ 时等号取得，这时 $a^2A^2+b^2B^2=2C^2$.

10. 由已知得圆的方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$，

故 $$x^2+y^2=x(x_1+x_2)+y(y_1+y_2)-x_1x_2-y_1y_2$$
$$\leq\sqrt{(x^2+y^2)[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]}-(x_1x_2+y_1y_2).$$

记 $z=x^2+y^2$，$A=x_1x_2+y_1y_2$，$B=x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2$，则 $(\sqrt{z})^2\leq\sqrt{z(B+2A)}-A\Rightarrow\sqrt{z}\leq$

$\frac{1}{2}(\sqrt{B+2A}+\sqrt{B-2A})\Rightarrow 2z\leqslant B+\sqrt{B^2-4A^2}$.令 $x_1=a\cos\alpha, y_1=b\sin\alpha, x_2=a\cos\beta, y_2=b\sin\beta$,则 $B\leqslant 2a, B-2A=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}(a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+b^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}), B+2A=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}(a^2\cdot\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+b^2\cdot\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2})$,则 $B^2-4A^2\leqslant(a^2+b^2)^2$.故 $2z\leqslant 2a^2+a^2+b^2$,即 $x^2+y^2\leqslant\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$.

11. 令$\angle F_1PF_2=\alpha,\angle PF_1F_2=\beta,\angle F_1F_2P=\gamma$,则$\frac{r}{R}=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.又 $\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}$,则$\frac{r}{R}=2\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})$. (*)

又 $e=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$,即 $\sin\frac{\alpha}{2}=e\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$,并将其代入(*)式,有

$\frac{r}{R}=2e(1-e)\cdot\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}\leqslant 2e(1-e^2)$,其中等号成立当且仅当 $\beta=\gamma$.

12. 下列关系中的每一个都使得椭圆的离心率为 m:

(1)椭圆长轴的长是其焦距的$\frac{1}{m}$倍;

(2)椭圆长轴的长是其短轴长的$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$倍;

(3)椭圆的焦距与短轴长之比为$\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$;

(4)椭圆的短半轴 b 与长半轴 a、半焦距 c 的乘积的算术平方根成正比,即 $b^2=k^2\cdot ac$,且比例系数 k 为$\sqrt{\frac{1-m^2}{m}}$;

(5)椭圆通径的长等于长轴长的$(1-m^2)$倍;

(6)椭圆两准线间的距离等于其焦距的$\frac{1}{m^2}$倍;

(7)椭圆的通径长等于其焦点到相应准线距离的 $2m$ 倍;

(8)椭圆短轴一端点到椭圆一焦点的距离是该焦点到长轴较近端点距离的$\frac{1}{1-m}$倍;

(9)内接矩形的最大面积为 $2\sqrt{1-m^2}a^2$;

……

第二十九章 双曲线的性质及应用

习题 A

1. 延长 F_1P 与 QF_2 的延长线交于 R 点.由 Q 在双曲线上,且 F_1,F_2 为其焦点,则 $|F_2R|=|QR|-|QF_2|=|QF_1|-|QF_2|=2a$,即 $|OP|=\frac{1}{2}|F_2R|=a$.反之,可证以原点为圆心,a 为半径的

圆(除点$(-a,0)$,$(a,0)$)上的点满足条件.

2. 曲线化为标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$与$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{7}=1$.由直线与两曲线相切的充要条件,有

$\begin{cases}16A^2+9B^2=c^2,\\32A^2-7B^2=c^2.\end{cases}$ 求得$\begin{cases}A=B\\C=\pm5B\end{cases}$或$\begin{cases}A=-B,\\C=\pm5B.\end{cases}$

从而所求公切线方程为 $x+y\pm5=0$ 与 $x-y\pm5=0$.

3. 过 P,Q 点分别作两渐近线的垂线 PA,PB,QC,QD,显然$\triangle PBQ'\backsim\triangle QCQ'$,则$\frac{|QQ'|}{|PQ'|}=\frac{|QC|}{|PB|}$.同理$\frac{|PP'|}{|QP'|}=\frac{|PA|}{|QD|}$.由于双曲线上任一点到两渐近线距离之积为定值,即$|PA|\cdot|PB|=|QC|\cdot|QD|$,故$\frac{|QC|}{|PB|}=\frac{|PA|}{|QD|}$,即$\frac{|QQ'|}{|PQ'|}=\frac{|PP'|}{|QP'|}$,亦即$\frac{|QQ'|}{|QQ'|+|PQ'|}=\frac{|PP'|}{|PP'|+|QP'|}$,故$|PP'|=|QQ'|$.

4. 设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.因为$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}=\frac{4}{3}$,可设 $a^2=9\lambda$,$b^2=16\lambda(\lambda>0)$,所求双曲线方程为$\frac{x^2}{9\lambda}-\frac{y^2}{16\lambda}=1$.因直线 $8x+2\sqrt{7}y-16=0$ 与其相切,由性质5,有 $64\cdot9\lambda-28\cdot16\lambda=16^2$,得 $\lambda=2$,故所求双曲线方程为$\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{32}=1$.

习题 B

1. 原方程可化为 $y^2-\frac{x^2}{a^2/(a^2-1)}=1$.由 $a>1$ 知$\frac{a^2}{a^2-1}>0$.又 $A(0,1)$,于是以 A 为焦点,$M(0,m)$为顶点开口向下的抛物线方程为 $x^2=-4(m-1)(y-m)$.联立 $y=-x$ 与$(1-a^2)x+a^2y^2=a^2$ 得 $P(-a,a)$.

又 P 在抛物线上,有 $a^2=-4(m-1)(a-m)$.(*) 而 $k_{MP}=\frac{m-a}{a}$,即有 $m=ak_{MP}+a$ 并代入(*)式,得 $4ak_{MP}^2+4(a-1)k_{MP}-a=0$.因$\frac{1}{4}\leqslant k_{MP}\leqslant\frac{1}{3}$,且 $4a>0$,则关于 k_{MP} 的二次方程的判别式 $\Delta=[4(a-1)]^2+4\cdot4a\cdot a>0$ 成立.令 $f(k)=4ak^2+4(a-1)k-a$,而此抛物线的对称轴方程为 $k=-\frac{4(a-1)}{2\cdot4a}=\frac{1-a}{2a}$,由 $a>1$,则$\frac{1-a}{2a}<0$.

联立 $4a>0$ 与 $f(\frac{1}{4})\cdot f(\frac{1}{3})\leqslant0$,即$(4a\cdot\frac{1}{16}+a-1-a)\cdot(4a\cdot\frac{1}{9}+\frac{4a-4}{3}-a)\leqslant0$,即

$(\frac{1}{4}a-1)(\frac{7}{9}a-\frac{4}{3})\leqslant0$,故$\frac{12}{7}\leqslant a\leqslant4$ 为所求.

2. 设 $A(a\sec\theta,b\tan\theta)$,$P(a\sec\alpha_1,b\tan\alpha_1)$,$Q(a\sec\alpha_2,b\tan\alpha_2)$,则 $l_{PQ}:(x-a\sec\alpha_1)(b\tan\alpha_1-b\tan\alpha_2)=(y-b\tan\alpha_1)(a\sec\alpha_1-a\sec\alpha_2)$,即 $l_{PQ}:b\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}x-a\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}y-ab\cdot\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=0$.

又 $k_{AP}=\frac{b\cos\frac{\alpha_1-\theta}{2}}{a\sin\frac{\alpha_1+\theta}{2}}$,$k_{AQ}=\frac{b\cos\frac{\alpha_2-\theta}{2}}{a\sin\frac{\alpha_2+\theta}{2}}$,因此 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-1\Leftrightarrow b^2\cos\frac{\alpha_1-\theta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_2-\theta}{2}+$

$a^2\sin\frac{\alpha_1+\theta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_2+\theta}{2}=0\Leftrightarrow b^2[\cos(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\theta)+\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}]+a^2[\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}-\cos(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\theta)]=0$ $\Leftrightarrow b\cdot\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cdot\frac{a(a^2+b^2)}{(b^2-a^2)\cos\theta}-a\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\frac{b^2(a^2+b^2)\sin\theta}{(a^2-b^2)\cos\theta}-ab\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=0$. 由此式，知直线 PQ 恒过定点$(a\sec\theta\cdot\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}, b\tan\theta\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2})$.

第三十章 抛物线的性质及应用

习题 A

1. 设抛物线的极坐标方程 $\rho=\frac{e}{1-\cos\theta}$，则弦 AB 分为 FA, FB，且 $\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{1-\cos\theta}{p}+\frac{1+\cos\theta}{p}=\frac{2}{p}$.

2. 连 DC，则$\angle BDX=\angle CDX$.由例9(Ⅰ)的逆命题，知$|DO|=|OE|$.

3. 连 PN，则$\angle PNM=\angle QNM$.又由$\angle PQN=\angle PMN=90°$，知 N,Q,M,P 四点共圆，从而由同圆中等圆周角所对的弦相等，得$|PM|=|MQ|$.

4. 设存在两点 P,Q 关于 $x+y=0$ 对称，设 PQ 的中点为 $M(x_0,y_0)$.设 PQ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos45°=x_0+\frac{t}{\sqrt2}\\ y=y_0+t\sin45°=y_0+\frac{t}{\sqrt2}\end{cases}$（$t$ 为参数），代入抛物线方程，化简得 $\frac{a}{2}t^2+(\sqrt2ax_0-\frac{1}{\sqrt2})t+ax_0^2-y_0-1=0$. 由 $t_1+t_2=\sqrt2ax_0-\frac{1}{\sqrt2}=0$，得 $x_0=\frac{1}{2a}$，则 $y_0=-\frac{1}{2a}$.

又 $t_1t_2<0$，则$\frac{2}{a}(ax_0^2-y_0-1)=\frac{2(3-4a)}{4a^2}<0$，故 $a>\frac{3}{4}$为所求.

5. 由抛物线定义，知$|PR|=|PF|$，$|QS|=|QF|$，有$\angle PRF=\angle PFR$，$\angle QFS=\angle FSQ$，从而知$\angle RFS=90°$.又 $RS^2=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$，则$|RS|=2\sqrt{ab}$.而 M 为 RS 中点，故$|MF|=\frac{1}{2}|RS|=\sqrt{ab}$.

6. 设 $M(x_0,y_0)$，$A(x_0+d_1,y_0+d_2)$，$B(x_0-d_1,y_0-d_2)$，则$(y_0+d_2)^2=x_0+d_1$，$(y_0-d_2)^2=x_0-d_1$.由此两式相减得 $y_0=\frac{d_1}{2d_2}$，两式相加得 $x_0=y_0^2+d_2^2=\frac{d_1^2}{4d_2^2}+d_2^2$.又$|PQ|^2=(2d_1)^2+(2d_2)^2=3^2$，则 $d_2^2=\frac{1}{4}(9-4d_1^2)$.于是 $x_0=\frac{d_1^2}{9-4d_1^2}+\frac{1}{4}(9-4d_1^2)=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4(9-4d_1^2)}+\frac{9-4d_1^2}{4}\geqslant\frac{5}{4}$，当且仅当 $d_1=\pm\frac{\sqrt6}{2}$时，$(x_0)_{\min}=\frac{5}{4}$，即 M 到 y 轴最短距离为$\frac{5}{4}$.

7. $f(x)=\sqrt{(\frac{x^2}{2}-3)^2+(x-2)^2}+\sqrt{(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2})^2+(x-0)^2}$，可视为抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上一点$(x,\frac{x^2}{2})$到两定点 $A(2,3)$，$B(0,\frac{1}{2})$的距离和的最小值，而 B 恰为焦点，故 A 到其准线的距离$\frac{7}{2}$为所求.

习题 B

1. 因 $C(a_n)$ 与 $C(a_{n+1})$ 两圆相切，且都与 x 轴相切，则 $\sqrt{(a_n-a_{n+1}{}^2)+(a_n^2-a_{n+1}^2)^2}=a_n^2+a_{n+1}^2$，即 $(a_n-a_{n+1})^2=4a_n^2a_{n+1}^2$. 而 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$，则 $a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，即 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+2a_n}\Rightarrow$ $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，故数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}=2$ 为首项，公差 $d=2$ 的等差数列，从而 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+(n-1)d$，即 $\frac{1}{a_n}=2n$，$a_n=\frac{1}{2n}$，故 $C(a_n)$ 的周长为 $\frac{\pi}{2n^2}$，所以 $S_n=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})=\frac{\pi}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

2. 设四点 A_1,A_2,A_3,A_4 共圆的圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，并与 $y^2=x$ 联立消去 x，得 $y^4+(1+D)y^2+Ey+F=0$. 令 $A_k(y_k^2,y_k)(k=1,2,3,4)$，则 $y_1+y_2+y_3+y_4=0$，而 $k_{A_1A_2}=\frac{y_2-y_1}{y_2^2-y_1^2}=\frac{1}{y_1+y_2}$. 同理 $k_{A_3A_4}=\frac{1}{y_3+y_4}$. 从而由 $y_1+y_2=-(y_3+y_4)$，知 $k_{A_1A_2}=-k_{A_3A_4}$，即直线 PA,PB 的倾角互补，有 $\angle PAB=\angle PBA$. 故 P 点轨迹是线段 AB 的中垂线，除去它与 x 轴的交点和与 $y^2=x$ 的交点.

3. (Ⅰ) 半圆方程为 $[x-(a+4)]^2+y^2=16(y\geqslant 0)$，并与 $y^2=4ax(a>0)$ 联立消去 y，得 $x^2-(8-2a)x+a(a+8)=0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $|AM|=x_1+a$，$|AN|=x_2+a$，故 $|AM|+|AN|=x_1+x_2+2a=(8-2a)+2a=8$.

(Ⅱ) 若存在 a 使 $|AM|$，$|AP|$，$|AN|$ 成等差数列，分别过 M,P,N 作准线 $x=-a$ 的垂线段 MM_1，PP_1，NN_1，则由抛物线定义，有 $2|AP|=|AM|+|AN|=|MM_1|+|NN_1|=2|PP_1|$. 又过 P 作 $PT\,/\!/\,y$ 轴交抛物线于 T，且过 T 作 $TT_1\perp$ 准线 $x=-a$ 于 T_1，则 $|PP_1|=|TT_1|$，从而 $2|AP|=2|TT_1|$. 又 $|TT_1|=|AT|$，则 $2|AP|=2|AT|$，即 $|AP|=|AT|$，这显然与 P 点不在抛物线上矛盾. 故不存在这样的 a 使得 $2|AP|$ 等于 $|AM|+|AN|$.

4. 设 $P_i(y_i^2,y_i)$，$Q_i(y'^2_i,y'_i)$，$\lambda_i=\frac{P_iM}{MQ_i}(\lambda_i\neq-1,i=1,2,3,4)$. 由 $\begin{cases}2=\frac{y_i^2+\lambda y'^2_i}{1+\lambda_i}\\ -1=\frac{y_i+\lambda y'_i}{1+\lambda}\end{cases}$ 消去 y'_i，得 $(\lambda_i+1)y_i^2+2y_i(\lambda_i+1)=\lambda_i^2-1$，所以 $\lambda_i=(y_i+1)^2$.

因 y_1,y_2,y_3,y_4 成等差数列，设公差为 $d\neq0$，则 $(\frac{P_1M}{MQ_1}-\frac{P_2M}{MQ_2})-(\frac{P_3M}{MQ_3}-\frac{P_4M}{MQ_4})=(\lambda_1-\lambda_2)-(\lambda_3-\lambda_4)=-d[(y_1+y_2+2)-(y_3+y_4+2)]=-d(-4d)=4d^2>0$.

5. 必要性：设直线 AB 交 x 轴于定点 $M(m,0)$，当 $m\leqslant0$ 时，AB 不可能垂直于 x 轴，设其斜率为 k，易见 $k\neq0$，AB 的方程为 $y=k(x-m)$，由 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=k(x-m)\end{cases}$ 消去 x，得 $\frac{k}{2p}y^2-y-km=0$，此方程两根有 $y_1+y_2=-2pm$；当 $m>0$ 时，若 AB 不垂直于 x 轴，同上有 $y_1+y_2=-2pm$；若 $AB\perp x$ 轴，有 $x=m$，与 $y^2=2px$ 联立有 $y^2-2pm=0$，故亦有 $y_1y_2=-2pm$.

充分性：设 $y_1\cdot y_2=\lambda$，当 $\lambda>0$ 时，A,B 在 x 轴同一侧，则 k_{AB} 存在且 $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2p}{y_1+y_2}$，$AB$ 的方程为 $y-y_1=\frac{2p}{y_1+y_2}(x-x_1)$. 又 $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$，令 $y=0$，有 $-y_1^2-y_1y_2=2px-y_1^2$，故 $x=-\frac{y_1y_2}{2p}=-\frac{\lambda}{2p}$，所以直线 AB 交 x 轴于定点 $(-\frac{\lambda}{2p},0)$；当 $\lambda<0$ 时，A,B 在 x 轴异侧，若 k_{AB} 存在，同上 AB 过定点 $(-\frac{\lambda}{2p},0)$，若 k_{AB} 不存在，则 $x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，$y_1^2=y_2^2=-\lambda$，$x_1=x_2=\frac{y_1^2}{2p}=\frac{-\lambda}{2p}$，即直线 AB 与 x 轴交于点 $(-\frac{\lambda}{2p},0)$；当 $\lambda=0$ 时，直线 AB 过原点，也满足过点 $(-\frac{\lambda}{2p},0)$.

6. 可设直线 l 的方程为 $x=my+a(m\neq0)$，代入 $y^2=2px$ 得 $y^2-2pmy-2pa=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1y_2=-2pa$. 因 A,B 不在同一象限，故 y_1 与 y_2 异号，即 $-2pa<0$. 再由 $p>0$，得 $a>0$.

因 $x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{(-2pa)^2}{4p^2}=a^2$，所以 $\sqrt{x_1x_2}=a$.

过 A,B 两点分别作 x 轴的垂线段 AC,BD，则 $\tan\angle ANC=\frac{|AC|}{|NC|}=\frac{\sqrt{2px_1}}{x_1+\frac{p}{2}}$，$\tan\angle BND=\frac{|BD|}{|ND|}=\frac{\sqrt{2px_2}}{x_2+\frac{p}{2}}$. 因 $\angle ANB$ 被 x 轴平分，$\angle ANC=\angle BND$，由 $\tan\angle ANC=\tan\angle BND$，有 $\frac{\sqrt{2px_1}}{x_1+\frac{p}{2}}=\frac{\sqrt{2px_2}}{x_2+\frac{p}{2}}$，即 $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1x_2}-\frac{p}{2})=0$. 因 AB 不垂直 x 轴，即 $x_1\neq x_2$，$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\neq0$，即有 $\sqrt{x_1x_2}=\frac{p}{2}$，从而 $a=\frac{p}{2}$，故直线 l 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，过抛物线焦点 $(\frac{p}{2},0)$. 故 AB 为焦点弦.

7.（Ⅰ）设直线 PQ 与 x 轴成 θ 角，抛物线上横坐标为 x 的点到直线 PQ 的距离为 $l(x)$，过同一点作垂直于 x 轴的直线夹在直线 PQ 与抛物线弧之间的线段长为 $h(x)$，则有 $l(x)=h(x)\cdot\cos\theta$，$h(x)=a^2x-(ax^2-bx+b)$. 注意 P,Q 横坐标之差的绝对值为 1，故可设其横坐标分别为 $\alpha\mp\frac{1}{2}$. 又 P,Q 点处的横坐标是 $h(x)=0$ 的解，则 $h(x)=-a[x-(\alpha-\frac{1}{2})][x-(\alpha+\frac{1}{2})]=-a[(x-\alpha)^2-\frac{1}{4}]$. 因此，当 $x=\alpha$ 时，$h(x)$ 最大.

又 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{a^4+1}}$，而 $h(\alpha)=\frac{1}{4}a$，所以 $d=h(\alpha)\cdot\cos\theta=\frac{a}{4}/\sqrt{a^4+1}$.

（Ⅱ）$d=\frac{1}{4}/\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}$，而 $a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant2$（$a^2=\frac{1}{a^2}$ 即 $a=1$ 取等号），因此，$a=1$ 时，d 最大. 这时，令 $h(x)=a^2x-(ax^2-bx+b)=0$，其两根为 $\frac{1}{2}(b+1)\pm\sqrt{(b+1)^2-4b}$，因两根差的绝对值为 1，故有 $(b+1)^2-4b=1$，解得 $b=0,2$. 即 $(a,b)=(1,0)$ 或 $(1,2)$ 时，d 值最大.

参考文献

1. 刘毅．梅涅劳斯定理与塞瓦定理[M]．长春：长春出版社，1997
2. 李梦樵，尚强．平面几何一题多解新编[M]．合肥：安徽教育出版社，1987
3. 杜锡录．根轴(初中数学竞赛教程)[M]．南京：江苏教育出版社，1990
4. 唐立华等．奥林匹克竞赛—高中数学[M]．长沙：湖南人民出版社，2001
5. 沈文选等．初等数学研究教程[M]．长沙：湖南教育出版社，1996
6. 汪江松，黄家礼．几何明珠[M]．武汉：中国地质大学出版社，1988
7. 苏淳．苏联数学奥林匹克试题汇编 1988—1991[M]．北京：北京大学出版社，1992
8. 李墨卿等译．全苏数学奥林匹克试题[M]．济南：山东教育出版社，1990
9. 苏淳等译．第 1～50 届莫斯科数学奥林匹克[M]．北京：科学出版社，1990
10. 单墫．近代欧氏几何学[M]．上海：教育出版社，2000
11. 蒋声．圆锥曲线的几何性质[M]．上海：上海教育出版社，2002
12. 王培甫．平面几何一题多解选[M]．石家庄：河北人民出版社，1981
13. 于志洪．用张角公式证三点共线[J]．数学教学研究，1987(4)：17～18
14. 方廷刚．圆系、根轴、幂、几何赛题[J]．中学数学月刊，1999(5)：45～46
15. 苏化明．四面体为等腰四面体的充要条件[J]．数学竞赛，1992(15)：29～44
16. 刘正中．垂心四面体的性质[J]．数学教学研究，1993(1)
17. 袁祖志．三角形重心的性质．中学数学教学，1995(1)
18. 陈友才．双子三角形内切圆性质初探[J]．中学数学，1993(9)
19. 杨之．西姆松定理的推广及解析证明[J]．中等数学，1986(5)
20. 苏化明．关于三角形的垂足三角形[J]．数学竞赛 22 辑．湖南教育出版社，1994
21. 邹楼海，余炯沛．圆锥曲线的相关性[J]．数学通报，1994(5)
22. 石国强．椭圆焦点三角形的若干性质[J]．数学通报，1995(7)
23. 沈文选．2001 年高中联赛平面几何题的新证法[J]．中学数学杂志，2002(2)：33～34
24. 沈文选．2002 年高中联赛平面几何题的新证法[J]．中学数学杂志，2003(1)：40～43
25. 沈文选，冷岗松．关于 2003 年中国数学奥林匹克第一题[J]．中等数学，2003(6)：9～14
26. 沈文选．根轴的性质及应用[J]．中等数学，2004(1)：6～10
27. 沈文选．含有 60°内角的三角形的性质及应用[J]．中学数学，2003(1)：47～49
28. 沈文选．也谈一道竞赛试题的别证及其他[J]．中学数学研究，2002(8)：43～44
29. 沈文选．角格点一些猜想的统一证明[J]．中学数学，2002(6)：40～41
30. 沈文选．关于双圆四边形的一些结论[J]．数学通报，1991(5)：28～31

31. 沈文选．三角形内心的性质及应用[J]. 中学数学教学参考,2002(3):59~62
32. 沈文选．三角形外心的性质及应用[J]. 中学数学教学参考,2002(4):54~57
33. 沈文选．三角形重心的性质及应用[J]. 中学数学教学参考,2002(5):55~58
34. 沈文选．三角形垂心的性质及应用[J]. 中学数学教学参考,2002(6):47~50
35. 沈文选．三角形旁心的性质及应用[J]. 中学数学教学参考,2002(7):54~56
36. 沈文选．三角形巧合点间的一些性质及应用[J]. 中学数学月刊,2002(6):41~44
37. 沈文选．关联正方形的一些有趣结论与数学竞赛命题[J]. 中等数学,1998(1):10~15
38. 沈文选．位似变换及其应用[J]. 中等数学,1994(2):1~3
39. 沈文选．梅涅劳斯定理及应用[J]. 中学数学教学参考,2003(7):52~55
40. 沈文选．塞瓦定理及应用[J]. 中学数学教学参考,2003(8):55~59
41. 沈文选．托勒迷定理及应用[J]. 中学数学教学参考,2003(1)57~60
42. 沈文选．西姆松定理及应用[J]. 中学数学教学参考,2003(11)
43. 沈文选．向量坐标及应用[J]. 数学竞赛,1994(20):32~45
44. 沈文选．仿射变换及应用[J]. 数学竞赛,1994(22):38~46
45. 沈文选．平行六面体中的一些数量关系[J]. 数学教学研究,1987(3):23~26.
46. 沈文选．正四面体的性质及应用[J]. 数学教学研究,1994(3):29~31
47. 沈文选．三面角的性质及应用[J]. 中学数学(江苏),1992(5):40~43
48. 沈文选．空间四边形的一些有趣结论[J]. 中学数学杂志,1990(3):37~39
49. 沈文选．射影法及应用[J]. 中学数学(江苏),1991(10):47~49
50. 沈文选．直角三角形中的一些数量关系[J]. 中学数学,1997(7):14~17
51. 沈文选．关联三个正方形的有趣结论[J]. 中学数学,1999(4):45~46
52. 沈文选．相交两圆的两条性质及应用[J]. 中学数学,1990(2):12~14
53. 沈文选．抛物线弓形的几条有趣性质[J]. 中学数学杂志,1991(4):9~12
54. 沈文选．数学竞赛中点共直线问题的若干求解思路[J]. 中学教研(数学),1994(4):9~13
55. 沈文选．线段相等问题的若干求解思路[J]. 中学数学,1995(2):38~41
56. 沈文选．角度相等问题的若干求解思路[J]. 中学数学,1995(3):38~43
57. 沈文选．两直线平行问题的求解思路[J]. 中学数学,1993(12):30~34
58. 沈文选．两直线垂直问题的求解思路[J]. 中学数学,1994(1):29~33
59. 沈文选．正三角形的连接[J]. 中等数学,1995(6):8~11
60. 沈文选．三圆两两相交的一条性质[J]. 中学数学,1992(6):25
61. 沈文选．椭圆的焦半径的性质[J]. 中学数学,1984(11):39~40
62. 沈文选．完全四边形的优美性质及应用[J]. 中等数学,2006(8,10)及2007(1,3):17~19
63. 沈文选．线段的调和分割及应用[J]. 中等数学,2009(4,5):17~19

奥赛经典

高级教程系列

◎数学奥林匹克教程
◎物理奥林匹克教程
◎物理奥林匹克实验教程
◎化学奥林匹克教程
◎化学奥林匹克实验教程
◎生物奥林匹克教程
◎生物奥林匹克实验教程
◎信息学奥林匹克教程・基础篇
◎信息学奥林匹克教程・提高篇
◎信息学奥林匹克教程・语言篇
◎信息学奥林匹克教程・数据结构篇

初中教程系列

◎初中数学奥林匹克实用教程 第一册
◎初中数学奥林匹克实用教程 第二册
◎初中数学奥林匹克实用教程 第三册
◎初中数学奥林匹克实用教程 第四册

解题金钥匙系列

◎初中数学 ◎高中数学
◎初中物理 ◎高中物理
◎初中化学 ◎高中化学
◎高中生物 ◎高中信息学

专题研究系列

◎奥林匹克数学中的代数问题
◎奥林匹克数学中的几何问题
◎奥林匹克数学中的组合问题
◎奥林匹克数学中的数论问题
◎奥林匹克数学中的真题分析

热点专题系列

◎初中数学竞赛热点专题
◎初中物理竞赛热点专题
◎初中化学竞赛热点专题
◎初中生物竞赛热点专题
◎高中数学竞赛热点专题
◎高中物理竞赛热点专题
◎高中化学竞赛热点专题
◎高中生物竞赛热点专题

典型试题系列

◎数学奥林匹克典型试题剖析
◎物理奥林匹克典型试题剖析
◎化学奥林匹克典型试题剖析
◎信息学奥林匹克典型试题剖

分级精讲与测试系列

◎初一数学 ◎初二数学
◎初三数学 ◎初二物理
◎初三物理 ◎初三化学
◎高一数学 ◎高二数学
◎高一物理 ◎高二物理
◎高一生物 ◎高二生物
◎高一化学 ◎高二化学

⊙组　　稿＝廖小刚
⊙责任编辑＝廖小刚
⊙装帧版式＝周基东

定价：36.00元

ISBN 978-7-5648-0026-0

